III.- TURBINA PELTON

pfernandezdiez.es

III.1.- COMPONENTES Y FUNCIONAMIENTO

Las turbinas Pelton son turbinas de chorro libre que se acomodan a la utilización de saltos de agua con mucho desnivel y caudales relativamente pequeños, Fig III.1, con márgenes de empleo entre 60 y 1500 m, consiguiéndose rendimientos máximos del orden del 90%.

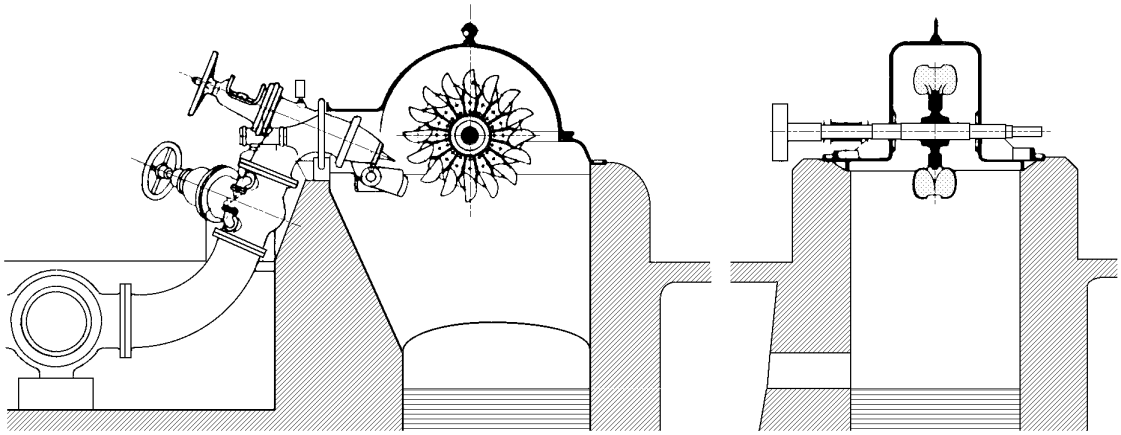


Fig III.1.- Turbina Pelton

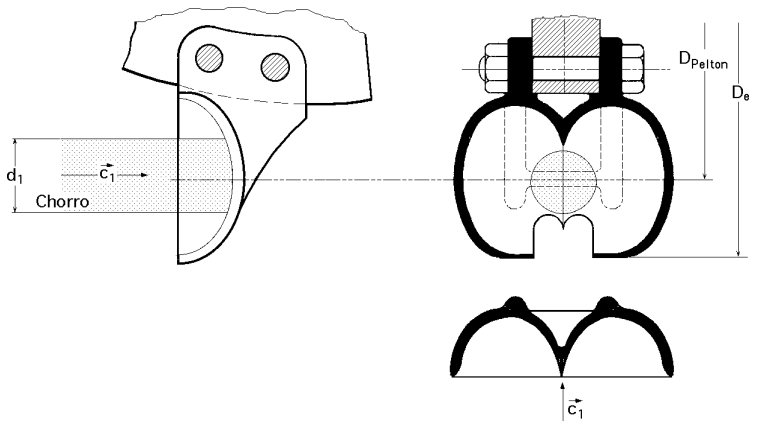


Fig III.2.- Forma de la cazoleta

Cazoletas.- En una rueda Pelton la dirección del chorro no es ni axial ni radial, sino tangencial; el elemento constructivo más importante es la cazoleta en forma de doble cuchara, Fig III.2, que recibe el chorro exactamente en su arista media donde se divide en dos, circulando por su cavidad y recorriendo hasta la salida casi un ángulo de 180º, contrarrestándose así los empujes axiales por cambio de dirección de los dos chorros.

El agua una vez sale de la cazoleta, cae libremente una cierta altura, pasando al cauce inferior.

Inyector.- El inyector es el órgano regulador del caudal del chorro; consta de una válvula de aguja cuya carrera determina el grado de apertura del mismo; para poder asegurar el cierre, el diámetro máximo de la aguja tiene que ser superior al de salida del chorro cuyo diámetro d se mide en la sección contraída, situada aguas abajo de la salida del inyector y en donde se puede considerar que la presión exterior es igual a la atmosférica.

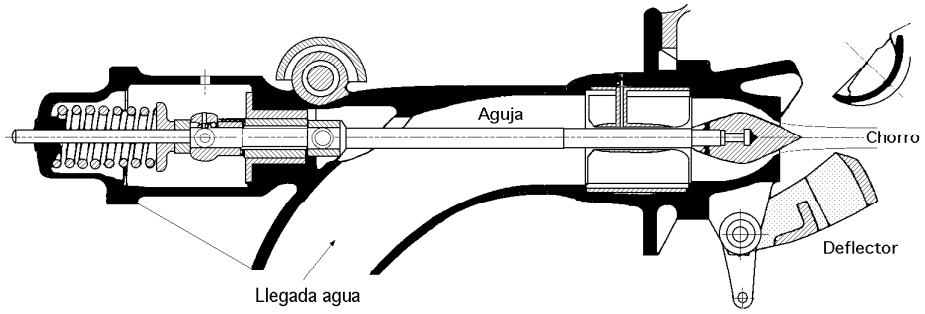


Fig III.3.- Inyector

El chorro está constituido por un núcleo central convergente de agua y una sección anular creciente que contiene una emulsión de agua y aire.

Con el fin de asegurar una buena regulación, conviene diseñar el inyector de forma que exista una proporcionalidad entre la potencia de la turbina y la carrera x de la aguja, por cuanto la potencia es proporcional al caudal y éste, a su vez, a la sección de paso normal al flujo. La variación del caudal del chorro para regular la potencia se consigue mediante una aguja de forma especial, con cuyo accionamiento se puede estrangular la sección de salida de la boquilla; su regulación puede ser manual o automática mediante un servomotor.

Tiene además otro sistema de regulación por desviación del chorro, que consiste en una superficie metálica llamada *deflector*, que se introduce en medio del chorro, dividiéndolo y desviando una parte del mismo, de forma que en vez de dirigirse contra las cazoletas, sale lateralmente sin producir ningún efecto útil. De esta forma se evitan sobrepresiones en la tubería, por cuanto el caudal que circula por ésta continua siendo el mismo, Fig III.5.

Cuando se dispone de un solo inyector, el rodete tiene el eje de giro horizontal y el eje de salida del chorro es tangente horizontal, inferior a la circunferencia del rodete, cuyo diámetro se denomina *diámetro Pelton*, cayendo el agua a la salida de las cucharas al fondo de la turbina, sin interferir el

giro del rodete.

Cuando el número de inyectores es dos, la turbina puede ser también de eje horizontal, disponiéndose los chorros según dos tangentes inferiores a la circunferencia Pelton, inclinadas un mismo ángulo ≈ 30º, saliendo el agua de las cucharas sin interferir al rodete, Fig III.5.

Para un número superior de inyectores, Fig III.4, la rueda Pelton es de eje vertical ya que de ser horizontal, sería imposible evitar que el agua cayera sobre la rueda a la salida de las cucharas. Un chorro bien diseñado no debe tener un diámetro d > 27 cm, por lo que para establecer el número de inyectores hay que partir de la condición de que su diámetro no sea superior a este límite, teniendo en cuenta a su vez, el límite superior impuesto por la velocidad específica por chorro, en función del salto. El hecho de sustituir un número de inyectores de unas dimensiones determinadas, por un mayor número de inyectores de dimensiones más pequeñas, permite construir turbinas de mayor diámetro, girando a una velocidad mayor; sin embargo no se deben sobrepasar ciertos límites impuestos por la necesidad de evacuar el agua convenientemente, así como la fatiga del material de las cucharas sometidas a esfuerzos repetidos, tanto más frecuentes cuanto mayor sea el número de chorros.

