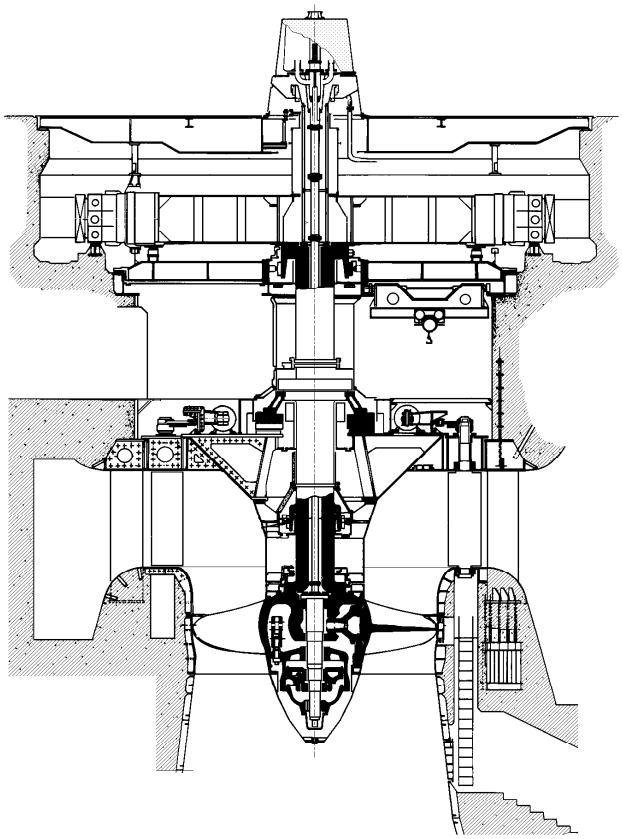
PROBLEMAS

DE

TURBINAS HIDRÁULICAS



Pedro Fernández Díez

pfernandezdiez.es

1.- Una turbina Pelton trabaja bajo una altura neta de 240 m.

Sus características son: $\varphi_1 = 0,98$; $\alpha_1 = 0$; $\beta_2 = 15^o$; $w_2 = 0,70\, w_1$; $u_1 = 0,45\, c_1$

Diámetro del chorro: $d_{chorro} = 150$ mm; Diámetro medio de la rueda : $D_1 = 1800$ mm

Determinar

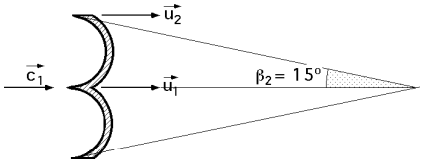
a) La fuerza tangencial ejercida por el chorro sobre las cucharas

b) La potencia desarrollada por la turbina y el par motor

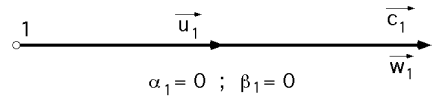
c) El rendimiento manométrico

d) El rendimiento global, siendo: $\eta_{mec} = 0,97$; $\eta_{vol} = 1$

RESOLUCIÓN

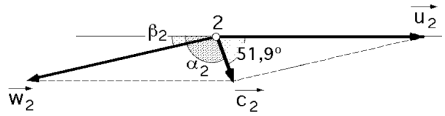


Tomamos como eje "x" la dirección de la velocidad circunferencial del rodete en el punto en que el eje del chorro corta a éste; la fuerza tangencial del chorro sobre las cucharas es igual y de signo contrario a la que el álabe ejerce sobre el fluido



Entrada

$$\begin{cases} c_1 = \varphi_1 \sqrt{2\, g\, H_n} = 0,98\ \sqrt{2\, g \times 240} = 67,22 \text{ m/seg} \\ u_1 = u_2 = 0,45 \times 67,22 = 30,25 \text{ m/seg} \ ; \ n = 321 \text{ rpm} \\ w_1 = c_1 - u_1 = 67,22 - 30,25 = 36,97 \text{m/seg} \end{cases}$$



Salida

$$\begin{cases} u_2 = u_1 = 30,25 \text{ m/seg} \\ w_2 = \psi\ w_1 = 0,70 \times 36,97 = 25,88 \text{ m/seg} \\ c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2\, u_2\, w_2 \cos\beta_2} = \\ \quad = \sqrt{30,252^2 + 25,882^2 - (2 \times 30,25 \times 25,88 \cos 15^o)} = 8,51 \text{m/seg} \end{cases}$$

$$w_2\ \text{sen}\,\beta_2 = c_2\ \text{sen}\,\varepsilon_2 \ ; \ \text{sen}\,\alpha_2 = \frac{w_2\ \text{sen}\,\beta_2}{c_2} = \frac{25,88 \times \text{sen}15^o}{8,51} = 0,7871 \ ; \ \alpha_2 = 51,9^o$$

a) Fuerza tangencial ejercida por el chorro sobre las cucharas

$$F_x = \frac{\gamma\ Q}{g}(w_1\ \cos\beta_1 - w_2\ \cos\beta_2) = \left| Q = c_1\ \Omega = 67,22\ \frac{m}{seg} \times \frac{\pi \times 0,15^2}{4}\ m^2 = 1,18787\ \frac{m^3}{seg} \right| =$$

$$= \frac{1000\ (kg/m^3) \times 1,18787\ (m^3/seg)}{9,8\ (m/seg^2)}\ (36,97 + 25)\ \frac{m}{seg} = 7511,5\ kg$$

b) Potencia desarrollada por la turbina (es la potencia efectiva)

$$N_{efec} = F_x\ u = 7511,5\ Kg \times 30,25\ \frac{m}{seg} = 227.222,87\ \frac{Kgm}{seg} = 3029,6\ CV$$

$$C = F_x \frac{D_P}{2} = 7511,5 \times 0,9 = 6760\ m.kg \quad \text{ó} \quad C = \frac{30\,N}{n\pi} = \frac{30 \times 227.222,87}{321\,\pi} = 2760\ m.kg$$

c) Rendimiento manométrico:

$$N_{efec} = \frac{\gamma\ Q\ H_n}{75}\ \eta_h \xrightarrow{\text{Como } \eta_{vol} = 1} \eta_{man} = \frac{75\ N_{ef}}{\gamma\ Q\ N_n} = \frac{75 \times 3029,6}{1000 \times 1,1878 \times 240} = 0,797 = 79,7\%$$

$$\eta_{hid} = \frac{H_{ef}}{H_n} = \left| 3029,6\ CV = \frac{1000 \times 1,1878 \times H_{ef}}{75} \ \Rightarrow \ H_{ef} = 191,3\ m \right| = \frac{191,3}{240} = 0,797 = 79,7\%$$

$$\text{ó} \quad \eta_{hid} = \frac{c_1 u_1 \cos\alpha_1 - c_2 u_2 \cos\alpha_2}{g\ H_n} = \frac{(67,22 \times 30,25) - (8,51 \times 30,25 \cos 51,9^o)}{240\ g} = 79,7\%$$

d) Rendimiento global, siendo el $\eta_{mec} = 0,97$: $\eta = 0,797 \times 0,97 = 0,773 = 77,3\%$

e) Potencia al freno.- La potencia al freno es la potencia útil

$$N = \frac{\gamma\, Q\, H_n}{75}\,\eta = \frac{1000 \times 1{,}1878 \times 240}{75}\,0{,}773 = 938 \text{ CV} \quad \text{ó} \quad N = \eta_{mec} N_{ef} = 0{,}97 \times 3029{,}6 \text{ CV} = 2938 \text{ CV}$$

****

2.- Se dispone de un aprovechamiento hidráulico con caudal constante en una corriente que fluye a 750 lit/seg; utiliza un salto neto H_n = 24 m con un grupo turboalternador en acoplamiento directo de 7 pares de polos, siendo el rendimiento global de la instalación del 86%, y absorbiendo el referido grupo la aportación diaria del caudal citado durante 4,5 horas ininterrumpidamente, a caudal constante.

Con el fin de incrementar la potencia del aprovechamiento hidráulico se incrementa el salto neto utilizado, y se acopla a la misma turbina otro alternador que sustituye al primero de 6 pares de polos.
Suponiendo que el rendimiento global no se modifica, se pide:

a) Potencia en CV del primer grupo, y caudal

b) Salto neto a utilizar en el nuevo grupo y nueva potencia

c) Número de horas ininterrumpidas de funcionamiento a caudal constante del nuevo grupo

d) Capacidad de regulación del embalse que necesita el nuevo grupo

---

RESOLUCIÓN

Como en las condiciones de funcionamiento el rendimiento se mantiene prácticamente uniforme, se pueden utilizar las fórmulas de semejanza. Se trata de una misma turbina ($I = 1$) con saltos variables

$$\sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} = \frac{n}{n'} = \frac{Q}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{N}{N'}} = \sqrt{\frac{C}{C'}}$$

a) Caudal que admite el primer grupo funcionando 4,5 horas diarias

Se sabe que el aprovechamiento hidráulico recibe un caudal diario de 750 l/seg, por lo que en 24 horas se tiene:

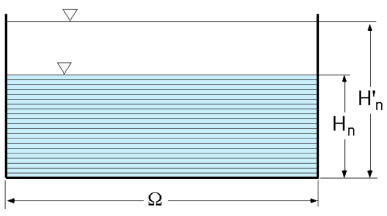
$$Q_{diario} = 750\,\frac{lit}{seg} \times 3600\,\frac{seg}{hora} \times 24\,\frac{horas}{día} = 64.800\,\frac{m^3}{día}$$

que son aprovechados totalmente por el grupo en 4,5 horas.

C***audal*** del primer grupo: $Q = \dfrac{64800\ (m^3/día)}{3600 \times 4{,}5\ (seg/día)} = 4\,\dfrac{m^3}{seg}$

Potencia del primer grupo: $N\ (CV) = \dfrac{\gamma\, Q\, H_n\, \eta}{75} = \dfrac{1000\ (kg/m^3) \times 4\ (m^3/seg) \times 24\ (m) \times 0{,}86}{75} = 1100{,}8 \text{ CV}$

b) Salto neto a utilizar en el nuevo grupo



Nº de revoluciones por minuto:

Para 7 pares de polos: $n = \dfrac{3000}{7} = 428{,}57$ rpm

Para 6 pares de polos: $n = \dfrac{3000}{6} = 500$ rpm

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} \quad ; \quad \frac{428{,}57}{500} = \sqrt{\frac{24}{H_n'}} \quad ; \quad H_n' = 32{,}66 \text{ m}$$

Nueva potencia: $\dfrac{n}{n'} = \sqrt[3]{\dfrac{N}{N'}} \Rightarrow \dfrac{428{,}57}{500} = \sqrt[3]{\dfrac{1100{,}8}{N'}} \Rightarrow N' = 1748 \text{ CV}$

c) Número de horas ininterrumpidas de funcionamiento a caudal constante Q' del nuevo grupo

$$\frac{n}{n'} = \frac{Q}{Q'} \Rightarrow Q' = Q\,\frac{n}{n'} = 4\,\frac{m^3}{seg}\,\frac{7}{6} = 4{,}7\,\frac{m^3}{seg} \Rightarrow 4{,}7\,x = 4 \times 4{,}5 = 18 \Rightarrow x = 3{,}8 \text{ horas}$$

d) Capacidad de regulación del embalse que necesita el nuevo grupo

Para 7 pares de polos: $(Capacidad) = \Omega \times H_n$; Para 6 pares de polos: $(Capacidad)' = \Omega \times H_n'$

$$\frac{(Capacidad)}{(Capacidad)'} = \frac{H_n}{H_n'} = \frac{24}{32{,}66} = 0{,}7348$$

$$(\text{Capacidad})' = \frac{H_n'}{H_n}\ (\text{Capacidad}) = \frac{1}{0{,}7348} = 1{,}364\ (\text{Capacidad})$$

****

3.- Elegir el tipo de turbina más conveniente para un salto H_n = 190 m, caudal q= 42 lit/seg, n = 1450 rpm y η_{man} = 0,825. Determinar, suponiendo que $\eta_{mec} = \eta_{vol} = 1$

a) Las nuevas características de la turbina para un salto neto de 115 m, conservando la misma admisión

b) Las nuevas características de una turbina semejante, geométricamente 3 veces más pequeña, que trabaje con el mismo salto de 190 m.