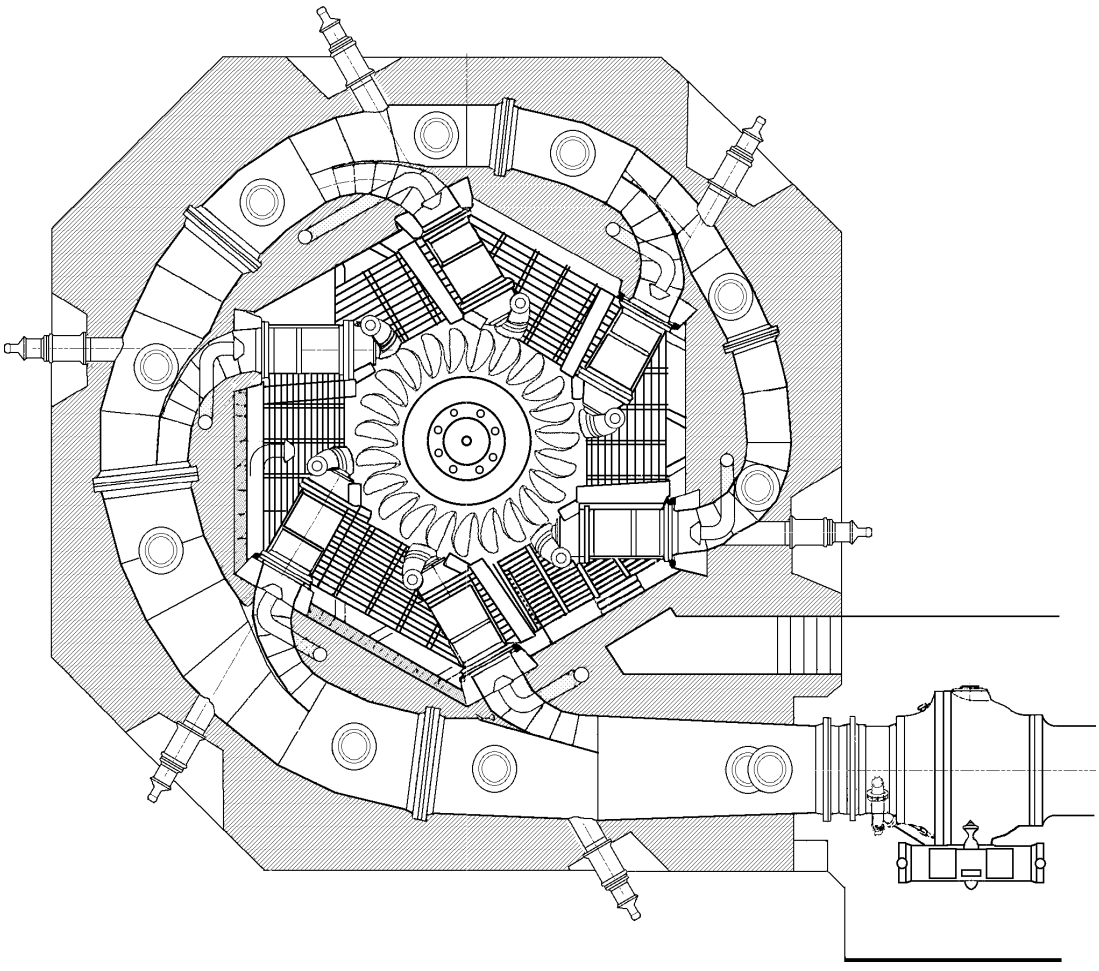


Fig III.4.- Turbina Pelton de 6 inyectores

Regulación.- *Para mantener constante la velocidad de la turbina, el caudal inyectado tiene que adaptarse en cada instante al valor de la carga,* por lo que la posición del inyector se ajusta mediante un regulador que actúa según la velocidad de la turbina y en el caso más general, en forma automática, Fig III.5. Si se supone que la turbina se ha acelerado, el regulador 7 levantará la válvula 1 y el aceite a presión entrará en el cilindro grande haciendo bajar el émbolo 8, con lo que la palanca 2 bajará y el deflector 6 cortará al chorro desviando una parte del mismo.

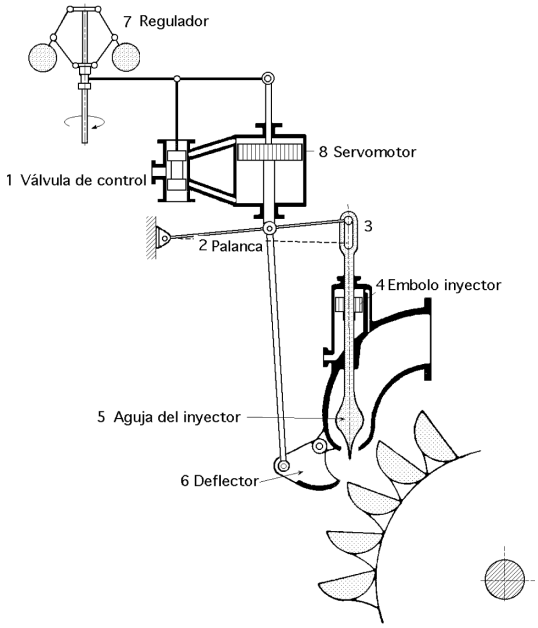


Fig III.5.- Regulador simple

El punzón 5 que estaba retenido por la palanca 2 no avanza solidariamente con ésta, debido al huelgo de la hendidura 3, sino que es empujado lentamente por el agua a presión que pasa por un orificio estrecho, señalado en la figura y que actúa sobre el émbolo 4. El punzón en su avance llega a encontrarse con el tope inferior de la hendidura 3 que le impide seguir cerrando la salida del inyector. Si sobreviene una carga brusca, el émbolo 8 actuará en sentido contrario, tirando rápidamente de la aguja 5 hacia atrás y llevando, simultáneamente, el deflector a su posición primitiva.

Cuando se utilizan grandes caudales de agua y se emplee un solo inyector, las cazoletas resultan muy grandes y pesadas; también se encuentra el inconveniente de que toda la fuerza tangencial se ejerce en un solo punto de la rueda, lo que representa un desequilibrio dinámico.

En consecuencia conviene hacer el montaje de dos o mas inyectores cuando el caudal lo requiera, por lo que las cazoletas estarán menos cargadas y, por lo tanto, serán más pequeñas.

El par motor se distribuye más uniformemente sobre la periferia de la rueda, aumenta el número específico de revoluciones en $\sqrt{z}$ y a igualdad de diámetro del rodete la turbina adquiere una velocidad angular mayor.

III.2.- SALTO NETO

Salto neto en la Turbina Pelton de un inyector.- En el caso de un solo inyector y eje de la turbina horizontal, si se considera la zona comprendida desde inmediatamente antes del inyector, punto A de la Fig III.6, hasta el punto de tangencia del chorro con la circunferencia media de la rueda, punto A_1, de acuerdo con la definición dada de salto neto, se tiene:

$$H_n = \frac{c_0^2}{2\,g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 - z_a$$

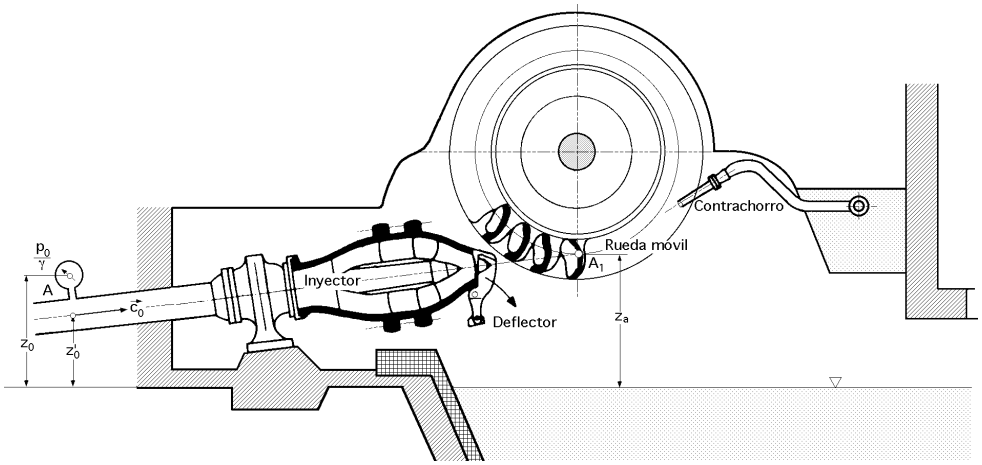


Fig III.6.- Turbina Pelton de un inyector

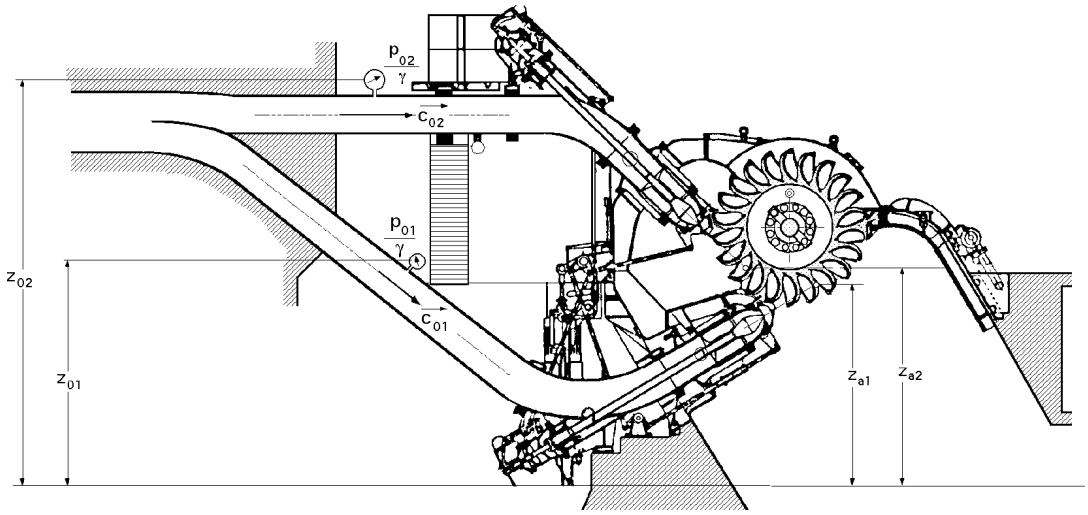
Salto neto en la turbina Pelton de varios inyectores.- Si por ejemplo se considera que la turbina tiene dos inyectores, Fig III.7, de diferentes características que proporcionan los caudales Q_1 y Q_2, (caso poco frecuente), el estudio se puede hacer como si el conjunto constase de dos turbinas, para los respectivos caudales Q_1 y Q_2, saltos correspondientes H_{n1} y H_{n2}, y potencias respectivas N_{n1} y N_{n2}, de la forma:

$$H_{n1} = \frac{c_{01}^2}{2g} + \frac{p_{01}}{\gamma} + z_{01} - z_{a1} \quad ; \quad N_{n1} = \gamma\, Q_1 H_{n1}$$

$$H_{n2} = \frac{c_{02}^2}{2g} + \frac{p_{02}}{\gamma} + z_{02} - z_{a2} \quad ; \quad N_{n2} = \gamma\, Q_2 H_{n2}$$

$$N_n = \gamma\, Q_1 H_{n1} + \gamma\, Q_2 H_{n2} = \gamma\, Q_1 \left(\frac{c_{01}^2}{2g} + \frac{p_{01}}{\gamma} + z_{01} - z_{a1} \right) + \gamma\, Q_2 \left(\frac{c_{02}^2}{2g} + \frac{p_{02}}{\gamma} + z_{02} - z_{a2} \right)$$

En este caso se puede tomar como salto neto, el salto neto promediado H_n que es el que tendría una turbina de un solo inyector que con el caudal total, $Q = Q_1 + Q_2$, diese la misma potencia, es decir:



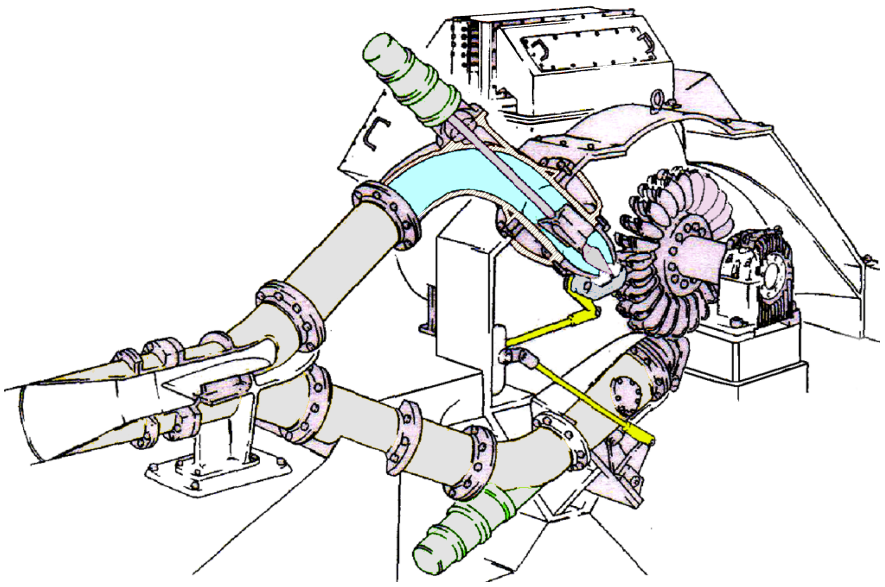


Fig III.7.- Turbina Pelton de dos inyectores

$$\gamma\ Q_1\ H_{n1} + \gamma\ Q_2\ H_{n2} = \gamma\ (Q_1 + Q_2\ )\ H_n = \gamma\ Q\ H_n$$

$$H_n = \frac{Q_1\,(\,\frac{c_{01}^2}{2\,g} + \frac{p_{01}}{\gamma} + z_{01} - z_{a1}\,) + Q_2\,(\,\frac{c_{02}^2}{2\,g} + \frac{p_{02}}{\gamma} + z_{02} - z_{a2}\,)}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1 H_{n1} + Q_2 H_{n2}}{Q}$$

que se puede ampliar fácilmente para una turbina de eje horizontal y cualquier número de inyectores.

Si la turbina fuese de eje vertical, las expresiones se simplifican, $H_{n1} = H_{n2} = ...$, sobre todo, en el caso de tener los inyectores la misma sección, $Q_1 = Q_2 = ...$, caso cada día más frecuente.

III.3.- TRIÁNGULOS DE VELOCIDADES

En la turbina Pelton, el chorro con velocidad absoluta $\vec{c}_1$ golpea simétricamente a la arista mediana de la cazoleta, dividiéndose en dos partes iguales y deslizándose sobre las dos mitades de la misma, saliendo desviados con una velocidad relativa $w_2 = \psi\ w_1$, y ángulo de salida $\beta_2 = 180^o$.

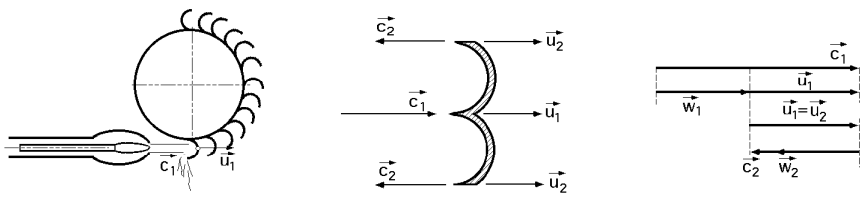


Fig III.8.- Triángulos de velocidades

En la práctica, el ángulo a la entrada del rodete $\beta_1 = 0$, aunque se desprecie la componente de choque motivada por tal circunstancia; los diámetros de la rueda a la entrada y salida son iguales, por lo que las velocidades $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ también lo serán.

Si: $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 180^o$, las velocidades $\vec{c}_1$ y $\vec{u}_1$ están en la misma dirección, al igual que $\vec{c}_2$ y $\vec{u}_2$, deduciéndose:

$c_1 = c_{1n}$; $c_2 = c_{2n} <<$

Como: $p_1 = p_{atm} \Rightarrow \begin{cases} c_{1t} = \sqrt{2\,g\,H_d} = \sqrt{2\,g\,H_n} & \textit{(sin rozamiento en el inyector)} \\ c_1 = \varphi_1\, c_{1t} = \varphi_1 \sqrt{2\,g\,H_d} = \varphi_1 \sqrt{2\,g\,H_n} & \textit{(con rozamiento en el inyector)} \end{cases}$

la altura de carga del distribuidor se utiliza íntegramente en producir la velocidad de entrada $\vec{c}_1$.

Velocidad $\vec{c}_2$ a la salida:

$$c_2^2 = w_2^2 + u_2^2 - 2\,u_2\,w_2\,\cos\beta_2 = w_2^2 + u_2^2 + 2\,w_2\,u_2 - 2\,w_2\,u_2 - 2\,u_2\,w_2\,\cos\beta_2 =$$

$$= (w_2 - u_2)^2 + 2\,w_2\,u_2\,(1 - \cos\beta_2) = (w_2 - u_2)^2 + 4\,w_2\,u_2\,\operatorname{sen}^2\frac{\beta_2}{2} = \left\{w_2 \approx u_2\right\} = 4\,u_2^2\,\operatorname{sen}^2\frac{\beta_2}{2}$$

$$c_2 = 2\,u_2\,\operatorname{sen}\frac{\beta_2}{2}$$

Rendimiento máximo, para $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 180^o$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = u_1 + w_1 \\ c_2 = u_2 - w_2 = u_1 - \psi\,w_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 - c_2 = w_1(1+\psi) = (c_1 - u_1)(1+\psi) \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \lambda_1(1+\psi) = (\varphi_1 - \xi_1)(1+\psi) \end{array}\right.$$

$$\eta_{hid} = \frac{c_1\,u_1\cos\alpha_1 - c_2\,u_2\cos\alpha_2}{g\,H_n} = \left| \begin{array}{c} \alpha_1 = 0^o;\ \alpha_2 = 180^o \\ \xi_1 = \xi_2 \end{array} \right| = 2\,\xi_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\,\xi_1(\varphi_1 - \xi_1)(1+\psi) =$$

$$= 2\,(\xi_1\,\varphi_1 - \xi_1^2)(1+\psi)$$

siendo la condición de rendimiento hidráulico máximo teórico:

$$\frac{\partial\eta_{hid}}{\partial\xi_1} = 2\,(\varphi_1 - 2\,\xi_1)(1+\psi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = \frac{\varphi_1}{2} \quad ; \quad u_1 = \frac{c_1}{2} \quad ; \quad \frac{u_1}{c_1} = 0{,}5$$

resultando:

$$\eta_{hid_{máx}} = 2\,(\xi_1\,\varphi_1 - \xi_1^2)(1+\psi) = 2\,(\frac{\varphi_1^2}{2} - \frac{\varphi_1^2}{4})(1+\psi) = \frac{\varphi_1^2}{2}(1+\psi)$$

En la práctica la relación cinemática es menor:

$$c_1 = \varphi_1\sqrt{2\,g\,H_n} = \left| H_n = \frac{c_1\,u_1}{g\,\eta_{hid_{máx}}} \right| = \varphi_1\sqrt{2\,\frac{c_1\,u_1}{\eta_{hid_{máx}}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_1}{c_1} = \frac{\eta_{hid_{máx}}}{2\,\varphi_1^2} < 0{,}5$$

y dado que el salto H_n es fijo y $\vec{c}_1$ conocida, parece interesante determinar la velocidad tangencial $\vec{u}_1$ de la rueda que proporciona el nº de rpm correspondiente al rendimiento máximo.

Las pérdidas en el inyector son: $h_d = \frac{c_{1t}^2 - c_1^2}{2\,g} = \frac{\frac{c_1^2}{\varphi_1^2} - c_1^2}{2\,g} = \frac{c_1^2(1-\varphi_1^2)}{2\,g\,\varphi_1^2} = H_n(1-\varphi_1^2) = H_n - \frac{c_1^2}{2\,g}$

Para reducir las pérdidas a la salida de la turbina, los valores de la velocidad relativa $\vec{w}_2$ y cir-

cunferencial $\vec{u}_2$ deberían estar muy próximas y ser el ángulo constructivo de los álabes β_2 muy pequeño.