RESOLUCIÓN

a) Nuevas características de la turbina para un salto neto de 115 m, conservando la misma admisión

$$N = \frac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75} = \frac{1000\ (kg/m^3) \times 0{,}042\ (m^3/seg) \times 190\ m \times 0{,}825}{75} = 87{,}78\ CV$$

$$n_s = \frac{n\ \sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{1450\ \sqrt{87{,}78}}{190^{5/4}} = 19{,}25\ \text{(Pelton simple)}$$

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} \quad ; \quad n' = n\ \sqrt{\frac{H_n'}{H_n}} = 1450\ \sqrt{\frac{115}{190}} = 1128{,}1\ \text{r.p.m.}$$

$$\frac{Q}{Q'} = \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} \quad ; \quad Q' = Q\ \sqrt{\frac{H_n'}{H_n}} = 42\ \sqrt{\frac{115}{190}} = 32{,}67\ \frac{lit}{seg}$$

Nueva potencia: $\sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} = \sqrt[3]{\frac{N}{N'}} \quad \Rightarrow \quad N' = N\sqrt{(\frac{H_n'}{H_n})^3} = 87{,}78\ (\frac{115}{190})^{3/2} = 41{,}33\ CV$

b) Nuevas características de una turbina semejante, geométricamente 3 veces más pequeña, que trabaje con el mismo salto de 190 m.

Se tiene el mismo salto, con $\lambda = 3$

$$\sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} = 1 = \lambda\ \frac{n}{n'} = \frac{1}{\lambda^2}\ \frac{Q}{Q'} = \frac{1}{\lambda^{2/3}}\ (\frac{N}{N'})^{1/3}$$

$$1 = \frac{1}{\lambda^{2/3}}\ (\frac{N}{N´})^{1/3} \ ; \ (\frac{N}{N´})^{1/3} = \lambda^{2/3} \ ; \ \frac{N}{N´} = \lambda^2 \ ; \ N´ = \frac{N}{\lambda^2} = \frac{88}{9} = 9{,}77\ CV$$

$$Q´ = \frac{Q}{\lambda^2} = \frac{42}{9} = 4{,}66\ \frac{lit}{seg}$$

$$n´ = n\ \lambda = 1450 \times 3 = 4350\ \text{r.p.m.}$$

c) Para Z inyectores Pelton

$$n = n'\ \frac{1}{\lambda}\ \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} \quad ; \quad Q = Z\ Q'\ \lambda^2\ \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} \quad ; \quad N = Z\ N'\ \lambda^2\ (\frac{H_n}{H_n'})^{3/2} \quad ; \quad C = Z\ C'\ \lambda^3\ (\frac{H_n}{H_n'})$$

****

4.- Una turbina Pelton se elige para mover un alternador de 5 pares de polos en acoplamiento directo. El chorro de agua tiene un diámetro de 70 mm y una velocidad de 100 m/seg. El ángulo de la cuchara es de 170º; la relación de la velocidad tangencial del álabe a la velocidad del chorro es 0,47. Los coeficientes de reducción de velocidad: $\varphi_1 = 1$ y $\psi = 0{,}85$.

Determinar

a) Los triángulos de velocidades

b) El diámetro de la rueda en el centro de las cazoletas

c) La potencia desarrollada por la turbina y el par motor

d) La alturas neta y efectiva del salto, rendimiento manométrico, rendimiento manométrico máximo y nº

de revoluciones específico

e) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm de una turbina geométricamente semejante a la anterior, con relación de semejanza $\lambda = 2$, funcionando con el mismo salto

f) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm de una turbina geométricamente semejante a la anterior, con relación de semejanza $\lambda = 2$, funcionando con un salto de 1000 m

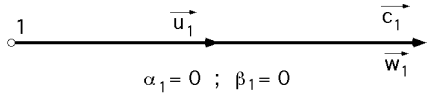
g) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm, $\lambda = 1$, para una turbina que tiene 4 inyectores de 50 mm de diámetro, con $c_1 = 100$ m/seg, funcionando con el salto del apartado (d)

h) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm, $\lambda = 1$, para una turbina que tiene 4 inyectores de 50 mm de diámetro, con $c_1 = 100$ m/seg, funcionando con un salto de 1000 m

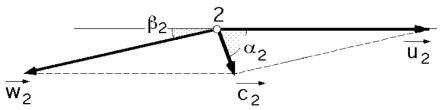
---

RESOLUCIÓN

a) Triángulos de velocidades



Entrada: $\begin{cases} c_1 = 100 \text{ m/seg} \\ u_1 / c_1 = 0{,}47 \ ; \ u_1 = 0{,}47 \times 100 = 47 \text{ m/seg} \\ w_1 = c_1 - u_1 = 100 - 47 = 53 \text{ m/seg} \end{cases}$



Salida: $\begin{cases} u_2 = u_1 = 47 \text{ m/seg} \\ w_2 = \psi \ w_1 = 0{,}85 \times 53 = 45{,}05 \text{ m/seg} \\ c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2 u_2 w_2 \cos \beta_2} = \end{cases}$

$$= \sqrt{47^2 + 45{,}05^2 - (2 \times 47 \times 45{,}05 \cos 10^\circ)} = 8{,}25 \text{ m/seg}$$

$$w_2 \ \text{sen} \ \beta_2 = c_2 \ \text{sen} \ \alpha_2 \quad ; \quad \text{sen} \ \alpha_2 = \frac{w_2 \ \text{sen} \ \beta_2}{c_2} = \frac{45{,}05 \times \text{sen} 10^\circ}{8{,}25} = 0{,}948 \ ; \ \alpha_2 = 71{,}48^\circ\text{C}$$

b) Diámetro de la rueda en el centro de las cazoletas: Este diámetro es el diámetro Pelton

$$u = \frac{D}{2} w = \frac{D}{2} \frac{\pi n}{30} \quad ; \quad D = \frac{60 \ u}{\pi \ n} = \left| \begin{matrix} n = \dfrac{3000}{5} = 600 \text{ rpm} \\ u = 47 \text{ m/seg} \end{matrix} \right| = \frac{60 \times 47}{600 \ \pi} = 1{,}496 \text{ m}$$

c) Potencia desarrollada por la turbina (potencia efectiva), y par motor ($\eta_{mec} = 1$):

$$N_{ef} = F_x u = \frac{\gamma \ Q}{g} (w_1 \ \cos \beta_1 - w_2 \ \cos \beta_2) \ u = \left| \begin{matrix} w_1 \ \cos \beta_1 = w_1 = 53 \text{ (m/seg)} \\ Q = c_1 \ \Omega = 100 \ \dfrac{\pi \times 0{,}07^2}{4} = 0{,}3848 \text{ (m}^3\text{/seg)} \\ w_2 \ \cos \beta_2 = 45{,}05 \cos 10^\circ = 44{,}36 \text{ (m/seg)} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1000 \times 0{,}3848}{9{,}8} (53 + 44{,}36) \times 47 = 179680 \ \frac{\text{Kgm}}{\text{seg}} = 2395{,}7 \text{ CV}$$

Como ($\eta_{mec} = 1$) , $N_{efe} = N \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{N}{w} = \dfrac{30 \ N}{n \ \pi} = \dfrac{30 \times 179680 \ (\text{Kgm/seg})}{600 \ \pi \ (1/\text{seg})} = 2859{,}7 (\text{m.kg})$

d) Saltos neto y efectivo

$$c_1 = \varphi_1 \sqrt{2 \ g \ H_n} \quad ; \quad H_n = \frac{c_1^2}{2 \ g \ \varphi_1^2} = \frac{100^2}{2 \ g \ 1^2} = 510{,}2 \text{ m}$$

Salto efectivo : $H_{efect} = \dfrac{N_{efect}}{\gamma \ Q} = \dfrac{179.680}{1000 \times 0{,}3848} = 466{,}95 \text{ m}$

Rend. manométrico: $\eta_{man} = \dfrac{u_1 \ (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2)}{g \ H_n} = \dfrac{47 \times (100 - 8{,}25 \cos 71{,}48^\circ)}{g \times 510{,}2} = 0{,}9153 = 91{,}53\%$

$$\eta_{man} = \frac{H_{efect}}{H_n} = \frac{N_{efect}}{\gamma\ Q_d\ H_n} = \frac{179.680}{1000\ x\ 0{,}3848\ x\ 510{,}2} = 91{,}53\%$$

Rendimiento manométrico máximo: $\eta_{man_{máx}} = 2\ \varphi_1^2\ \cos\alpha_1 \frac{u_1}{c_1} = 2\ x\ 1^2\ x \cos 0\ x\ 0{,}47 = 0{,}94 = 94\%$

Nº de revoluciones específico: $n_s = \frac{n\ \sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{600\ \sqrt{2395{,}7}}{510{,}2^{5/4}} = 12{,}11$ rpm

e) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm de una turbina geométricamente semejante a la anterior, con relación de semejanza $\lambda = 2$, funcionando con el mismo salto:

$$\frac{Q}{Q'} = \lambda^2 \sqrt{\frac{H_n}{H_{n'}}} = \lambda^2 \sqrt{\frac{510{,}2}{510{,}2}} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad Q = 2^2 Q' = 2^2\ x\ 0{,}3848 = 1{,}54\ m^3/seg$$

$$\frac{N}{N'} = \lambda^2 \sqrt{(\frac{H_n}{H_{n'}})^3} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad N = \lambda^2\ N' = 2^2\ x\ 2395{,}7 = 9583{,}2\ CV$$

$$\frac{C}{C'} = \lambda^3 \frac{H_n}{H_{n'}} = \lambda^3 \quad \Rightarrow \quad C = \lambda^3\ C' = 2^3\ x\ 2859{,}7 = 22877{,}6\ mkg$$

$$\frac{n}{n'} = \lambda^{-1} \sqrt{\frac{H_n}{H_{n'}}} = \lambda^{-1} \quad \Rightarrow \quad n = \lambda^{-1}\ n' = 2^{-1}\ x\ 600 = 300\ rpm$$

f) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm de una turbina geométricamente semejante a la anterior, con relación de semejanza $\lambda = 2$, funcionando con un salto de 1000 m

$$\frac{Q}{Q'} = l^2 \sqrt{\frac{H_n}{H_{n'}}} = 2^2 \sqrt{\frac{1000}{510{,}2}} = 5{,}6 \quad \Rightarrow \quad Q = 5{,}6\ Q' = 5{,}6\ x\ 0{,}3848 = 2{,}1548\ m^3/seg$$

$$\frac{N}{N'} = \lambda^2 \sqrt{(\frac{H_n}{H_{n'}})^3} = 2^2 \sqrt{(\frac{1000}{510{,}2})^3} = 10{,}976 \quad \Rightarrow \quad N = 10{,}976\ N' = 10{,}976\ x\ 2395{,}7 = 26295{,}5\ CV$$

$$\frac{C}{C'} = \lambda^3 \frac{H_n}{H_{n'}} = 2^3 \frac{1000}{510{,}2} = 15{,}68 \quad \Rightarrow \quad C = 15{,}68\ C' = 15{,}68\ x\ 2859{,}7 = 44845{,}15\ mkg$$

$$\frac{n}{n'} = \lambda^{-1} \sqrt{\frac{H_n}{H_{n'}}} = 2^{-1} \sqrt{\frac{1000}{510{,}2}} = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad n = 0{,}7\ n' = 0{,}7\ x\ 600 = 420\ rpm$$

g) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm, λ =1, para una turbina que tiene 4 inyectores de 50 mm de diámetro, con c_1 = 100 m/seg, funcionando con el salto del apartado (d)