Relación entre el diámetro de la rueda D el diámetro del chorro d y el nº específico de revoluciones n_s para la turbina Pelton de un inyector.- Sustituyendo en n_s los valores de Q, N y n, se obtiene:

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \left| \begin{array}{l} Q = \frac{\pi\, d^2}{4}\, c_1 = \frac{\pi\, d^2}{4}\, \varphi_1 \sqrt{2\,g\,H_n} = 3{,}477\, \varphi_1\, d^2 \sqrt{H_n} \\ N = \frac{\gamma\, Q\, H_n \eta}{75} = \frac{\gamma\, \pi\, d^2 \varphi_1 \sqrt{2\,g}\, H_n^{3/2} \eta}{300} = 46{,}36\, d^2 \varphi_1\, H_n^{3/2} \eta \\ u_1 = \xi_1 \sqrt{2\,g\,H_n} = \frac{\pi\, D\, n}{60} \quad ; \quad n = \frac{60\, \xi_1 \sqrt{2\,g\,H_n}}{\pi\, D} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{60\, \xi_1 \sqrt{2\,g\,H_n}}{\pi\, D}\, \frac{1}{H_n^{5/4}} \sqrt{\frac{\gamma\, \pi\, d^2 \varphi_1 \sqrt{2\,g}\, H_n^{3/2} \eta}{300}} = 18{,}21\, \xi_1 \sqrt{\eta\, \varphi_1\, \gamma}\, \frac{d}{D}$$

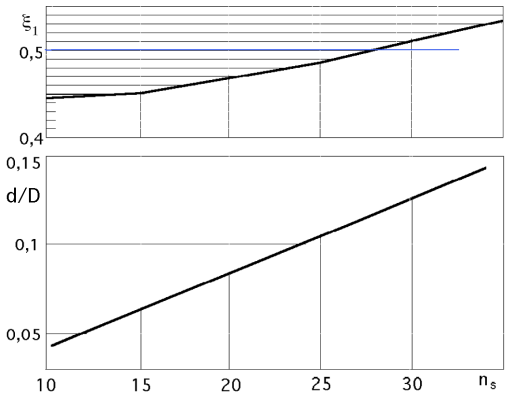


Fig III.9.- Valores de d/D, y ξ_1 en función de n_s

Para el agua: $\gamma = 1000\ kg/m^3 \Rightarrow n_s = 575{,}8\, \xi_1 \sqrt{\eta\, \varphi_1}\ \left(\frac{d}{D}\right)$

En la práctica, tomando valores medios:

$$\eta = 0{,}825\ ;\ \xi_1 = 0{,}48\ ;\ \varphi_1 = 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad n_s \simeq 248\, \frac{d}{D}$$

que es un resultado más que suficiente para empezar a diseñar.

De acuerdo con lo visto, n_s sólo puede variar con $\frac{d}{D}$ por cuanto φ_1 viene impuesto por un salto dado H_n y ξ_1 por la condición de rendimiento máximo $\eta_{máx}$. La relación $\frac{d}{D}$ viene limitada por razones de índole constructiva.

Si es pequeña, se tendría una rueda de gran diámetro con un chorro de pequeño diámetro, por lo que las cucharas serían muy pequeñas y al ser el chorro tan fino la potencia sería pequeña, por lo que al tener que mover una gran rueda y vencer grandes rozamientos, debido al peso del rodete, se obtendrían rendimientos muy bajos, que harían inutilizable la turbina.

Por el contrario, si $\frac{d}{D}$ es muy grande, implicaría cucharas muy grandes, por cuanto deberían recibir un chorro de gran diámetro en comparación con el de la rueda, presentándose dificultades inherentes al tamaño de las cucharas, que harían impracticable la turbina.

Experimentalmente se ha comprobado que los valores $\frac{d}{D}$ tienen que estar comprendidos entre los límites siguientes: $\frac{1}{200} < \frac{d}{D} < \frac{1}{7}$, que se corresponden con, $1{,}23 < n_s < 35$, aunque en la práctica en turbinas Pelton de un inyector se acepta: $5 < n_s < 30$.

Tabla III.1.- Parámetros de la turbina Pelton en función de la altura neta

Altura neta H_n (m)	*300*	*400*	*500*	*750*	*1000*
N° esp. revoluciones	*30-26,5*	*28,5-25,5*	*22,5-16,5*	*15,5-12,5*	*10,5*
Relación de diámetros, d/D	*0,125-0,085*	*0,106-0,077*	*0,094-0,069*	*0,065-0,052*	*0,044*
N° de cazoletas x	*17-20*	*18-21*	*18-23*	*24-28*	*27-31*
N° rev. reducido	*36,5-38,5*	*37-39*	*37,5-39,5*	*38-40*	*39,5*
Caudal reducido	*53-28,2*	*37,7-21,7*	*28,2-17,3*	*13,2-9,35*	*6,38*

III.4.- CAZOLETAS

Las cazoletas, en las versiones más modernas, tienen forma de elipsoide; la arista que las divide en dos puede quedar al ras de los bordes de las mismas, o a veces se queda algo adentro, como se observa en la Fig III.10. Las medidas se adoptan en función del diámetro del chorro, siendo los valores más favorables:

$$\begin{cases} \textit{Anchura de la cazoleta, } b = 3{,}75\ d \\ \textit{Altura de la cazoleta, } h = 3{,}50\ d \\ \textit{Profundidad de la cazoleta, } f = 1{,}50 \end{cases}$$

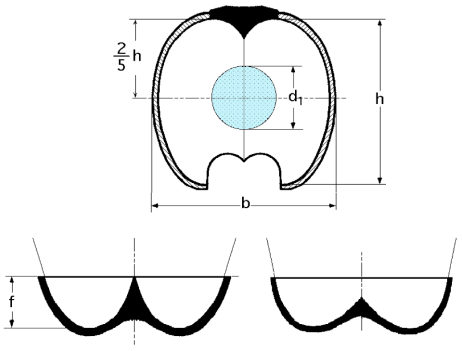


Fig III.10.- Forma de las cazoletas

Las cazoletas no se colocan exactamente en sentido radial, sino en forma tal que el chorro al alcanzar de lleno una de ellas, se halle perpendicular a la arista de la misma, quedando separada la cazoleta del inyector, el mínimo que permita la construcción, atacándola el chorro lo más cerca posible de la corona del rodete, para que las pérdidas a la salida resulten más pequeñas, haciendo que la circunferencia tangente al chorro (circunferencia Pelton), corte a las cazoletas a $\frac{2h}{5}$ medido desde el interior.

Las cazoletas tienen que ir dispuestas de tal forma, que su separación no permita que se pierda agua, es decir, cuando el chorro abandone una, debe encontrarse con la siguiente, Fig III.11.

La cazoleta en la posición (a) entra en contacto con el agua, en la (b) está en un punto intermedio, de forma que capta una parte del chorro, y en la (c) capta todo el chorro. El tiempo que tardaría una partícula ficticia de agua en recorrer el espacio (AF) sería el mismo que tardaría el borde de la cazoleta en recorrer el espacio (AE), por lo que: $t = \dfrac{\overline{AF}}{c_1} = \dfrac{\overline{AE}}{u}$

Para que el filete líquido extremo que no es recogido por la cazoleta en E_1 pueda ser utilizado, tiene que alcanzar a la cazoleta siguiente E_2 separada de la E_1 por el paso t.

En el caso límite en que el chorro encuentra a la cazoleta en el punto B, el chorro que tiene una velocidad $\vec{c}_1$ necesitaría recorrer el espacio $(\overline{E_1B})$, mientras que el borde de la cazoleta E_2 a la velocidad tangencial $\vec{u}$ debería recorrer el arco $(\overline{E_2B})$, siendo el tiempo empleado en recorrer dichos espacios el mismo:

$$Tiempo = \frac{\overline{E_1B}}{c_1} = \frac{\overline{E_2B}}{u}$$

y en la construcción de los rodetes habrá que escoger un paso t atendiendo a esta circunstancia, de modo que, en lo posible, se cumpla: $\frac{\overline{E_1B}}{c_1} < \frac{\overline{E_2B}}{u}$

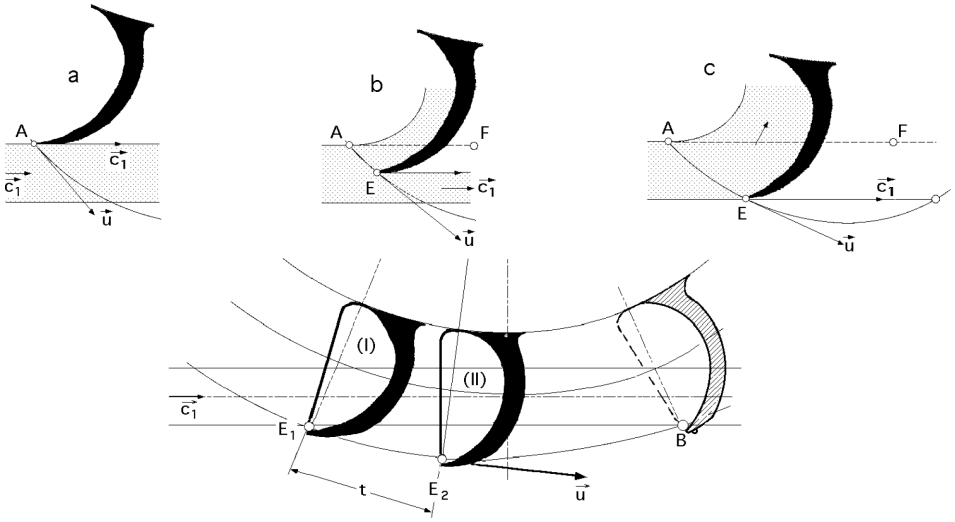


Fig III.11.- Separación entre cazoletas

El diámetro exterior de la rueda incluyendo las cazoletas es:

$$D_a = D + 2\,\frac{3}{5}\,h = D + \frac{6}{5}\,h$$

y si se elige un paso t_a igual a la altura h, $(t_a \approx h)$, lo que se corresponde, aproximadamente, con los tipos normales, el número x de cazoletas es:

$$x = \frac{\pi\, D_a}{t_a} = (D + \frac{6}{5}\,h)\,\frac{\pi}{t_a}$$

debiéndose comprobar si el agua puede pasar de una cazoleta a otra sin ser utilizada.