Los triángulos de velocidades se mantienen

Potencia y par motor para 1 inyector:

$$N_{ef} = F_x u = \frac{\gamma\ Q}{g} (w_1\ \cos\beta_1 - w_2\ \cos\beta_2)\ u = \left| Q = c_1\ \Omega = 100\ \frac{\pi\ x\ 0{,}05^2}{4} = 0{,}1963\ (m^3/seg) \right| =$$

$$= \frac{1000\ x\ 0{,}1963}{9{,}8} (53 + 44{,}36)\ x\ 47 = 91658\ \frac{Kgm}{seg} = 1221{,}1\ CV$$

$$C = \frac{N}{w} = \frac{30\ N}{n\ \pi} = \left| \frac{n}{n'} = \lambda^{-1} \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} = \lambda \quad \Rightarrow \quad n = n' = 600\ rpm \right| = \frac{30\ x\ 91658\ (Kgm/seg)}{600\ \square(1/seg)} = 1458{,}8\ (m.kg)$$

Para 4 inyectores y H_n = 510,2 m:
$$\begin{cases} Q^* = 4\ Q = 4\ x\ 0{,}1963 = 0{,}7852\ m^3/seg \\ N^* = 4\ N = 4\ x\ 1222{,}1 = 4888{,}4\ CV \\ C^* = 4\ C = 4\ x\ 1458{,}79 = 5835{,}16\ mkg \end{cases}$$

h) Caudal, potencia, par motor y nº de rpm, λ =1, para la turbina del apartado (d), si se la suponen 4 inyectores de 50 mm de diámetro, con c_1 = 100 m/seg, funcionando con un salto de 1000 m

$$\frac{Q}{Q'} = \lambda^2 \sqrt{\frac{H_n}{H_{n'}}} = 1^2 \sqrt{\frac{1000}{510,2}} = 1,4 \quad \Rightarrow \quad Q = 1,4\ Q' = 1,4 \times 0,7852 = 1,1\ m^3/seg$$

$$\frac{N}{N'} = \lambda^2 \sqrt{(\frac{H_n}{H_{n'}})^3} = 1^2 \sqrt{(\frac{1000}{510,2})^3} = 2,744 \quad \Rightarrow \quad N = 2,744\ N' = 2,744 \times 4888,4 = 13414\ CV$$

$$\frac{C}{C'} = 1^3 \ \frac{H_n}{H_{n'}} = 1^3 \ \frac{1000}{510,2} = 1,96 \quad \Rightarrow \quad C = 1,96\ C' = 1,96 \times 5835,16 = 11437\ mkg$$

$$\frac{n}{n'} = \lambda^{-1} \ \sqrt{\frac{H_n}{H_{n'}}} = 1^{-1} \ \sqrt{\frac{1000}{510,2}} = 1,4 \quad \Rightarrow \quad n = 1,4\ n' = 1,4 \times 600 = 840\ rpm$$

****

5.- Una turbina Pelton de 1 inyector se alimenta de un embalse cuyo nivel de agua se encuentra 300 m por encima del eje del chorro, mediante una conducción forzada de 6 Km de longitud y 680 mm de diámetro interior.
El coeficiente de rozamiento de la tubería vale 0,032.
La velocidad periférica de los álabes es 0,47 c_1
El coeficiente de reducción de velocidad de entrada del agua en el rodete vale 0,97
Las cazoletas desvían el chorro 175°, y la velocidad del agua se reduce en ellas en un 15%
El chorro tiene un diámetro de 90 mm
El rendimiento mecánico es 0,8
Determinar

a) Las pérdidas en el inyector, y su velocidad; pérdidas en la conducción forzada
b) Los triángulos de velocidades y rendimiento manométrico
c) El caudal
d) La altura neta de la turbina y la altura de Euler
e) La potencia útil en el eje de la máquina

RESOLUCIÓN

a) Pérdidas en la conducción forzada

Altura neta: H_n = H - Pérdidas tubería = 300 - Pérdidas tubería

Por la ecuación de continuidad: $Q = \frac{\pi\ d_{iny}^2}{4}\ c_1 = \frac{\pi\ d_{tub}^2}{4}\ v_{tub} \quad \Rightarrow \quad v_{tub} = c_1 \frac{d_{iny}^2}{d_{tub}^2} = c_1 (\frac{0,09}{0,68})^2 = 0,017517\ c_1$

Pérdidas tubería: $h_t = \frac{\lambda}{d_{tub}}\ \frac{v_{tub}^2}{2\ g}\ L\ \lambda = \frac{0,032}{0,68}\ \frac{(0,017517\ c_1)^2}{2\ g} \times 6000 \times 1 = 0,00442\ c_1^2$

$H_n = 300 - 0,00442\ c_1^2$

Pérdidas en el inyector: $h_d = \frac{c_1^2\ (1 - \varphi^2)}{2\ g\ \varphi^2} = H_n\ (1 - \varphi^2) = H_n - \frac{c_1^2}{2\ g} = \frac{c_{1t}^2 - c_1^2}{2\ g} = \frac{(c_1/0,97)^2 - c_1^2}{2\ g} = 0,0032 c_1^2$

La altura neta desde el punto de vista del inyector es:

$$\begin{cases} H_n = \frac{c_1^2}{2\ g} + h_d = \frac{c_1^2}{2\ g} + 0,0032\ c_1^2 = 0,05422\ c_1^2 \\ H_n = \frac{c_{1t}^2}{2\ g} = \frac{(c_1/\varphi_1)^2}{2\ g} = \frac{c_1^2}{2\ g\ \varphi_1^2} = \frac{c_1^2}{2\ g\ 0,97^2} = 0,05422\ c_1^2 \end{cases}$$

Igualando las expresiones de H_n se obtiene la velocidad c_1:

$H_n = 300 - 0,00442\ c_1^2 = 0,05422\ c_1^2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 71,52$ m/seg

Pérdidas en el inyector: $h_d = 3,205.10^{-3}\ c_1^2 = 3,205.10^{-3} \times 71,52^2 = 16,4$ m

ó tambien: $\frac{c_1^2}{2\,g} + h_d = \frac{c_1^2}{2\,g\,\varphi_1^2}$; $h_d = \frac{c_1^2}{2\,g}\left(1 - \frac{1}{\varphi_1^2}\right)$

Pérdidas en la tubería: $h_t = 4{,}42.10^{-3} c_1^2 = 4{,}42.10^{-3} \times 71{,}52^2 = 22{,}61$ m

b) Triángulos de velocidades

Entrada: $\begin{cases} c_1 = 71{,}52 \text{ m/seg} \;\; ; \;\; \alpha_1 = \beta_1 = 0 \\ u_1 = 0{,}47\, c_1 = 0{,}47 \times 71{,}52 = 33{,}61 \text{ m/seg} \\ w_1 = c_1 - u_1 = 71{,}52 - 33{,}61 = 37{,}91 \text{ m/seg} \end{cases}$

Salida: $\begin{cases} \beta_2 = 5^\circ \;\; ; \;\; w_2 = \psi\, w_1 = 0{,}85 \times 37{,}91 = 32{,}22 \text{ m/seg} \\ c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2\, c_2 w_2 \cos \beta_2} = \sqrt{33{,}61^2 + 32{,}22^2 - (2 \times 33{,}61 \times 32{,}22 \times \cos 5^\circ)} = 3{,}2 \text{ m/seg} \\ \text{sen } \alpha_2 = \frac{w_2 \text{ sen } \beta_2}{c_2} = \frac{32{,}22 \text{ sen } 5^\circ}{3{,}2} = 0{,}8775 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha_2 = 61{,}34^\circ \end{cases}$

c) Caudal: $Q = \frac{\pi\, d_1^2}{4}\, c_1 = \frac{\pi \times 0{,}09^2}{4} \times 71{,}52 = 0{,}4548 \;\; \frac{m^3}{seg}$

d) Altura neta de la turbina: $H_n = 0{,}05422\, c_1^2 = 0{,}05422 \times 71{,}52^2 = 277{,}3$ m

Altura de Euler: $H_{ef} = \frac{c_1 u_1 \cos \alpha_1 - c_2 u_2 \cos \alpha_2}{g} = \frac{(71{,}52 \times 33{,}61) - (3{,}2 \times 33{,}61 \cos 61{,}34^\circ)}{g} = 240$ m

y el rendimiento manométrico con $\eta_{vol} = 1$: $\eta_{man} = \frac{H_{efectivo}}{H_n} = \frac{240}{277{,}3} = 0{,}8653 = 86{,}53\%$

Rendimiento hidráulico: $\eta_{hidráulico} = \eta_{man} \cdot \eta_{vol} = 0{,}8653 \times 1 = 86{,}53\%$

e) Potencia útil en el eje de la máquina o potencia al freno:

$$N = \frac{\gamma\, Q\, H_n\, \eta}{75} = \left| \; \eta = \eta_{vol}\, \eta_{mec}\, \eta_{man} = 1 \times 0{,}88 \times 0{,}8653 = 0{,}7614 \; \right| =$$

$$= \frac{1000 \times 0{,}4548 \times 277{,}3 \times 0{,}7614}{75} = 1280 \text{ CV} = 0{,}94 \text{ MW}$$

****

6.- Una turbina hidráulica funcionando con un caudal de 9,1 m^3/seg y salto neto de 100 m, gira a 500 rpm. Los triángulos de velocidades se han proyectado para que el rendimiento manométrico sea óptimo.
La potencia al freno es de 9000 CV, con un rendimiento mecánico del 0,987.
Determinar

a) El grado de reacción
b) Rendimiento global, manométrico y volumétrico
c) El caudal que sale por el aspirador difusor
d) Diámetros de entrada y salida del rodete; anchuras del rodete

---

RESOLUCIÓN

Tipo de turbina; nº de revoluciones específico: $n_s = \frac{n \sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{500 \sqrt{9000}}{100^{5/4}} = 150$ (Francis normal)

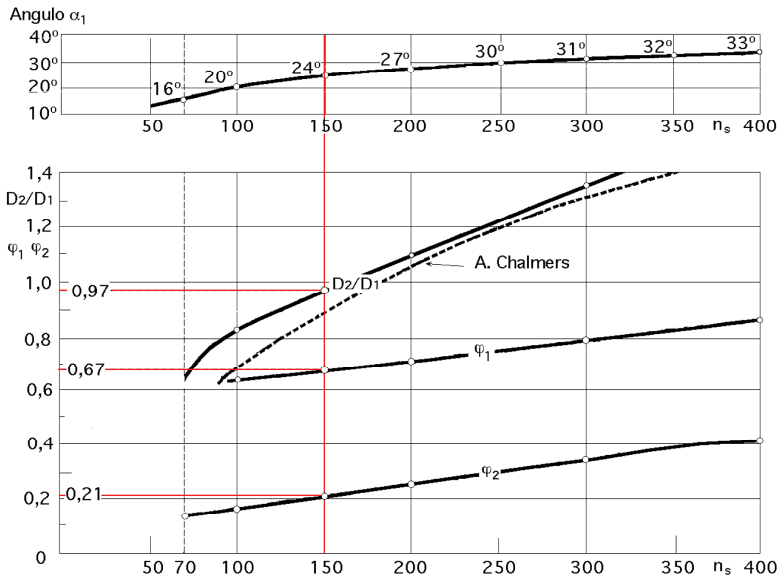
a) Grado de reacción: $\sigma = 1 - (\varphi_1^2 - \varphi_2^2) = 1 - (0{,}67^2 - 0{,}21^2) = 0{,}595$

Dimensiones del distribuidor b_1 y D_1, ángulo de ataque α_1 y coeficientes óptimos de velocidad φ_1 y φ_2 para turbinas Francis en función de n_s

Se obtiene: $\varphi_1 = 0{,}67$; $\varphi_2 = 0{,}21$; $\alpha_1 = 24^\circ$

El valor de φ_2 se podía haber obtenido, también, en la forma:

$$\varphi_2^2 = \frac{c_2^2}{2\,g\,H_n} = 5{,}57.10^{-5} n_s^{4/3} \;\; \Rightarrow \;\; \varphi_2 = 7{,}465.10^{-3} n_s^{2/3} = 0{,}007465 \times 150^{2/3} = 0{,}21$$



b) Rendimiento global, manométrico y volumétrico

Rendimiento global η

Potencia al freno: $N\,(CV) = \dfrac{\gamma\ Q\ H_n\ \eta}{75}$; $9000\ CV = \dfrac{1000 \times 9{,}1 \times 100\ \eta}{75}$; $\eta = 0{,}7417 = 74{,}17\%$

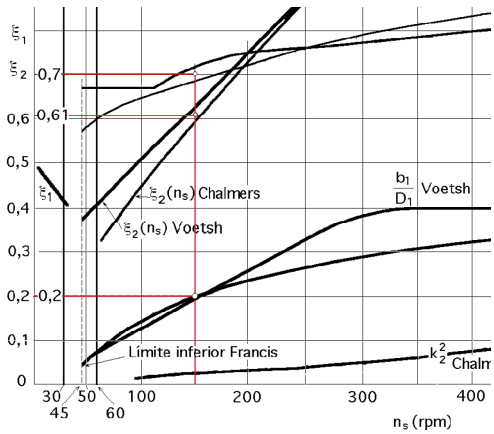
Rendimientos manométrico y volumétrico

$$\eta_{h\,(\alpha_2 = 90º)} = \frac{c_1\ u_1\ \cos\alpha_1}{g\ H_n} = \left| \begin{array}{l} c_1 = \varphi_1 \sqrt{2\ g\ H_n} = 0{,}67\ \sqrt{2\ g \times 100} = 29{,}66\ \text{m/seg} \\ \text{Para: } n_s = 150 \Rightarrow \xi_1 = 0{,}7 \\ u_1 = \xi_1 \sqrt{2\ g\ H_n} = 0{,}7 \sqrt{2\ g \times 100} = 31\ \text{m/seg} \end{array} \right| = 0{,}857 = 85{,}7\%$$

$$\eta_h = \eta_{vol}\ \eta_{man} \quad \Rightarrow \quad \eta_{vol} = \frac{\eta_h}{\eta_{mec}} = \frac{0{,}857}{0{,}987} = 0{,}87$$

Comprobación de η: De la relación entre u_2 y n_s, se obtiene:

$$n = 0{,}2738\ \frac{n_s\ H_n^{3/4}}{\sqrt{Q\ \eta}} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\{0{,}2738\ \dfrac{n_s\ H_n^{3/4}}{n}\}^2}{Q} = \frac{\{\dfrac{0{,}2738 \times 150 \times 100^{3/4}}{500}\}^2}{9{,}1} = 0{,}7414$$



c) Caudal que sale por el aspirador difusor: $Q_{sal} = \eta_{vol}\ Q = 0{,}87 \times 9{,}1 = 7{,}92\ \dfrac{m^3}{seg}$

d) Diámetros de entrada y salida del rodete y anchura del rodete

Diámetro a la entrada: $n = 84{,}55 \dfrac{\xi_1}{D_1} \sqrt{H_n}$; $D_1 = \dfrac{84{,}55\ \xi_1 \sqrt{H_n}}{n} = \dfrac{84{,}55 \times 0{,}7 \times \sqrt{100}}{500} = 1{,}1837\,m$

Anchura del rodete a la entrada:

$$\frac{b_1}{D_1} = 0{,}2 \;\; ; \;\; b_1 = 0{,}2\, D_1 = 0{,}2 \times 1{,}1837 \text{ m} = 0{,}2367 \text{m}$$

Diámetro a la salida D_2:

$$\left.\begin{array}{l} u_2 = \varphi_2 \sqrt{2\, g\, H_n} = \dfrac{D_2}{2}\,\dfrac{\pi\, n}{30} \\ u_2 = \varphi_2 \sqrt{2\, g\, H_n} = 0{,}61\ \sqrt{2g \times 100} = 27 \text{ m/seg} \end{array}\right\} \Rightarrow D_2 = \frac{60 \times 27}{500\,\pi} = 1{,}031 \text{ m}$$

****

7.- Dada una turbina Francis de características: $Q = 3\ m^3/seg$, $H_n = 200\ m$ y $n_s < 115$, conectada a un alternador de 50 ciclos/seg; $\eta = 0{,}85$

Determinar

a) Potencia

b) Elección de la velocidad rpm, sabiendo que $n_s < 115$

c) Dimensiones del rodete y del distribuidor

RESOLUCIÓN

a) Potencia: $N = \dfrac{\gamma\, Q\, H_n\, \eta}{75} = \dfrac{1000 \times 3 \times 200 \times 0{,}85}{75} = 6800 \text{ CV}$

b) Elección de la velocidad rpm

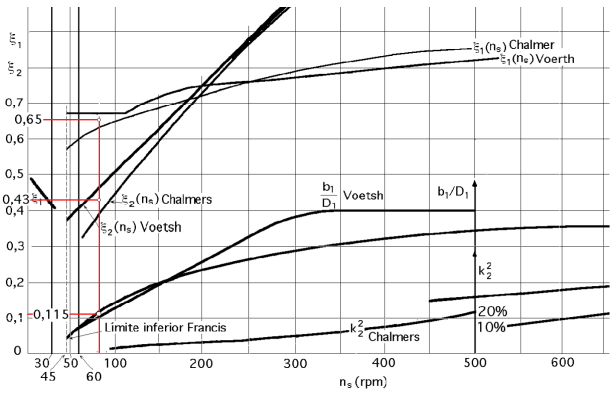
$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{n\sqrt{6800}}{200^{5/4}} = 0{,}10964\ n < 115 \;\; \Rightarrow \;\; n < \frac{115}{0{,}10964} \;\; ; \;\; n < 1050 \text{ rpm}$$

$$Z\, n = 3000 \left\{\begin{array}{l} \text{Para } Z = 3 \text{ pares de polos} \;\Rightarrow\; n = \dfrac{3000}{3} = 1000 \text{ rpm} \\ \text{Para } Z = 4 \text{ pares de polos} \;\Rightarrow\; n = \dfrac{3000}{4} = 750 \text{ rpm} \end{array}\right.$$

Por seguridad se tomará: $Z = 4 \;\Rightarrow\; n = 750$ rpm ; $n_s = 0{,}10964 \times 750 = 82{,}23$, Francis lenta

c) Dimensiones del rodete y del distribuidor

Para $n_s = 81{,}5$ rpm, se obtiene: $\left\{ \xi_1 = 0{,}65 \;;\; \xi_2 = 0{,}43 \;;\; \dfrac{b_1}{D_1} = 0{,}115 \right\}$



$$u_1 = \xi_1\ \sqrt{2\, g\, H_n} = 0{,}65\ \sqrt{2\, g \times 200} = 40{,}7 \text{ m/seg} = \frac{D_1\, \pi\, n}{60} \;\Rightarrow\; \boxed{D_1 = 1{,}036 \text{ m}}$$

$$u_2 = \xi_2\ \sqrt{2\, g\, H_n} = 0{,}43\ \sqrt{2\, g \times 200} = 26{,}9 \text{ m/seg} = \frac{D_2\, \pi\, n}{60} \;\Rightarrow\; \boxed{D_2 = 0{,}6696 \text{ m}}$$

$$b_1 = 0{,}115\ D_1 = 0{,}115 \times 1{,}036 = 0{,}1191 \text{ m}$$

Utilizando la Fórmula de Ahlfors: $D_2 = 4{,}375\ \sqrt[3]{\dfrac{Q}{n}} = 4{,}375\ \sqrt[3]{\dfrac{3}{750}} = 0{,}695 \text{ m}$

****

8.- Una turbina Francis está acoplada directamente a un alternador de 5 pares de polos. El caudal es de 1 m^3/seg. Los diámetros de entrada y salida de los álabes son 1 m y 0,45 m, y las secciones de paso, entre ála-

bes, de 0,14 m^2 y 0,09 m^2. El ángulo $\alpha_1 = 10^o$ y $\beta_2 = 45^o$. El rendimiento manométrico de esta turbina es 0,78.

Determinar

a) Los triángulos de velocidades

b) La altura neta

c) El par motor y potencia de la turbina

d) El nº de revoluciones específico

e) El caudal, altura neta, potencia y par motor, si se cambia el alternador por otro de 4 pares de polos.

RESOLUCIÓN

Nº de r.p.m.: $n = \frac{60\ f}{z} = \frac{3000}{5} = 600 \text{rpm}$

a) Triángulos de velocidades

Entrada:

$u_1 = \frac{D_1\ \pi\ n}{60} = \frac{1 \times \pi \times 600}{60} = 31{,}4 \text{ m/seg}$

$c_{1m} = \frac{Q}{\Omega_1} = \frac{1 \text{ m}^3/\text{seg}}{0{,}14 \text{ m}^2} = 7{,}14 \text{ m/seg} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{c_{1m}}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{7{,}14}{\text{sen } 10^o} = 41{,}12 \text{ m/seg}$

$w_1 = \sqrt{c_1^2 + u_1^2 - 2\ c_1\ u_1\ \cos \alpha_1} = \sqrt{41{,}12^2 + 31{,}4^2 - (2 \times 41{,}12 \times 31{,}4 \cos 10^o)} = 11{,}56 \text{ m/seg}$

$w_1 \text{ sen } \beta_1 = c_{1m} \ \Rightarrow \ \text{sen } \beta_1 = \frac{c_{1m}}{w_1} = \frac{7{,}14}{11{,}56} = 0{,}6176 \ ; \ \beta_1 = 38{,}14^o$

Salida:

$u_2 = \frac{D_2\ \pi\ n}{60} = \frac{0{,}45 \times \pi \times 600}{60} = 14{,}14 \text{ m/seg}$

$c_{2m} = \frac{Q}{\Omega_2} = \frac{1 \text{ m}^3/\text{seg}}{0{,}09 \text{ m}^2} = 11{,}1 \text{ m/seg} = c_2 \text{ sen } \alpha_2$

$w_2 = \frac{c_{2m}}{\text{sen } \beta_2} = \frac{11{,}1}{\text{sen } 45^o} = 15{,}7 \text{ m/seg}$

$c_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2 - 2\ u_2\ w_2 \cos \beta_2} = \sqrt{15{,}7^2 + 14{,}14^2 - (2 \times 15{,}7 \times 14{,}14 \cos 45^o)} = 11{,}5 \text{ m/seg}$

$\text{sen } \alpha_2 = \frac{11{,}1}{11{,}5} = 0{,}9648 \ ; \ \alpha_2 = 74{,}85^o$

b) Altura neta

$H_n = \frac{c_1\ u_1 \cos \alpha_1 - c_2\ u_2 \cos \alpha_2}{g\ \eta_{man}} = \frac{41{,}11 \times 31{,}4 \cos 10^o - 11{,}5 \times 14{,}4 \cos 74{,}85^o}{0{,}78\ g} = 160{,}74 \text{ m}$

c) Potencia de la turbina

$N = \gamma\ Q\ H_n\ \eta = \left| \eta = 0{,}78 \times 1 \times 1 = 0{,}78 \right| = 1000 \times 1 \times 160{,}74 \times 0{,}78 = 125377 \text{ Kgm/seg} = 1671 \text{ CV} = 1{,}23 \text{ MW}$

Par motor: $C = \frac{N}{w} = \frac{30\ N}{\pi\ n} = \frac{30 \times 125.377 \frac{\text{Kgm}}{\text{seg}}}{600\ \pi} = 1995{,}4 \text{ m.Kg}$

d) Nº de revoluciones específico: $n_s = \frac{600\ \sqrt{1671{,}7}}{160{,}74^{5/4}} = 42{,}86$ (Francis lenta)

e) Caudal, altura neta, potencia y par motor, si se cambia el alternador por otro de 4 pares de polos.