Tabla III.2.- N° de cazoletas en función de n_s

N° esp. revoluciones	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*	*18*	*22*	*26*	*32*
N° de cazoletas x	*40*	*37*	*34*	*30*	*28*	*26*	*22*	*20*	*17*	*15*

Una fórmula empírica (Zaygun) permite obtener aproximadamente el número de cazoletas:

$$x = 15 + \frac{D}{2\,d},\ \text{válida en el intervalo},\ 6{,}5 > \frac{D}{d} > 5$$

Fuerzas que actúan sobre las cazoletas.- Si se supone que el rodete se para durante un instante, (o en el instante del arranque), una cazoleta recibe el chorro de agua en choque directo; la fuerza tangencial F que éste ejerce sobre la cazoleta es:

$$F = \frac{\gamma\, Q}{g}\,(c_1\ cos\ \alpha_1 - c_2\ cos\ \alpha_2) = \left|\ \alpha_1 = 0\ ;\ c_2 \to 0\ \right| = \frac{\gamma\, Q\, c_1}{g} \quad \Rightarrow \quad C_{arranque} = \frac{\gamma\, Q\, c_1}{g}\,\frac{D_p}{2}$$

mientras que si la turbina está en movimiento, la fuerza a que están sometidas las cazoletas de un modo constante, incluso en forma de choques, es:

$$X = \frac{\gamma\, Q}{g}\,(w_1\ cos\ \beta_1 - w_2\ cos\ \beta_2\ ) = \left| \begin{array}{c} w_2 = \psi\ w_1 \\ \beta_1 = 0^o\ ;\ \beta_2 = 180^o \end{array} \right| = \frac{\gamma\, Q\, w_1 (1 + \psi\,)}{g} = \frac{\gamma\, Q\, (c_1 - u_1\,)\,(1 + \psi\,)}{g}$$

viniendo Q influenciado por el η_{vol} .

La potencia generada es: $N_{ef} = \dfrac{\gamma\, Q\, (c_1 - u_1\,)\,(1\ +\ \psi\,)}{g}\ u_1$

El par motor es: $C = \dfrac{N}{w} = \dfrac{N_{ef}}{w}\ \eta_{mec} = F\ \dfrac{D_p}{2}\ \eta_{mec} = \dfrac{\gamma\, Q\, (c_1 - u_1\,)\,(1\ +\ \psi\,)}{g}\ \dfrac{D_p}{2}\ \eta_{mec}$

y se comprueba que el par de arranque, para $(u_1 = 0\ ;\ \psi = 0)$, es:

$$C_{arranque} = \frac{\gamma\, Q\, D_p}{2\, g}\ c_1\ \eta_{mec}$$

La fuerza radial centrífuga es considerablemente mayor que la fuerza tangencial *F*, alcanzando su valor máximo cuando la turbina se embala, es decir, cuando su número de revoluciones sube a 1,8 veces el de régimen. En esta situación, si el peso de cada cazoleta es *G*, con $(n_{emb} = 1{,}8\ n)$ la fuerza radial centrífuga por cazoleta es:

$$F_{cent.\ para\ n_{emb}} = \frac{G}{g}\ \frac{u_{emb}^2}{R_p} = \frac{G\, R_p\ w_{emb}^2}{g} = \frac{G\, R_p\ (\pi\ n_{emb}\,)^2}{900\, g} = \frac{G\, R_p\ (1{,}8\ \pi\ n)^2}{900\, g} = 0{,}001813\ G\, D_p n^2\ )\ \ kg$$

que es bastante mayor que *F* y que ha de ser contrarrestada por la resistencia a la cortadura del sistema de sujeción de la cazoleta a la rueda.

III.5.- CURVAS CARACTERÍSTICAS CON SALTO CONSTANTE

Si las turbinas Pelton funcionan prácticamente con una altura de salto constante, las características de caudal, potencia, par y rendimiento, se pueden poner en función del *número de revoluciones n*, o lo que es lo mismo, en función de ξ_1 , es decir:

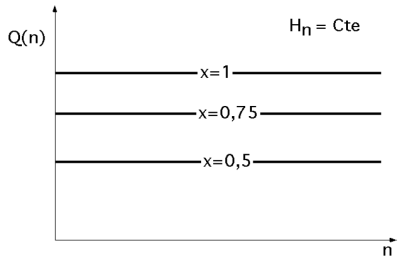


Fig III.12
Curvas Q(n) para diversos grados de apertura ***x***

$$u_1 = \xi_1 \sqrt{2\ g\ H_n} = \frac{\pi\ D\ n}{60}\ \ ;\ \ n = \frac{60}{\pi\ D}\ \xi_1 \sqrt{2\ g\ H_n}$$

Para el caudal, si H_n es constante, la velocidad del chorro $c_1 = \varphi_1 \sqrt{2\, g\, H_n}$ será también constante; para una determinada abertura del inyector correspondiente a una posición

$x = Cte$ de la aguja se tiene un chorro de sección: $\Omega = \dfrac{\pi\, d^2}{4}$, por lo que:

$$Q = \Omega\ c_1 = \Omega\ \varphi_1 \sqrt{2\, g\, H_n} = \frac{\pi\, d^2}{4}\ \varphi_1 \sqrt{2\, g\, H_n} = 3{,}477\ \varphi_1\ d^2 \sqrt{H_n} = Cte$$

Para la *potencia* resulta:

$$N = \frac{\gamma\, Q\, H_n \eta}{75} = \left| \eta_{hid} = 2\, \xi_1 (\varphi_1 - \xi_1)(1 + \psi) \right| =$$

$$= \frac{2\, \gamma\, Q\, H_n}{75}\, \xi_1 (\varphi_1 - \xi_1)(1 + \psi)\, \eta_{mec} = \frac{2\, \gamma\, Q\, H_n}{75}\, \varphi_1^2 \{ \frac{\xi_1}{\varphi_1} - (\frac{\xi_1}{\varphi_1})^2 \} (1 + \psi)\, \eta_{mec}$$

Para H_n = Cte, el caudal es constante para una determinada abertura del inyector, x = Cte, y la ecuación anterior es una parábola que pasa por el origen, Fig III.13, y por el punto definido por $\frac{\xi_1}{\varphi_1} = 1$; en este punto $(c_1 = u_1)$ y la velocidad relativa $(w_1 = c_1 - u)$ será nula, no empujando el agua a la cazoleta (velocidad de embalamiento).

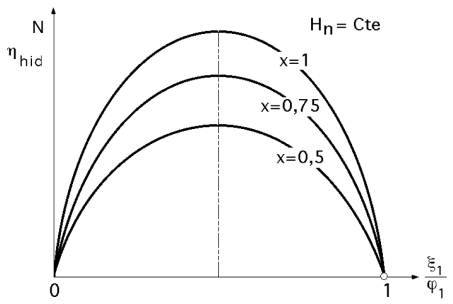


Fig III.13.- Curvas de potencia y rendimiento

La potencia máxima se obtiene para: $\frac{\xi_1}{\varphi_1} = \frac{\eta_h}{2\, \varphi_1^2}$; teóricamente, para: $\frac{\xi_1}{\varphi_1} = 0{,}5$

Se observa que los valores máximos para admisión total o parcial se corresponden para un mismo valor de la abscisa.

El *rendimiento hidráulico* es: $\eta_{hid} = 2\, (\varphi_1\, \xi_1 - \xi_1^2)(1 + \psi) = 2\, \varphi_1^2 \{ \frac{\xi_1}{\varphi_1} - (\frac{\xi_1}{\varphi_1})^2 \} (1 + \psi)$

que es una parábola que pasa por el origen y por el punto $\frac{\xi_1}{\varphi_1} = 1$, con un máximo teórico para $\frac{\xi_1}{\varphi_1} = 0{,}5$

El *par motor* es: $C = \frac{30\, N}{\pi\, n} = \frac{30}{\pi}\, \frac{\frac{2\, \gamma\, Q\, H_n}{75} (\varphi_1\, \xi_1 - \xi_1^2)(1 + \psi)}{\frac{60\, \xi_1 \sqrt{2\, g\, H_n}}{\pi\, D}}\, \eta_{mec} =$

$$= 0{,}003\, Q\, \sqrt{H_n}\, D\, \varphi_1 (1 - \frac{\xi_1}{\varphi_1})(1 + \psi)\, \eta_{mec} = B\, (1 - \frac{\xi_1}{\varphi_1})$$

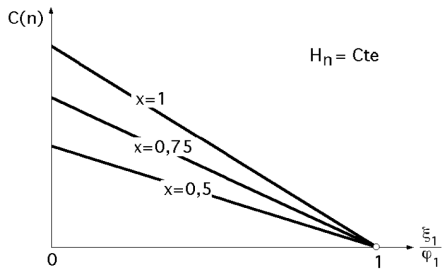


Fig III.14.- Curvas de par motor

que es la ecuación de una recta que se corresponde con una determinada apertura del inyector.

El *par de arranque* es: $C_{arranque} = 0{,}003\, Q\, \sqrt{H_n}\, D\, \varphi_1 (1 + \psi)\, \eta_{mec}$

Para diversas aperturas se obtienen una serie de rectas que tienen en común el punto $\frac{\xi_1}{\varphi_1} = 1$, es decir, la velocidad periférica del rodete es igual a la velocidad del chorro $(u = c_1)$, o lo que es lo mismo, la velocidad de embalamiento u_{emb}, aunque en la práctica ésta es algo menor.

El *par, potencia y rendimiento*, se anulan simultáneamente para la velocidad de embalamiento, (punto de ordenada nula). Las curvas *C(n)* son de gran interés para el estudio de la regulación y el

acoplamiento mecánico de la turbina y el alternador.

La ordenada en el origen es el par de arranque y su valor es, aproximadamente, el doble que el de régimen, lo que permite el arranque en carga cuando el par resistente en el arranque es mayor que el de régimen.