Para 4 pares de polos: $n' = \frac{3000}{4} = 750 \text{ rpm}$

El rendimiento se mantiene prácticamente constante $\Rightarrow \quad \frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{H_n}{H_n'}} = \frac{Q}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{N}{N'}} = \sqrt{\frac{C}{C'}}$

$$\frac{600}{750} = \sqrt{\frac{160{,}74\ m}{H_n'}} = \frac{1\ (m^3/seg)}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{1671{,}7\ CV}{N'}} = \sqrt{\frac{1995{,}4\ m.kg}{C'}}$$

Resolviendo se obtiene: $H_n' = 251{,}15\ m$; $Q' = 1{,}25\ \frac{m^3}{seg}$; $N' = 3265\ CV$; $C' = 3118\ mKg$

****

9.- Una turbina Francis gira a 600 rpm y en ella entra un caudal de 1 m^3/seg. Los diámetros de entrada y salida son de 1 m y 0,45 m respectivamente, y las secciones entre álabes correspondientes de 0,14 m^2 y 0,09 m^2. El ángulo de salida del agua del distribuidor es de 12º, el ángulo de salida de la rueda $\beta_2 = 45º$ y el rendimiento manométrico de la turbina del 78%.

Determinar

a) El salto neto

b) El par y la potencia sobre el eje

RESOLUCIÓN

Triángulos de velocidades

$$\text{Entrada: } \begin{cases} u_1 = \frac{D_1 \pi n}{60} = \frac{1 \times \pi \times 600}{60} = 31{,}4\ m/seg \\ c_{1m} = \frac{Q}{\Omega_1} = \frac{1\ m^3/seg}{0{,}14\ m^2} = 7{,}14\ m/seg \\ c_{1n} = c_1 \cos\alpha_1 = c_{1m} \text{cotg}\ \alpha_1 = 7{,}14 \text{ cotg } 12º = 33{,}6\ m/seg \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{c_{1m}}{\text{sen}\ \alpha_1} = \frac{7{,}14}{\text{sen } 12º} = 34{,}34\ \frac{m}{seg}$$

$$w_1 = \sqrt{u_2^2 + c_1^2 - 2\, c_1 u_1 \cos\alpha_1} = \sqrt{31{,}4^2 + 34{,}34^2 - (2 \times 31{,}4 \times 34{,}34 \times \cos 12º)} = 7{,}47\ m/seg$$

$$\text{sen}\ \beta_1 = \frac{c_{1m}}{w_1} = \frac{7{,}14}{7{,}47} = 0{,}9558 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 72{,}9º$$

$$\text{Salida: } \begin{cases} u_2 = \frac{D_2 \pi n}{60} = \frac{0{,}45 \times \pi \times 600}{60} = 14{,}14\ m/seg \\ c_{2m} = \frac{Q}{\Omega_2} = \frac{1\ m^3/seg}{0{,}09\ m^2} = 11{,}1\ m/seg \\ w_2 = \frac{c_{2m}}{\text{sen}\ \beta_2} = \frac{11{,}1}{\text{sen } 45º} = 15{,}7\ m/seg \end{cases} \Rightarrow c_{2n} = u_2 - w_2 \cos\beta_2 = 14{,}14 - 15{,}7 \cos 45º = 3{,}038\ \frac{m}{seg}$$

$$\text{tg}\ \alpha_2 = \frac{c_{2m}}{c_{2n}} = \frac{11{,}1}{3{,}038} = 3{,}6532 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 74{,}7º$$

a) Salto neto: $H_n = \frac{u_1\ c_{1n} - u_2\ c_{2n}}{g\ \eta_{man}} = \frac{(31{,}4 \times 33{,}6) - (14{,}14 \times 3{,}038)}{0{,}78\ g} = 132{,}4\ m$

b) Potencia en el eje: $N = \gamma\ Q\ H_n\ \eta = \left| \eta = 0{,}78 \right| = 1000 \times 1 \times 132{,}4 \times 0{,}78 = 103270\ Kgm/seg = 1377\ CV$

Par motor: $C = \frac{30\ N}{n\ \pi} = \frac{30 \times 103270\ (Kgm/seg)}{600\ \pi} = 1643{,}6\ (m.kg)$

Tipo de turbina: $n_s = \frac{600\ \sqrt{1377}}{132{,}4^{5/4}} = 49{,}6$ (Francis lenta)

****

10.- Se tiene una turbina de las siguientes características: $H_n = 256$ m ; $n = 500$ rpm ; $Q = 11\ m^3$/seg.

Determinar:

a) El tipo de turbina

b) El rendimiento manométrico máximo, sabiendo que $\eta_{vol} = 1$

c) El grado de reacción

d) Los diámetros de entrada y salida y altura del distribuidor

e) La altura del aspirador difusor, sabiendo que el rendimiento del mismo es 0,85

f) La cámara espiral

RESOLUCIÓN

a) Tipo de turbina: *C*omo de lo único que se trata es de conocer el tipo de turbina, se puede dar al rendimiento un valor promediado según la ecuación aproximada:

$$N = 11\, Q\, H_n = 11 \times 11 \frac{m^3}{seg} \times 256\ m = 30.976\ CV$$

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{500\sqrt{30.976}}{256^{5/4}} = 86 \text{ (Francis lenta)}$$

b) Rendimiento manométrico máximo: $\eta_{man} = 2(\xi_1\ \mu_1 - \xi_2\ \mu_2) = \left| \begin{array}{c} \text{Rendimiento máximo} \\ \vec{c}_2 \perp \vec{u}_2 \ ;\ c_{2n} = 0 \ ;\ \mu_2 = 0 \end{array} \right| = 2\,\xi_1\ \mu_1$

Para un valor de $n_s \approx 86$, se obtiene: $\varphi_1 = 0{,}63$; $\varphi_2 = 0{,}14$; $\xi_1 = 0{,}67$; $\xi_2 = 0{,}45$; $\alpha_1 = 18^o$

$$c_{1n} = c_1 \cos\alpha_1 = \mu_1\sqrt{2\,g\,H_n} = \varphi_1 \cos\alpha_1\sqrt{2\,g\,H_n} \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \varphi_1 \cos\alpha_1 = 0{,}63 \cos 18^o = 0{,}60$$

$$\eta_{man} = 2\,\xi_1\,\mu_1 = 2 \times 0{,}67 \times 0{,}6 = 0{,}804 = 80{,}4\%$$

Con este valor habría que volver a calcular N y n_s mediante una segunda iteración:

$$N = \frac{\gamma\, Q\, H_n\, \eta}{75} = \frac{1000 \times 11 \times 256 \times 0{,}804}{75} = 30187\ CV$$

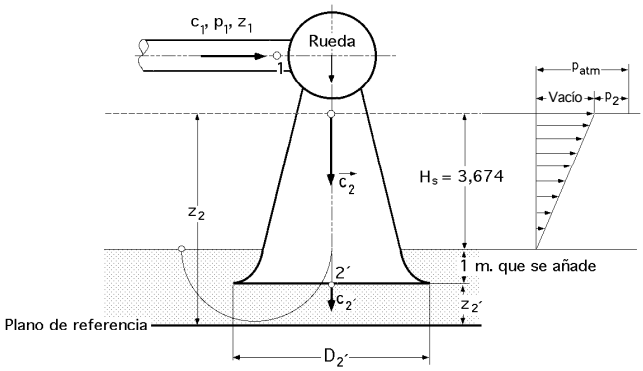
$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \frac{500\sqrt{30.187}}{256^{5/4}} = 84{,}8 \text{ (Francis lenta). Prácticamente igual}$$

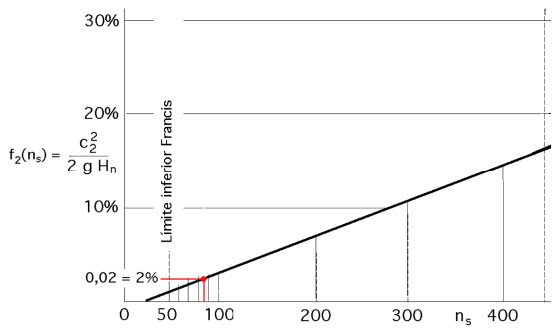
c) Grado de reacción: $\sigma = 1 - (\varphi_1^2 - \varphi_2^2) = 1 - (0{,}63^2 - 0{,}14^2) = 0{,}6227$

d) Diámetros de entrada y salida

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \dfrac{60\,u_1}{\pi\, n} = \left\{ u_1 = \varphi_1\sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}67\sqrt{2\,g \times 256} = 47{,}46\ \dfrac{m}{seg} \right\} = \dfrac{60 \times 47{,}46}{500\,\pi} = 1{,}81\ m \\ D_2 = \dfrac{60\,u_2}{\pi\, n} = \left\{ u_2 = \varphi_2\sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}45\sqrt{2\,g \times 256} = 31{,}87\ \dfrac{m}{seg} \right\} = \dfrac{60 \times 31{,}87}{500\,\pi} = 1{,}217\ m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{D_2}{D_1} = \frac{1{,}217}{1{,}81} = 0{,}67$$

Altura del distribuidor = altura del álabe a la entrada $\Rightarrow \dfrac{b_1}{D_1} = 0{,}12 \Rightarrow b_1 = 0{,}12\, D_1 = 0{,}12 \times 1{,}81 = 0{,}217\ m$





e) ***Altura del aspirador difusor, sabiendo que el rendimiento del mismo es 0,85***

$$H_s \le \frac{p_{atm} - p_2}{\gamma} - \frac{c_2^2}{2\,g}\,\eta_d$$

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} = 10{,}33\ mca \ ; \ \frac{p_2}{\gamma\, H_n} = 0{,}009 \ \Rightarrow \ \frac{p_2}{\gamma} = 2{,}304$$

Cálculo de c_2 :

1ª forma: $\dfrac{c_2^2}{2\,g\,H_m} = f_2(n_s) = \varphi_2^2 = 0{,}14^2 = 0{,}0196 \;\Rightarrow\; \dfrac{c_2^2}{2\,g} = 0{,}0196 \times 256 = 5{,}1$ m

2ª forma: $n_s = 86 \;\Rightarrow\; \varphi_2 = 0{,}14$; $c_2 = 0{,}14\sqrt{2\,g \times 256} = 9{,}91 \;\Rightarrow\; \dfrac{c_2^2}{2\,g} = \dfrac{9{,}91^2}{2\,g} = 5{,}01$ m

$$H_s \le \frac{p_{atm} - p_2}{\gamma} - \frac{c_2^2}{2\,g}\,\eta_d \quad ; \quad H_s \le (10{,}33 - 2{,}304) - (5{,}1 \times 0{,}85) = 3{,}674 \text{ m}$$

Valor de $D_{2'}$.- Como en 2' la velocidad ($c_{2'} \le 1$ m/seg), el valor de $D_{2'}$ se puede hallar en la forma:

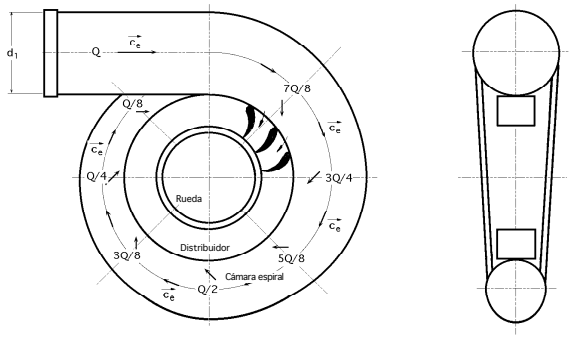
$$c_{2'} = \frac{Q}{\Omega_{2'}} = \frac{4\,Q}{\pi\,D_{2'}^2} = \frac{4 \times 11}{\pi\,D_{2'}^2} = 1\,\frac{m}{seg} \quad ; \quad D_{2'} = 3{,}74 \text{ m} \quad ; \quad r_{2'} = 1{,}87 \text{ m}$$

Profundidad $z_{2'}$ a la que tiene que ir la solera:

Präsil: $k = z_2\, r_2^2 = z_{2'}\, r_{2'}^2 = \left\{ z_2 = 3{,}67 + 1 + z_{2'}) = 4{,}67 + z_{2'} \right\} = (4{,}67 + z_{2'})\, r_2^2 = (4{,}67 + z_{2'})\, 0{,}609^2 = 1{,}87^2 z_{2'}$

$z_{2'} = 0{,}554$ m

f) Cámara espiral : Si es metálica: $c_e = 0{,}18 + 0{,}28\sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}18 + 0{,}28\sqrt{2\,g \times 256} = 20$ m/seg



Se puede dividir la cámara espiral en 8 partes, de forma que:

$$\Omega_1 = \frac{Q}{c_e} = \frac{\pi\,d_1^2}{4} \quad ; \quad d_1 = 1{,}128\sqrt{\frac{Q}{c_e}} = 1{,}128\sqrt{\frac{11}{20}} = 0{,}836 \text{ m}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{7}{8}}\,d_1 = 0{,}782 \text{ m} \quad ; \quad d_2 = \sqrt{\frac{6}{8}}\,d_1 = 0{,}724 \text{ m} \quad ; \quad d_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}\,d_1 = 0{,}661 \text{ m} \quad ; \quad d_4 = \sqrt{\frac{4}{8}}\,d_1 = 0{,}591 \text{ m}$$

$$d_5 = \sqrt{\frac{3}{8}}\,d_1 = 0{,}512 \text{ m} \quad ; \quad d_6 = \sqrt{\frac{2}{8}}\,d_1 = 0{,}418 \text{ m} \quad ; \quad d_7 = \sqrt{\frac{1}{8}}\,d_1 = 0{,}296 \text{ m}$$

****

11.- El modelo del rodete de una turbina tiene un diámetro de 30 cm y desarrolla una potencia de 35 CV bajo un salto neto de 7,5 m a 1200 rpm

El prototipo ha de proporcionar 10.000 CV en un salto neto de 6 metros y un rendimiento del 90%.

El tubo de aspiración tiene que recobrar el 75% de la energía cinética a la salida

Determinar

a) El diámetro y la velocidad "n" del prototipo

b) Si el modelo comienza a cavitar cuando la presión a la entrada del tubo de aspiración es de 7 m por debajo de la presión atmosférica, ¿Cuál será la máxima altura de la rueda del prototipo por encima del nivel más bajo del río para evitar la cavitación en una central instalada en una montaña en donde la presión atmosférica es de 0,85 Kg/cm², y el agua se encuentra a 20°C?

RESOLUCIÓN

El rendimiento máximo en el modelo y en el prototipo son iguales, por lo que los triángulos de velocidades son geométricamente semejantes, pero las velocidades son distintas, por lo que las presiones serán diferentes.

a) Diámetro y velocidad "n" del prototipo

En el punto de funcionamiento con rendimiento máximo: $n_{s\,mod} = n_{s\,prot}$

$$n_s = \frac{1200\ \sqrt{35}}{7,5^{5/4}} = \frac{n_{prot}\ \sqrt{10000}}{6^{5/4}} \Rightarrow n_{prot} = 53,7 \text{ rpm (Velocidad del prototipo)}$$

$$n_s = \frac{1200\ \sqrt{35}}{7,5^{5/4}} = 572 \quad \text{(Turbina hélice)} \Rightarrow D_p = D_{1p} = D_{2p}$$

Diámetro D_p.- Al ser los triángulos de velocidades semejantes implica que los coeficientes óptimos también lo son, por lo que: $\xi_{mod} = \xi_{prot}$

$$\left.\begin{array}{l} u_{mod} = \xi_m \sqrt{2\ g\ H_{n(m)}} = \dfrac{\pi\ D_m n_m}{60} \\ u_{prot} = \xi_p \sqrt{2\ g\ H_{n(p)}} = \dfrac{\pi\ D_p n_p}{60} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{H_{n(m)}}{H_{n(p)}}} = \frac{(D\,n)_m}{(D\,n)_p} \ ; \ \sqrt{\frac{7,5}{6}} = \frac{0,3 \times 1200}{D_p \times 53,7} \Rightarrow D_p = 6 \text{ m}$$

b) El modelo comienza a cavitar cuando la presión a la entrada del tubo de aspiración es de 7 m por debajo de la presión atmosférica

PROTOTIPO.- La máxima altura de la rueda del prototipo por encima del nivel más bajo del río para evitar la cavitación en una central instalada en una montaña en donde la presión atmosférica es de 0,85 Kg/cm^2, y el agua se encuentra a 20ºC, es:

$$H_{s\ prot} \le \frac{p_{atm\ (lugar)} - p_{2prot}}{\gamma} - \frac{c^2_{2prot}}{2\ g}\ \eta_d$$

en la que se ha supuesto que: $c'_{2\ prot} < 1$ m/seg $\Rightarrow$ $(c'_{2\ prot}/2\ g)$ es despreciable

Altitud sobre el nivel del mar	Presión atmosférica		Pérdidas de carga		Pérdidas por temperatura
metros	mm de Hg	metros c.a.	metros		metros
0	760	10,33	0,00		10ºC-0,125
100	751	10,21	0,12		15ºC-0,173
200	742	10,08	0,25		20ºC-0,236
300	733	9,96	0,37		25ºC-0,32

$\frac{p_{2prot}}{\gamma}$ es la presión a la salida de la rueda

$\frac{p_{atm}}{\gamma}$ (es la presión del lugar)

MODELO .- Como la turbina modelo se ha ensayado en Laboratorio ($p_{atm}/\gamma = 10,33$ m)

$$\text{Semejanza de presiones: } \left\{\begin{array}{l} \text{Modelo: } p_{2\ mod}/\gamma = H_{mod} \\ \text{Prototipo: } p_{2\ prot}/\gamma = H_{prot} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_{2\ prot}}{p_{2\ mod}} = \frac{H_{prot}}{H_{mod}} = \frac{6}{7,5} = 0,8$$

Si el Laboratorio se supone está a nivel del mar, las pérdidas de presión debidas a la altura son nulas

A la temperatura de 20ºC el agua tiene unas pérdidas de presión debidas a la temperatura de 0,236 m

$\frac{p_{2mod}}{\gamma}$ = (10,33 - 7) - Pérdidas por temperatura = 3,33 - 0,236 = 3,094 m

PROTOTIPO

$$\frac{p_{2prot}}{\gamma} = 3,094 \times \frac{6}{7,5} = 2,475 \text{ m}$$

Velocidad $c_{2\ prot}$ del prototipo; a partir de la potencia se determina el caudal, en la forma:

$$N_{prot} = \frac{\gamma\ (Q\ H_n)_{prot}\ \eta}{75} \ ; \ 10000 \text{ CV} = \frac{1000 \times Q_{prot} \times 6 \times 0,9}{75} \Rightarrow Q_{prot} = 138,88\ \frac{m^3}{seg}$$

Por la condición de rendimiento máximo, $c_2 \perp u_2$ $\Rightarrow$ $c_2 = c_{2m}$

$$c_{2(prot)} = \frac{4\ Q_{prot}}{\pi\ D^2_{2\ (prot)}} = \frac{4 \times 138,88}{\square 6^2} = 4,91 \text{ m/seg}$$

$\frac{p_{atm}}{\gamma}$ (presión del lugar) = 0,85 x 10,33 = 8,78 m

$H_s \leq (8{,}78 - 2{,}475) - \frac{4{,}91^2}{2\,g} \times 0{,}75 = 5{,}38$ m

que parece un poco elevado, por cuanto para turbinas hélice $H_s < 4$ m, pero hay que tener en cuenta que está calculado a potencia máxima.

De otra forma:

$$\begin{cases} \text{Modelo: } H_{mod} = \dfrac{c^2_{2m\,(mod)}}{2\,g} + \dfrac{p_{2\,(mod)}}{\gamma} + z_{2\,(mod)} \\ \text{Prototipo: } H_{prot} = \dfrac{c^2_{2m\,(prot)}}{2\,g} + \dfrac{p_{2\,(prot)}}{\gamma} + z_{2\,(prot)} \end{cases} \quad \text{con: } z_{2\,(mod)} \approx z_{2\,(prot)}$$

$$\text{Prototipo: } \begin{cases} N_{prot} = \dfrac{1000\,Q_{prot}\;6 \times 0{,}9}{75} = 10.000 \text{ CV} \\ Q_{prot} = 138{,}88\ \dfrac{m^3}{seg} = c_{2m\,(prot)}\ \dfrac{\pi\ D^2_{2\,(prot)}}{4} = c_{2\,(prot)}\ \dfrac{\pi \times 6^2}{4} \quad \Rightarrow \quad c_{2\,(prot)} = 4{,}91 \text{ m/seg} \end{cases}$$

$$\text{Modelo: } \begin{cases} N_{mod} = \dfrac{1000\,Q_{mod}\;7{,}5 \times 0{,}9}{75} = 35 \text{ CV} \\ Q_{mod} = 0{,}388\ \dfrac{m^3}{seg} = c_{2m\,(mod)}\ \dfrac{\pi\ D^2_{2\,(mod)}}{4} = c_{2\,(mod)}\ \dfrac{\pi \times 7{,}5^2}{4} \quad \Rightarrow \quad c_{2\,(mod)} = 5{,}50 \text{ m/seg} \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \text{Modelo: } 7{,}5 = \dfrac{5{,}5^2}{2\,g} + \dfrac{p_{2\,(mod)}}{\gamma} \Rightarrow \dfrac{p_{2\,(mod)}}{\gamma} = 7{,}5 - \dfrac{5{,}5^2}{2\,g} = 5{,}96 \text{ m.c.a.} \\ \text{Prototipo: } 6 = \dfrac{4{,}91^2}{2\,g} + \dfrac{p_{2\,(prot)}}{\gamma} \Rightarrow \dfrac{p_{2\,(prot)}}{\gamma} = 6 - \dfrac{4{,}91^2}{2\,g} = 4{,}775 \text{ m.c.a.} \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{p_{2\,(prot)}}{p_{2\,(mod)}} = \frac{4{,}775}{5{,}96} = 0{,}801$$

****

12.- Una turbina Francis está conectada en acoplamiento directo a un alternador de 11 pares de polos. En su punto de funcionamiento se tiene: $H_n = 45$ m ; $N = 3660$ kW; $\eta = 89\%$; $\eta_{mec} = 98{,}4\%$; $\eta_{vol} = 1$

Si se considera que el plano de comparación coincide con el nivel inferior del agua, aguas abajo, la entrada en el rodete se encuentra a 2,1 m y la salida del mismo a 1,8 m. El rodete tiene un diámetro $D_1 = 1{,}55$ m.