III.5.- TURBINA PELTON UNIDAD

SEMEJANZA.- Si se considera una turbina Pelton unidad en la que: $\begin{cases} H_{n_{11}} = 1\ m \\ D_{2_{(11)}} = D_{1_{(11)}} = D_{11} = 1\ m \end{cases}$, y una turbina semejante de diámetro D, la relación de semejanza es: $\lambda = \dfrac{D}{D_{11}} = D$, y las fórmulas de semejanza se pueden poner en la forma:

$$\sqrt{\frac{H_n}{H_{n_{11}}}} = \frac{n\,D}{n_{11}\,D_{11}} = \frac{n}{n_{11}}\,\lambda \quad ; \quad n_{11} = \frac{n\,\lambda}{\sqrt{H_n}} = \frac{n\,D}{\sqrt{H_n}} \quad ; \quad n = n_{11}\,\frac{\sqrt{H_n}}{D}$$

$$Q = Q_{11}\,D^2\sqrt{H_n} \quad ; \quad Q_{11} = \frac{Q}{D^2\sqrt{H_n}} \quad ; \quad N_{11} = \frac{N}{D^2\sqrt{H_n^3}} \quad ; \quad C_{11} = \frac{C}{D^3 H_n}$$

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{n_{11}\sqrt{H_n}}{D}\,\sqrt{N_{11}}\,D\,H_n^{3/4}\,\frac{1}{H_n^{5/4}} = n_{11}\sqrt{N_{11}} \quad \Rightarrow \quad n_{11} = \frac{n_s}{\sqrt{N_{11}}} = \frac{n\,D}{\sqrt{H_n}}$$

Para los distintos valores del grado de apertura x del inyector se obtienen diversas familias de curvas, Fig III.15.

Caudal

$$Q_{11} = \frac{Q}{D^2\sqrt{H_n}} = \left| \; Q = 3{,}477\,\varphi_1\,d^2\sqrt{H_n} \; \right| = 3{,}477\,\varphi_1\,\frac{d^2}{D^2}$$

que son rectas paralelas al eje de abscisas, como ya sabíamos, Fig III.15, por cuanto son independientes de n_{11}, y constantes para cada tipo de turbina, y grado de apertura del inyector.

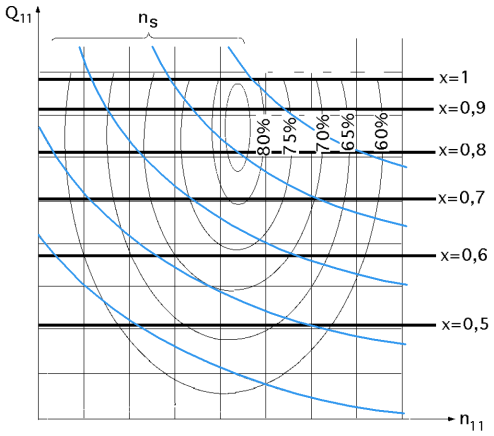


Fig III.15.- Curvas características de caudal

Par motor

$$C_{11} = \frac{C}{H_n D^3} = \left| \begin{array}{c} Q = 3{,}477\ \varphi_1\ d^2 \sqrt{H_n} \quad ; \quad n = n_{11} \dfrac{\sqrt{H_n}}{D} \\ C = \dfrac{\gamma\ Q (c_1 - u_1)(1+\psi)}{g}\ \dfrac{D}{2}\ \eta_{mec} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\dfrac{\gamma\ Q\ (c_1 - u_1)(1+\psi)}{g}\ \dfrac{D}{2}\ \eta_{mec}}{H_n D^3} = \frac{\gamma\ 3{,}477\ \varphi_1\ d^2 \sqrt{H_n}\ (c_1 - u_1)(1+\psi)\ \eta_{mec}}{2\ g\ H_n D^2} =$$

$$= \frac{\gamma\ 3{,}477\ \varphi_1\ d^2 \sqrt{H_n}\ (\varphi_1 \sqrt{2\,g\,H_n} - \dfrac{D\ \pi\ n}{60})(1+\psi)\ \eta_{mec}}{2\,g\,H_n D^2} = \frac{\gamma\ 3{,}477\ \varphi_1\ d^2 \sqrt{H_n}\ (\varphi_1 \sqrt{2\,g\,H_n} - \dfrac{D\ \pi\ n_{11} \dfrac{\sqrt{H_n}}{D}}{60})(1+\psi)\ \eta_{mec}}{2\,g\,H_n D^2} =$$

$$= \frac{177{,}4\ \varphi_1\ d^2}{D^2} (\varphi_1 \sqrt{2\,g} - \frac{\pi\ n_{11}}{60})(1+\psi)\ \eta_{mec} = (\frac{785{,}4\ \varphi_1^2\ d^2}{D^2} - \frac{9{,}28\ \varphi_1\ d^2}{D^2}\ n_{11})(1+\psi)\ \eta_{mec} = A^* - B^* n_{11}$$

El par de arranque es el valor máximo del par: $C_{11(máx)} = \dfrac{785{,}4\ \varphi_1^2\ d^2}{D^2}\ (1+\psi)$

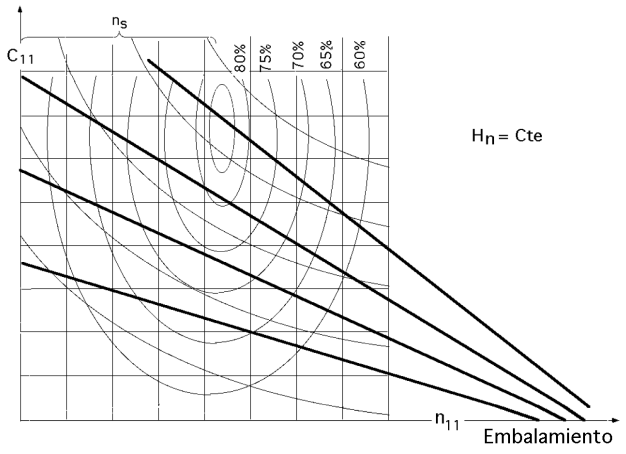


Fig III.16.- Curvas características de par motor

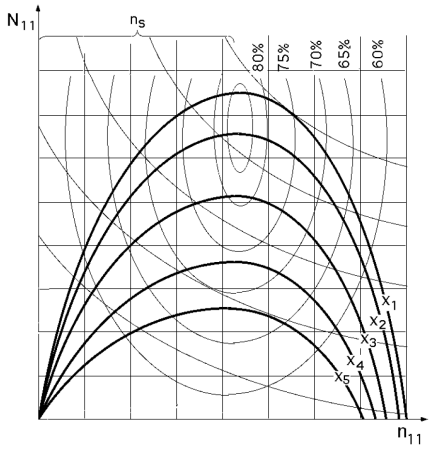


Fig III.17.- Curvas características de potencia

El par motor $C_{11} = 0$ para la velocidad de embalamiento ($u_{11} = c_{11}$):

$$c_{11} = u_{11} = \frac{\pi\ D_{11}\ n_{11(emb)}}{60} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 \sqrt{2\,g} = \frac{\pi\ n_{11(emb)}}{60} \quad ; \quad n_{11(emb)} = \frac{60\ \varphi_1 \sqrt{2\,g}}{\pi} = 84{,}55\ \varphi_1$$

por lo que las rectas de mínima apertura presentan una velocidad de embalamiento más pequeña.

Potencia: $N_{11} = C_{11} \dfrac{\pi\ n_{11}}{30} = (\dfrac{785{,}4\ \varphi_1^2\ d^2}{D^2} - \dfrac{9{,}28\ \varphi_1\ d^2}{D^2}\ n_{11})(1+\psi)\ \eta_{mec} \dfrac{\pi\ n_{11}}{30} = A_1\ n_{11} - B_1\ n_{11}^2$

siendo:
$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{785{,}4\ \varphi_1^2\ d^2}{D^2}\ (1+\psi)\ \eta_{mec}\ \dfrac{\pi}{30} = \dfrac{82{,}25\ \varphi_1^2\ d^2}{D^2} (1+\psi)\ \eta_{mec} \\ B_1 = \dfrac{9{,}28\ \varphi_1\ d^2}{D^2}\ (1+\psi)\ \eta_{mec}\ \dfrac{\pi}{30} = 0{,}97\ \varphi_1 \dfrac{d^2}{D^2}\ (1+\psi)\ \eta_{mec} \end{cases}$$

El punto de potencia máxima se obtiene haciendo $\frac{dN_{11}}{dn_{11}} = 0$

$$A_1 - 2\,B_1\,n_{11} = 0 \quad ; \quad \frac{82{,}25\,\varphi_1^2\,d^2}{D^2}\,(1+\psi)\,\eta_{mec} - 2 \times 0{,}97\,\varphi_1\,\frac{d^2}{D^2}\,(1+\psi)\,\eta_{mec}\,n_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{11} = 42{,}4\,\varphi_1$$

válida para cualquier valor de ψ y que coincide con la mitad de la velocidad de embalamiento, desplazándose estos vértices hacia el origen a medida que disminuye el grado de apertura.

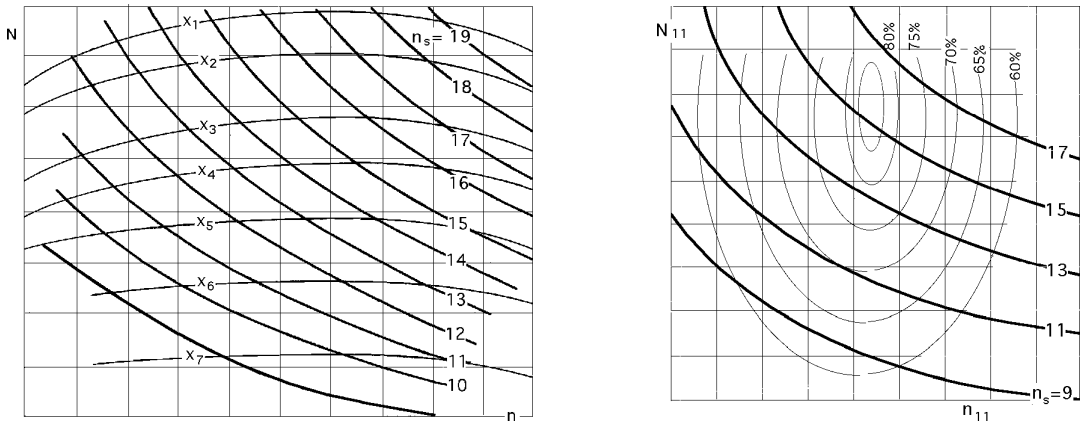


Fig III.18.- Curvas de igual velocidad específica

Curvas de igual velocidad específica

$$n_s = n_{11}\sqrt{N_{11}} = \sqrt{A_1\,n_{11}^3 - B_1\,n_{11}^4}$$

Su valor máximo se obtiene para:

$$3\,A_1\,n_{11}^2 - 4\,B_1\,n_{11}^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{11(máx)} = \frac{3\,A_1}{4\,B_1} = 63{,}23\,\varphi_1$$

$$n_{s(máx)} = \sqrt{A_1\,n_{11(máx)}^3 - B_1\,n_{11(máx)}^4} = \sqrt{82{,}25\,\varphi_1^2\,\frac{d^2}{D^2}\,n_{11(máx)}^3 - 0{,}97\,\varphi_1\,\frac{d^2}{D^2}\,n_{11(máx)}^4}\;\sqrt{(1+\psi)\,\eta_{mec}} =$$

$$= \sqrt{82{,}25\,\varphi_1^2\,\frac{d^2}{D^2}\,(63{,}23\,\varphi_1)^2 - 0{,}97\,\varphi_1\,\frac{d^2}{D^2}\,(63{,}23\,\varphi_1)^4}\;\sqrt{(1+\psi)\,\eta_{mec}} = 570\,\sqrt{\varphi_1^5\,(1+\psi)\,\eta_{mec}}\;\frac{d}{D}$$

III.7.- COLINA DE RENDIMIENTOS

Las curvas características anteriormente estudiadas, determinan en cada uno de sus puntos un valor del rendimiento, cuya representación gráfica se obtiene mediante una serie de ordenadas perpendiculares a la curva característica; el conjunto de estas ordenadas proporciona unas superficies de rendimientos de la forma:

$$f(\eta, Q, n) = 0 \quad ; \quad F(\eta, C, n) = 0 \quad ; \quad \xi(\eta, N, n) = 0$$

que, a su vez, se pueden representar en los planos: *(Q, n), (C, n) ó (N, n)*, mediante curvas de igual

rendimiento, que no son otra cosa que las proyecciones, sobre dichos planos, de las sucesivas secciones originadas por la intersección de planos paralelos a las mismas de $\eta = Cte$, con las superficies de rendimientos correspondientes; las líneas de nivel, son líneas de igual rendimiento.

En la turbina Pelton, el punto de máximo rendimiento no se corresponde con la apertura completa del inyector, Fig III.15; si la velocidad es grande, el rendimiento disminuye debido a que parte del agua pasa por la turbina, escapándose del rodete sin producir ningún trabajo, haciendo que el rendimiento volumétrico disminuya rápidamente. Esta disminución se hace mucho más ostensible a partir de un cierto valor de la velocidad, por cuanto el chorro podría llegar a incidir sobre el dorso de la pala, frenándola.

Dentro de los valores de apertura del inyector que mantienen un alto rendimiento del mismo, los rendimientos dependen sólo de la velocidad de giro, y vienen representados por líneas casi rectas, sensiblemente paralelas al eje de ordenadas, dispuestas casi simétricamente respecto al punto de máximo rendimiento.

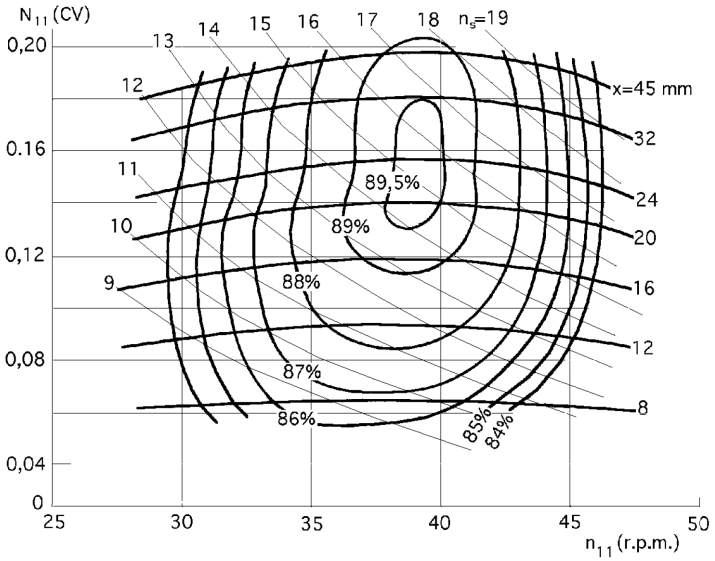


Fig III.19.- Colina de rendimientos

Para aperturas pequeñas del inyector el rendimiento del mismo baja mucho por cuanto φ_1 es pequeño, cerrándose las curvas de igual rendimiento por su parte inferior. El rendimiento de la turbina Pelton cuando está poco afectada por la variación de potencia, es muy sensible a las variaciones de velocidad n, confirmándose el trazado parabólico de las características de potencia para cada apertura y el trazado rectilíneo y vertical de las líneas de igual rendimiento, que se cierran por abajo para aperturas pequeñas.

En el caso que se expone en la Fig III.19, la colina de rendimientos presenta unas líneas paralelas al eje de ordenadas, deduciéndose de ésto que la turbina que funcione con velocidad n_{11} constante se acomoda mal a cualquier variación de la altura del salto, mientras que soportará bien fuertes variaciones de potencia y de caudal.

Tabla III.3.- Grandes turbinas Pelton, diseño Alstom, instaladas hasta 2012

Lugar	*Características*
Ji Sha (China), 2005	*2 x 61,5 MW Hooped Runner - Salto: 485 m.*
Daï Ninh (Vietnam), 2007	*2 x 153 MW - Salto: 627 m.*
Vishnupravag (India), 2006	*4 x 103 MW - Salto: 914 m*
Yele (China), 2000	*2 x 122.5 MW - Salto: 580 m.*

Para poder trabajar con mayor comodidad, una vez seleccionada la velocidad de funcionamiento

n_{11} se corta a la superficie de rendimientos por el plano correspondiente a esta velocidad, obteniéndose una gráfica (η, N_{11}) que permite conocer el comportamiento de la turbina trabajando con distintas cargas.

III.8.- RÉGIMEN TRANSITORIO

En el momento de apertura del inyector de la turbina Pelton, una cazoleta recibe el chorro de agua en choque directo; la fuerza que se ejerce sobre dicha cazoleta es:

$$F_0 = \frac{\gamma Q}{g} (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2) = \left| \alpha_1 = 0 \; ; \; c_2 \to 0 \right| = \frac{\gamma Q c_1}{g}$$

siendo α_1 el ángulo de ataque del chorro sobre la cazoleta y $\vec{c}_2$ la velocidad de salida del agua.

Si la turbina está en movimiento:

$$F = \frac{\gamma Q}{g} (w_1 \cos \beta_1 - w_2 \cos \beta_2) = \left| \begin{array}{c} w_2 = \psi w_1 \\ \beta_1 = 0 \; ; \; \beta_2 \simeq 180^o \end{array} \right| = \frac{\gamma Q w_1}{g} (1 + \psi)$$

en la que de acuerdo con los triángulos de velocidades a la entrada y a la salida de la turbina, β_1 y β_2 son ángulos constructivos de las cazoletas y $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ las velocidades relativas del agua a la entrada y salida; suponiendo que el coeficiente de reducción de velocidad $\psi = 1$, resulta:

$$F = \frac{2 \gamma Q}{g} (c_1 - u_1)$$

Para calcular el par $C = C_m - C_r$, hay que tener en cuenta que éste varía con la velocidad angular $\breve{w}$, y es igual al producto de la fuerza media F que se ejerce por el chorro de agua sobre las cazoletas multiplicada por el radio Pelton R_p, en la forma:

$$F = \frac{2 \gamma Q}{g} (c_1 - u_1) = \frac{2 \gamma Q}{g} (c_1 - R_p \breve{w}) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2 \gamma Q}{g} (c_1 - R_p \breve{w}) R_p = \frac{2 \gamma Q R_p}{g} (c_1 - R_p \breve{w})$$

Cuando la turbina se embala el par motor es:

$$C = \frac{2 \gamma Q R_p}{g} (c_1 - R_p \breve{w})_{emb} = \left| c_1 = R_p \breve{w}_{emb} \right| = \frac{2 \gamma Q R_p^2}{g} (\breve{w}_{emb} - \breve{w}) = I \frac{d\breve{w}}{dt} = m r^2 \frac{d\breve{w}}{dt}$$

$$\frac{d\breve{w}}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}} = \frac{2 \gamma Q R_p^2}{g I} dt = \frac{2 \gamma Q}{g M} \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 dt$$

$$\ln \frac{\breve{w}_{emb} - \breve{w}}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_0} = - \frac{2 \gamma Q}{g M} \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 (t - t_0) = - \frac{2 \gamma Q}{g M} \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 t_{man}$$

$$\frac{\breve{w}_{emb} - \breve{w}}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_0} = \exp \left\{ - \frac{2 \gamma Q}{g M} \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 (t - t_0) \right\} = \exp \left(- \frac{t - t_0}{k^*} \right) = \exp \left(- \frac{t_{man}}{k^*} \right)$$

siendo t_{man} el tiempo de maniobra y k^* una constante temporal de la forma:

$$k^* = \frac{g\ M}{2\ \gamma\ Q}\ (\frac{r}{R_p})^2 = \frac{M}{2\ \rho\ Q}\ (\frac{r}{R_p})^2$$

en las que $\breve{w}_0$ es la velocidad angular de la turbina en régimen estacionario, tiempo t_0.