Las presiones a la entrada y salida del rodete son: 23,5 m.c.a. y (-2,5) m.c.a. respectivamente

El agua sale del rodete con $\alpha_2 = 90°$, siendo constante la velocidad del flujo en todo el rodete, $c_{1m} = c_{2m}$

Las velocidades a la entrada y salida del tubo de aspiración son: $c_2 = 6$ m/seg y $c_2' = 1$ m/seg, respectivamente.

Pérdidas en la tubería, despreciables

Determinar:

a) Ángulo β_1 de los álabes del rodete a la entrada

b) Caudal y diámetro de salida del tubo de aspiración

c) Nº específico de revoluciones

d) Pérdidas en el rodete h_r, y en el distribuidor h_d

e) Pérdidas en el tubo de aspiración h_s y h_s'

f) Altura del tubo de aspiración; rendimiento

RESOLUCIÓN

a) Ángulo β_1 de los álabes del rodete a la entrada: $\beta_1 = \text{arc tg}\ \frac{c_{1m}}{u_1 - c_{1n}}$

$n = \frac{3000}{Z} = \frac{3000}{11} = 272{,}7$ rpm

$\eta_{man} = 0{,}825 \ ; \ \eta_{mec} = 1 \ ; \ \eta_{vol} = 1 \ ; \ \eta_{dif} = 0{,}85$

$u_1 = \frac{D_1}{2} \ \frac{\pi \, n}{30} = \frac{1{,}55}{2} \ \frac{272{,}7 \ \pi}{30} = 22{,}13$ m/seg

Al no haber pérdidas en la tubería, $h_t = 0$, resulta: $H_n = H \ \Rightarrow \ \eta_{man} \, H \, g = u_1 \, c_{1n}$

$c_{1n} = \frac{\eta_{man} \, H \, g}{u_1} = \left| \eta_{man} = \frac{\eta}{\eta_{vol} \, \eta_{mec}} = \frac{0{,}89}{1 \times 0{,}984} = 0{,}9045 \right| = \frac{0{,}9045 \times 45 \times g}{22{,}13} = 18{,}02$ m/seg

$c_{1m} = c_{2m} = c_2 = 6$ m/seg

$\beta_1 = \text{arc tg} \, \frac{6}{22{,}13 - 18{,}02} = 55{,}71^\circ$

b) Caudal: $Q = \frac{N}{\gamma \, H_n \eta} = \left\{ H = H_n \right\} = \frac{3660 \times 102 \text{ (Kgm/seg)}}{1000 \text{ (kg/m}^3\text{)} \times 45 \text{ m} \times 0{,}89} = 9{,}3 \ \frac{m^3}{seg}$

Diámetro de salida del tubo de aspiración: $Q = \frac{\pi \, d_2'^2}{4} c_2' \ ; \ d_2' = \sqrt{\frac{4 \, Q}{\pi \, c_2'}} = \sqrt{\frac{4 \times 9{,}3}{\pi \times 1}} = 3{,}445$ m

c) Nº específico de revoluciones: $n_s = \frac{n \sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \left| N = 3660 \text{ kW} = 4977{,}5 \text{ CV} \right| = \frac{272{,}7 \ \sqrt{4977{,}5}}{45^{5/4}} = 165$ rpm

d) Pérdidas en el rodete h_r: Bernoulli entre 1 y 2: $\frac{c_1^2}{2 \, g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{c_2^2}{2 \, g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_r + H_{ef} = H_n$

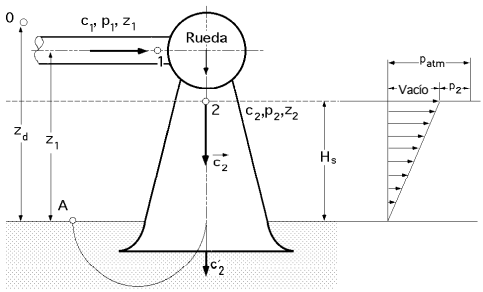
$H_{ef} = \frac{H_u}{\eta_{mec}} = \eta_{man} \, H_n = 0{,}9045 \times 45 = 40{,}7$ m

$\frac{p_1}{\gamma} = 23{,}5$ m.c.a. ; $\frac{p_2}{\gamma} = -2{,}5$ m.c.a $\ \Rightarrow$ (presiones relativas)

$z_1 = 2{,}1$ m.c.a. ; $z_2 = 1{,}8$ m.c.a.

$\frac{c_1^2}{2 \, g} = \frac{c_{1m}^2 + c_{1n}^2}{2 \, g} = \frac{18{,}0 \, 4^2 + 6^2}{2 \, g} = 18{,}44$ m ; $\frac{c_2^2}{2 \, g} = \frac{6^2}{2 \, g} = 1{,}836$ m

$h_r = \frac{c_1^2}{2 \, g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \{\frac{c_2^2}{2 \, g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + H_{ef}\} = 23{,}5 + 2{,}1 + 18{,}44 - \{1{,}836 - 2{,}5 + 1{,}8 + 40{,}7\} = 2{,}204$ m



Pérdidas en el distribuidor h_d- Bernoulli entre 0 y 1: $\frac{c_0^2}{2 \, g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = H_n = \frac{c_1^2}{2 \, g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + h_d$

$h_d = H_n - \{\frac{c_1^2}{2 \, g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\} = 45 - \{18{,}44 + 23{,}5 + 2{,}1\} = 0{,}96$ m

e) Pérdidas en el tubo de aspiración h_s y h_s'.- Bernoulli entre 2 y A: $\frac{c_2^2}{2 \, g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{c_A^2}{2 \, g} + \frac{p_A}{\gamma} + z_A + h_s + h_s'$

$h_s' = \frac{c_{2'}^2}{2 \, g} = \frac{1}{2 \, g} = 0{,}05097$ m

$h_s = \frac{c_2^2}{2 \, g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 - \{\frac{c_A^2}{2 \, g} + \frac{p_A}{\gamma} + z_A + h_s'\} = 1{,}836 - 2{,}5 + 1{,}8 - \{0 + 0 + 0 + 0{,}05097\} = 1{,}085$ m

f) Altura del tubo de aspiración; rendimiento

La altura de aspiración la da el enunciado: $z_2 = H_s = 1{,}8$ m

$$\eta_d = \frac{\frac{c_2^2 - c_2'^2}{2\,g} - h_s}{\frac{c_2^2 - c_2'^2}{2\,g}} = \frac{1{,}836 - 0{,}05097 - 1{,}085}{1{,}836 - 0{,}05097} = 0{,}392 = 39{,}2\%$$

Comprobación: $H_s \le \frac{p_{atm} - p_2}{\gamma} - \frac{c_2^2}{2\,g}\,\eta_d = 0 - (-2{,}5) - (1{,}836 - 0{,}05097) \times 0{,}392 = 1{,}8$ m

****

13.- Se tiene una turbina hidráulica de las siguientes características:

$H_n = 100$ m; $n = 500$ rpm ; $Q = 12\ m^3/seg$; $\eta_{man} = 0{,}825$; $\eta_{mec} = 1$; $\eta_{vol} = 1$; $\eta_{dif} = 0{,}85$

Determinar el perfil del difusor y su altura

RESOLUCIÓN

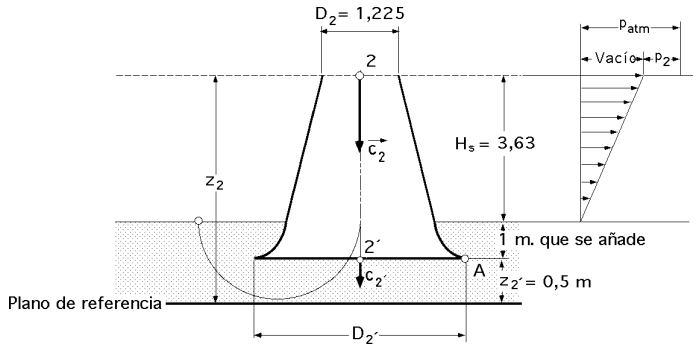
$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H_n^{5/4}} = \left| N = \frac{1000 \times 12 \times 100 \times 0{,}825}{75} = 13200\ CV \right| = \frac{500\sqrt{13200}}{100^{5/4}} = 180 \text{ Francis normal}$$

Altura máxima del aspirador-difusor: $H_s \le \frac{p_{atm} - p_2}{\gamma} - \frac{c_2^2}{2g}\,\eta_d$

Para, $n_s = 180 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \varphi_1\sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}67\sqrt{2\,g \times 100} = 29{,}66 \text{ m/seg} \\ c_2 = \varphi_2\sqrt{2\,g\,H_n} = 0{,}23\sqrt{2\,g \times 100} = 10{,}18 \text{ m/seg} \end{cases}$

A su vez: $\frac{p_2}{\gamma H_n} = 0{,}022$; $\frac{p_2}{\gamma} = 0{,}022\ H_n = 0{,}022 \times 100 = 2{,}2$ m

$$H_s \le (10{,}33 - 2{,}2) - \left(\frac{10{,}18^2}{2\,g} \times 0{,}85\right) = 3{,}63 \text{ m}$$



Diámetro D_2:

$$Q = c_{2m}\,\Omega_2 = |\alpha_2 = 90^o| = c_2\,\Omega_2 \quad ; \quad \Omega_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{12}{10{,}18} = 1{,}179\ m^2 = \frac{\pi\,D_2^2}{4} \quad ; \quad \boxed{D_2 = 1{,}225 \text{ m}}$$

Aspirador difusor: Según Präsil es de la forma: $z\,r^2 = k$, en la que "k" se calcula a la salida con velocidad $c_{2'} < 1$ m/seg

$$k = z_2\,r_2^2 = z_2 \times \left(\frac{1{,}225}{2}\right)^2 = 0{,}375\,z_2$$

Se puede tomar la solera como plano de comparación, por ejemplo a 0,5 m de la salida, es decir: $z_{2'} = 0{,}5$ m

La salida del difusor se puede poner, por ejemplo, a 1 m por debajo del nivel inferior

En consecuencia:

$$k = 0{,}375\,z_2 = 0{,}375\,(3{,}63 + 1 + 0{,}5) = 1{,}924$$

Para $z_{2'} = 0{,}5$ (punto A) $\Rightarrow$ $r_{2'} = \sqrt{\frac{k}{z_{2'}}} = \sqrt{\frac{1{,}924}{0{,}5}} = 1{,}96$ m

$$c_{2'} = \frac{12}{\pi\,r_{2'}^2} = \frac{12}{\pi\ 1{,}96^2} = 0{,}994\ \frac{m}{seg} < 1\ \frac{m}{seg}\ ,\ \text{solución un poco ajustada}$$

Habría que reducir un poco el valor de $z_{2'}$, por ejemplo a 0,45, con lo que se obtiene: $r_{2'} = \sqrt{\frac{1,924}{0,45}} = 2,0677$ m

$$c_{2'} = \frac{12}{\pi\, r_{2'}^2} = \frac{12}{\pi\ 2,0677^2} = 0,894\ \frac{m}{seg} < 1\ \frac{m}{seg}\ ,\ \text{solución un poco menos ajustada}$$

****

14.- Una turbina Pelton consume un caudal de 12 m^3/seg, y arrastra un alternador; la masa total turbina-alternador M = 200 Tm.

El conjunto rotativo así constituido tiene un radio de inercia, r = 0,55 $D_1/2$. Se puede asumir que el álabe a la salida tiene un ángulo $\beta_2 = 180^o$.