A título de ejemplo, vamos a considerar algunas situaciones en el funcionamiento de una turbina Pelton que utiliza un caudal nominal de Q = 12 m^3/seg y está conectada a un alternador, siendo M = 200 Tm la masa del grupo que tiene un radio de inercia: r = 0,55 R_p.

a) Si se supone que la turbina está parada, se abren los inyectores y se forma un chorro igual al 10% del valor maximal, el tiempo de maniobra necesario para que la turbina adquiera la velocidad óptima de régimen es:

$Q_1 = 0{,}1 \times 12\ (m^3/seg) = 1{,}2\ (m^3/seg)$

Para (t = t_0 = 0), la velocidad angular es, a turbina parada, $w_0 = 0$

Para (t = t) la velocidad de embalamiento de una turbina Pelton es, 1,8 w_0

$$k^* = \frac{M}{2\ r\ Q}\ (\frac{r}{R_p})^2 = \frac{200000\ kg}{2 \times 1000\ (kg/m^3) \times 1{,}2\ (m^3/seg)}\ 0{,}55^2 = 25{,}25\ seg$$

El tiempo t_{man} que la turbina tardará en alcanzar la velocidad nominal con el inyector al 10% es:

$$\frac{\breve{w}_{emb} - \frac{1}{1{,}8}\ \breve{w}_{emb}}{\breve{w}_{emb} - 0} = exp\ (-\ \frac{t_{man}}{25{,}25}) = 0{,}4444 \quad \Rightarrow \quad t_{man} = 20{,}27\ seg$$

b) Si la turbina funciona a potencia maximal (régimen estacionario), y se produce una disfunción en la red que anula bruscamente el par resistente del alternador, el tiempo de maniobra $t_{man(1)}$ necesario para que la velocidad del grupo se incremente en un 25% se calcula haciendo las siguientes consideraciones:

Velocidad angular en régimen estacionario: $\breve{w}_0 = \frac{\breve{w}_{emb}}{1{,}8}$

Velocidad angular con el 25% de sobrevelocidad en un tiempo t_1:

$$\breve{w}_1 = 1{,}25\ \breve{w}_0 = 1{,}25\ \frac{\breve{w}_{emb}}{1{,}8} = 0{,}694\ \breve{w}_{emb}$$

Tiempo $t_{man\ (1)}$ que la turbina tardará en alcanzar la sobrevelocidad del 25%:

$$k_1^* = \frac{M}{2\ \rho\ Q}\ (\frac{r}{R_p})^2 = \frac{200000\ kg}{2 \times 1000\ (kg/m^3) \times 12\ (m^3/seg)}\ 0{,}55^2 = 2{,}525\ seg$$

$$\frac{\breve{w}_{emb} - 0{,}694\ \breve{w}_{emb}}{\breve{w}_{emb} - \frac{\breve{w}_{emb}}{1{,}8}} = exp\ (-\ \frac{t_{man\ (1)}}{2{,}525}) = 0{,}6885 \quad \Rightarrow \quad t_{man\ (1)} = 0{,}94\ seg$$

c) Si en el instante en que se alcanza el 25% de sobrevelocidad se inicia el cierre total de los inyectores, que dura $t_{man(2)}$ = 20 segundos, y suponiendo durante el cierre una variación lineal del caudal respecto del tiem-

po, el aumento relativo de la velocidad angular en ese tiempo se calcula teniendo en cuenta que el caudal ya no es constante, pasando a ser de la forma:

$$Q = Q_0 \left(1 - \frac{t}{t_{man(2)}}\right) = Q_0 \left(1 - \frac{t}{20}\right)$$

quedando la ecuación del movimiento del grupo en la forma:

$$\frac{d\breve{w}}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}} = \frac{2\,\rho\,Q\,R_p^2}{I}\,dt = \frac{2\,\rho\,Q}{M}\left(\frac{R_p}{r}\right)^2\,dt = \frac{2\,\rho\,Q_0}{M}\left(\frac{R_p}{r}\right)^2\left(1 - \frac{t}{t_{man(2)}}\right)dt = \left(1 - \frac{t}{t_{man(2)}}\right)\frac{dt}{k_2^*}$$

$$\int_{w}^{w_2} \frac{d\breve{w}}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}} = ln\,\frac{\breve{w}_{emb} - \breve{w}}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_1} = -\left(t - \frac{t^2}{2\,t_{man(2)}}\right)\frac{1}{k_2^*}$$

Al cabo del tiempo de maniobra $t_{man(2)}$ se obtiene otra velocidad angular $\breve{w}_2$, tal que:

$$ln\,\frac{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_2}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_1} = -\left(t - \frac{t^2}{2\,t_2}\right)_{t_{man(2)}}\frac{1}{k_2^*} = \left(t_{man(2)} - \frac{t_{man(2)}^2}{2\,t_{man(2)}}\right)\frac{1}{k_2^*} = \frac{t_{man(2)}}{2\,k_2^*}$$

y sustituyendo los valores $\begin{cases} t_{2man(2)} = 20\ seg \\ k_{2^*} = 2{,}525\ seg \\ w_1 = 0{,}694\ w_{emb} \end{cases}$, resulta:

$$ln\,\frac{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_2}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_1} = ln\,\frac{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_2}{\breve{w}_{emb} - 0{,}694\,\breve{w}_{emb}} = -\frac{t_{man(2)}}{2\,k_2^*} = -\frac{20\ seg}{2\ x\ 2{,}525} = -3{,}96 \quad \Rightarrow \quad \breve{w}_2 = 0{,}994\,\breve{w}_{emb}$$

por lo que en esta situación el grupo adquiriría prácticamente la velocidad de embalamiento.

d) El tiempo de maniobra necesario para que la sobrevelocidad no sobrepasase el 50% de la velocidad de régimen se calcula en la forma:

Para $t_{mant(3)}$ la velocidad angular es: $\breve{w}_3 = 1{,}5\,\frac{\breve{w}_{emb}}{1{,}8} = 0{,}833\,\breve{w}_{emb}$

y el tiempo de maniobra:

$$ln\,\frac{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_3}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}_1} = ln\,\frac{\breve{w}_{emb} - 0{,}833\,\breve{w}_{emb}}{\breve{w}_{emb} - 0{,}694\,\breve{w}_{emb}} = -0{,}606 = -\frac{t_{man(3)}}{2\ x\ 2{,}525} \quad \Rightarrow \quad t_{man(3)} = 3{,}06\ seg$$

No se puede cortar el caudal tan rápido por parte de los inyectores, bajo pena de provocar el golpe de ariete en el conducto de alimentación de los mismos, por lo que en este caso habrá que desviar el chorro mediante un deflector.

e) Si se dispone de un contrachorro, que sabemos actúa en sentido contrario al movimiento, y que consume un caudal igual al 5% del maximal y admitiendo que la cara que las cazoletas presentan a éste contrachorro le desvían 90º, el tiempo $t_{man(4)}$ de acción del contrachorro necesario para asegurar el frenado de la turbina, en ausencia del chorro principal, se calcula como sigue:

$$F_{c.chorro} = -\frac{\gamma\,Q_{c.chorro}}{g}\,(c_1 + u_1)$$

$$C_{c.chorro} = -\frac{\gamma\ Q_{c.chorro}}{g}\ (c_1 + u_1)\ R_p = \left| \begin{array}{c} u_1 = R_p \breve{w} \\ c_1 = R_p \breve{w}_{emb} \end{array} \right| = -\frac{\gamma\ Q_{c.chorro}}{g}\ (\breve{w}_{emb} + \breve{w})\ R_p^2 =$$

$$= -\rho\ Q_{c.chorro}\ (\breve{w}_{emb} + \breve{w})\ R_p^2 = I\ \frac{d\breve{w}}{dt}$$

$$\frac{d\breve{w}}{\breve{w}_{emb} - \breve{w}} = \frac{-\rho\ Q_{c.chorro}\ R_p^2}{I}\ dt = \frac{-\rho\ Q_{c.chorro}}{M}\ (\frac{R_p}{r})^2 t_{man(4)}$$

$$ln\ \frac{\breve{w}_{emb} + \breve{w}_0}{\breve{w}_{emb} + \breve{w}} = \frac{\rho\ Q_{c.chorro}}{M}\ (\frac{R_p}{r})^2 t_{man(4)} = \frac{t_{man(4)}}{k_4^*} = \left| \begin{array}{l} Q_{c.chorro} = 0{,}05\ Q = 0{,}05 \times 12\ \frac{m^3}{seg} = 0{,}6\ \frac{m^3}{seg} \\ k_4^* = \frac{M\ r^2}{\rho\ Q_{c.chorro}\ R_p^2} = \frac{200000 \times 0{,}55}{1000 \times 0{,}6 \times 1^2} \end{array} \right| = \frac{t_{man(4)}}{100{,}83\ seg}$$

Si se frena después de la velocidad de régimen normal:

Para obtener una velocidad $\breve{w} = 0$ se necesita un tiempo $t_{man(4)}$ de forma que: $\breve{w}_0 = \frac{\breve{w}_{emb}}{1{,}8}$

$$ln\ \frac{\breve{w}_{emb} + \breve{w}_0}{\breve{w}_{emb}} = ln\ \frac{\breve{w}_{emb} + \frac{\breve{w}_{emb}}{1{,}8}}{\breve{w}_{emb}} = ln\ \frac{1{,}8 + 1}{1{,}8} = 0{,}4418 = \frac{t_{man(4)}}{100{,}83\ seg} \quad \Rightarrow \quad t_{man(4)} = 44{,}55\ seg$$

Si se frena cuando ha adquirido un exceso de velocidad que no sobrepase el 50% de la velocidad de régimen, el tiempo de maniobra para el frenado es:

$$t_{man(4)} = 100{,}83\ ln\ \frac{\breve{w}_{emb} + \breve{w}_0}{\breve{w}_{emb}} = \left| \breve{w}_0 = 1{,}5\ \frac{\breve{w}_{emb}}{1{,}8} = 0{,}833 \right| =$$

$$= 100{,}83\ ln\ \frac{\breve{w}_{emb} + 0{,}833\ \breve{w}_{emb}}{\breve{w}_{emb}} = 100{,}83\ ln\ 1{,}833 = 61{,}1\ seg$$