Se despreciarán los efectos de rozamiento. En cada instante, el par motor se calculará como si la velocidad de rotación fuese constante.

Determinar

a) Suponiendo que la turbina está parada, se abren los inyectores y se forma un chorro igual al 10% del valor maximal. ¿Cuál será el tiempo necesario para que la turbina adquiera la velocidad óptima de régimen?

b) Si la turbina funciona a potencia maximal, y se produce una disfunción en la red que anula bruscamente el par resistente del alternador, ¿qué tiempo será necesario para que la velocidad del conjunto se incremente en un 25%?

c) Si en ese instante se inicia el cierre total de los inyectores, que dura 20 segundos, y suponiendo que ésto implica una variación lineal del caudal respecto del tiempo, ¿cuál será el aumento relativo de la velocidad angular en ese tiempo?¿Qué tiempo sería necesario para que la sobrevelocidad no sobrepase el 50% de la velocidad de régimen?

d) Si se dispone de un contrachorro, que sabemos actúa en sentido contrario al movimiento, y que consume un caudal igual al 5% del maximal. Si se admite que la cara que los álabes presentan a éste contrachorro le desvían 90º, calcular el tiempo de acción del contrachorro necesario para asegurar el frenado de la turbina, en ausencia del chorro principal, en los siguientes casos:

d.1.- Si se frena después de la velocidad de régimen normal,

d.2.- Si se frena después de la sobrevelocidad definida en el apartado (c)

RESOLUCIÓN

Sabemos que: $I \frac{dw}{dt} = C_m - C_r = C$

en la que I es el momento de inercia de todas las masas rotatorias y "w" la velocidad angular de la turbina.

El valor de $I = M\, r^2$

El par C varía con la velocidad angular "w", y es igual al producto de la fuerza media F que se ejerce sobre los álabes, multiplicada por el radio Pelton $R = D_1/2$, de la forma:

$$F = \frac{2\,\gamma\,Q}{g}(c_1 - u_1) = \frac{2\,\gamma\,Q}{g}(c_1 - R\,w)$$

$$C = F\,R = \frac{2\,\gamma\,Q\,R}{g}(c_1 - R\,w)$$

Cuando se embala, se tiene: $c_1 = R\,w_{emb}$, por lo que:

$$C = F\,R = \frac{2\,\gamma\,Q\,R^2}{g}(w_{emb} - w) = I\,\frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dw}{w_{emb} - w} = \frac{2\ \gamma\ Q\,R^2}{g\,I}\ dt = \frac{2\ \gamma\ Q\,R^2}{g\,M\,r^2}\ dt = \frac{2\ \gamma\ Q}{g\,M}\left(\frac{R}{r}\right)^2 dt$$

$$\ln\frac{w_{emb} - w}{w_{emb} - w_0} = -\frac{2\ \gamma\ Q}{g\,M}\left(\frac{R}{r}\right)^2(t - t_0)$$

$$\frac{w_{emb} - w}{w_{emb} - w_0} = \exp\left[- \frac{2\ \gamma\ Q}{g\ M} \left(\frac{R}{r}\right)^2 (t - t_0)\right] = \exp\left(- \frac{t - t_0}{T}\right)$$

en la que w_0 es la velocidad angular de la turbina para, $t = t_0$, y T es una constante temporal de la forma:

$$T = \frac{g\ M}{2\ \gamma\ Q} \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

a) Si la turbina está parada, se abren los inyectores y se forma un chorro igual al 10% del valor maximal, el tiempo necesario para que la turbina adquiera la velocidad óptima de régimen se calcula como sigue:

Si arranca con un caudal: Q = 12 m^3/seg x 0,1 = 1,2 m^3/seg, que el radio de inercia: r = 0,55 R, y que la masa es de 200 Tm, la constante temporal será:

$$T_1 = \frac{M}{2\ \rho\ Q} \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{200.000\ Kg}{2 \times 1000\ \frac{Kg}{m^3} \times 1{,}2\ \frac{m^3}{seg}} \times 0{,}5\,5^2 = 25{,}25\ seg$$

Para: $t = 0 = t_0$, resulta, $w_0 = 0$

Para: t = t, si se considera que la velocidad nominal de régimen para una Pelton es la mitad de la velocidad maximal, embalamiento, (en general la velocidad de embalamiento suele ser del orden de 1,8 veces la velocidad nominal), por lo que el tiempo que la turbina tardará en alcanzar la velocidad de régimen es:

$$e^{-(t/T_1)} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{t}{T_1} = \ln 2 = 0{,}69 \quad ; \quad t = 0{,}69\ T_1 = 0{,}69 \times 25{,}25\ seg = 17{,}4\ seg$$

b) Si la turbina funciona a potencia maximal, y se produce una disfunción en la red que anula bruscamente el par resistente del alternador, el tiempo necesario para que la velocidad del conjunto se incremente en un 25% se calcula como sigue:

La constante de tiempo correspondiente T_2 será 10 veces más pequeña que T_1, ya que el caudal será ahora el nominal, es decir 12 m^3/seg:

$$T_1 = \frac{M}{2\ \rho\ Q} \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{200000\ kg}{2 \times 1000\ (kg/m^3) \times 12\ (m^3/seg)} \times 0{,}55^2 = 2{,}525\ seg$$

La velocidad angular de régimen es $w_1 = \frac{w_{emb}}{2}$; $n_1 = \frac{n_{emb}}{2}$, y se pasa a una sobrevelocidad del 25%, es decir, a una velocidad angular, $w_2 = 1{,}25\ w_1$, $n_2 = 1{,}25\ n_1$, en un tiempo t_2, por lo que:

$$\frac{w_{emb} - w_2}{w_{emb} - w_1} = \frac{w_{emb} - 1{,}25\ \frac{w_{emb}}{2}}{w_{emb} - \frac{w_{emb}}{2}} = 0{,}75 = e^{(-t_2/T_2)} \ ; \ t_2 = 0{,}288\ T_2 = 0{,}288 \times 2{,}525\ seg = 0{,}727\ seg$$

c) Si en ese instante se inicia el cierre total de los inyectores, que dura 20 segundos, y suponiendo que ésto implica una variación lineal del caudal respecto del tiempo, el aumento relativo de la velocidad angular en ese tiempo se calcula en la forma:

El aumento relativo de la velocidad angular en ese tiempo, $t_3 = 20$ seg, se obtiene considerando que:

$$Q = Q_0 \left(1 - \frac{t}{t_3}\right)$$

por lo que:

$$\frac{dw}{w_{emb} - w} = \frac{2\ \rho\ Q R^2}{I}\ dt = \frac{2\ \rho\ Q R^2}{M r^2}\ dt = \frac{2\ \rho\ Q_0}{M} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{t_3}\right) dt = \left(1 - \frac{t}{t_3}\right) \frac{dt}{T_2}$$

$$\int_w^{w_2} \frac{dw}{w_{emb} - w} = \ln \frac{w_{emb} - w}{w_{emb} - w_2} = - \frac{1}{T_2} \left(t - \frac{t^2}{2\ t_3}\right)$$

Al cabo del tiempo t_3 se obtiene otra velocidad angular w_3, tal que:

$$\ln \frac{w_{emb} - w_3}{w_{emb} - w_2} = - \frac{1}{T_2} \left(t - \frac{t^2}{2\ t_3}\right) = - \frac{1}{T_2} \left(t_3 - \frac{t_3^2}{2\ t_3}\right) = - \frac{t_3}{2\ T_2}$$

y sustituyendo los valores : $t_3 = 20$ seg ; $T_2 = 2{,}525$ seg ; $w_2 = 1{,}25\ w_m/2$, resulta:

$$\ln \frac{w_{emb} - w_3}{w_{emb} - w_2} = \ln \frac{w_{emb} - w_3}{w_{emb} - \frac{1{,}25\ w_{emb}}{2}} = - \frac{20}{2 \times 2{,}525} = - 3{,}9604 \quad ; \quad w_3 = 0{,}9928\ w_{emb}$$

por lo que en esta situación, la turbina adquiere prácticamente la velocidad de embalamiento maximal, es decir el doble de la velocidad de régimen.

Tiempo necesario para que la sobrevelocidad no sobrepase el 50% de la velocidad de régimen

En esta situación la velocidad será w_3, y el tiempo t_3:

$$w_3 = \frac{1,5\ w_{emb}}{2} = 0,75\ w_{emb}$$

$$\ln \frac{w_{emb} - w_3}{w_{emb} - w_2} = \ln \frac{w_{emb} - 0,75\ w_{emb}}{w_{emb} - \frac{1,25\ w_{emb}}{2}} = \ln \frac{0,25}{0,375} = -0405 = -\frac{t_3}{2\,T_2} = \frac{t_3}{2 \times 2,525\ seg} \Rightarrow t_3 = 2,04\ seg$$

No se puede cortar el caudal tan rápido por parte de los inyectores, bajo pena de provocar el golpe de ariete en el conducto de alimentación de los mismos, por lo que habría que desviar el chorro mediante el deflector.

d) Si se dispone de un contrachorro, que sabemos actúa en sentido contrario al movimiento, y que consume un caudal igual al 5% del maximal y se admite que la cara que los álabes presentan a éste contrachorro le desvían 90º, el tiempo de acción del contrachorro necesario para asegurar el frenado de la turbina, en ausencia del chorro principal, se calcula en la forma:

$$F = -\rho\ Q\ (c_1 + u_1)$$

$$C = -\rho\ Q\ R\ (c_1 + u_1) = -\rho\ Q\ R^2\ (w_{emb} + w)$$

En ausencia del chorro principal, la ecuación del movimiento es:

$$I \frac{dw}{dt} = C = -\rho\ Q_{contr.}\ R^2\ (w_{emb} + w) \quad ; \quad \frac{dw}{(w_{emb} + w)} = \frac{-\rho\ Q_{contr.}\ R^2}{I}\ dt = \frac{-\rho\ Q_{contr.}}{M} \left(\frac{R}{r}\right)^2 dt$$

y si Q es constante

$$\ln \frac{w_{emb} + w_0}{w_{emb} + w} = \frac{\rho\ Q_{contr.}}{M} \left(\frac{R}{r}\right)^2 t_4 = \frac{t_4}{T_4}$$

siendo:

$$Q_{contr.} = \frac{Q_0}{20} = \frac{12}{20} = 0,6\ m^3/seg \ ; \ T_4 = \frac{M\ r^2}{\rho\ Q_{contr.}\ R^2} = \frac{200.000 \times 0,55}{1000 \times 0,6 \times 1^2} = 100,83\ seg = 40\ T_2$$

Para obtener, w = 0, se necesita un tiempo:

$$\ln \frac{w_{emb} + w_0}{w_{emb}} = \frac{t_4}{100,88} \quad ; \quad \boxed{t_4 = 100,88 \times \ln \frac{w_{emb} + w_0}{w_{emb}}}$$

d.1.- Si se frena después de la velocidad de régimen normal, se tiene que, $w_0 = 0,5\ w_{emb}$, por lo que el tiempo será:

$$t_4 = 100,88\ seg \times \ln \frac{w_{emb} + 0,5\ w_{emb}}{w_{emb}} = 100,88\ seg \times \ln 1,5 = 40,9\ seg$$

d.2.- Si se frena después de la sobrevelocidad definida en el apartado (c), es decir, $w_0 = 1,5\ w_{emb}$, por lo que el tiempo t_4^* será:

$$t_4^* = 100,88\ seg \times \ln \frac{w_{emb} + 0,75\ w_{emb}}{w_{emb}} = 100,88\ seg \times \ln 1,75 = 56,45\ seg$$

****