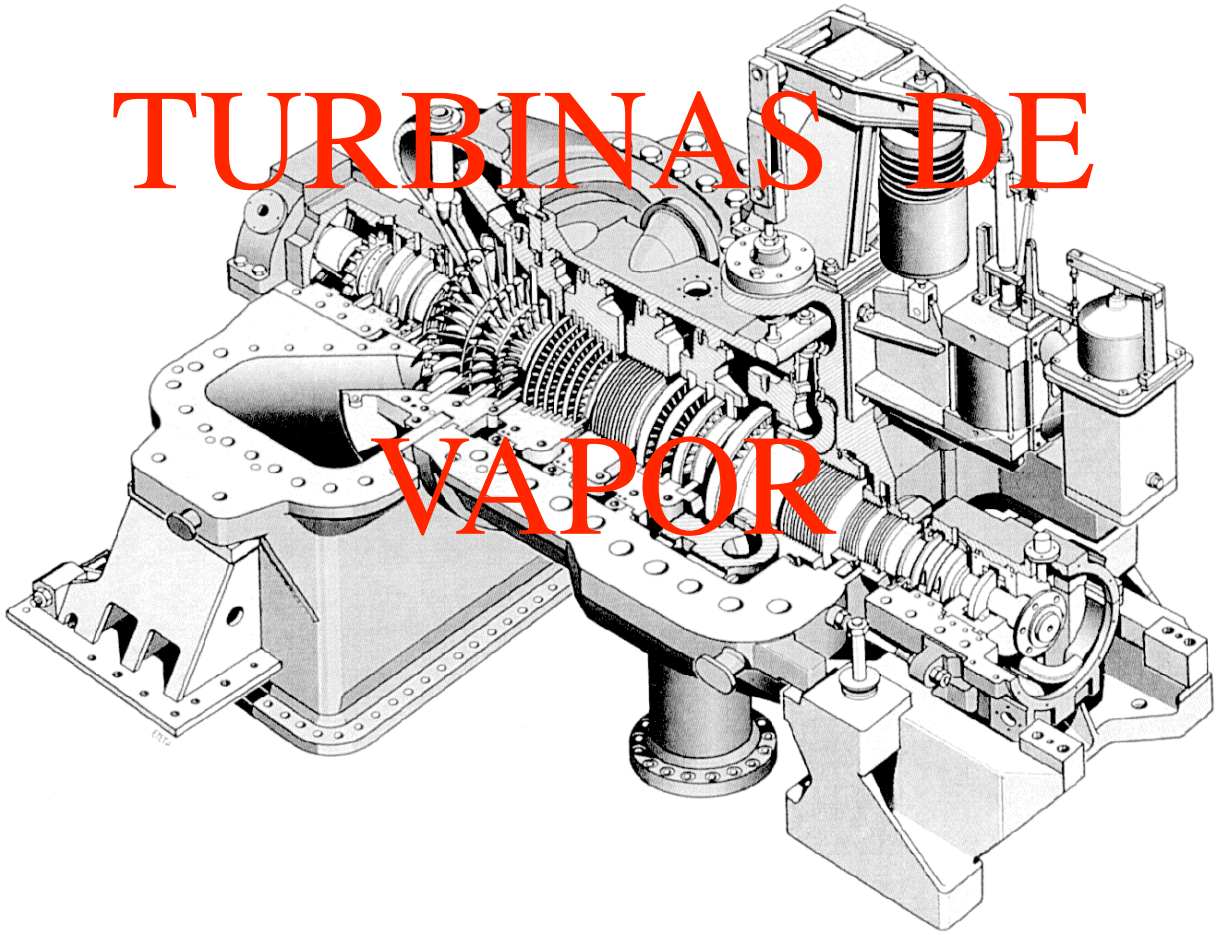
TURBINAS DE VAPOR



Pedro Fernández Díez
pfernandezdiez.es

I.- PARÁMETROS DE DISEÑO
DE LAS TURBINAS DE FLUJO AXIAL

pfernandezdiez.es

I.1.- INTRODUCCIÓN

Para estudiar las turbinas de flujo axial, se puede suponer que las condiciones de funcionamiento se concentran en el radio medio de los álabes; si la relación entre la altura del álabe y el radio medio es baja, el análisis proporciona una aproximación razonable al flujo real, *análisis bidimensional*, mientras que si la relación es alta, como sucede en los últimos escalonamientos de una turbina de condensación, es necesario otro tipo de estudio más sofisticado.

Se puede suponer que las componentes radiales de la velocidad son nulas y que el flujo es invariable a lo largo de la dirección circunferencial, (no hay interferencias o variaciones del flujo de álabe a álabe), por lo que la circulación, Γ= Cte.

Un escalonamiento de una turbina axial está formado por una corona de álabes guías o toberas, (corona del estator), y una corona de álabes móviles, (corona del rotor).

Si se supone que la velocidad axial o velocidad meridiana $\vec{c}_m$ es constante a lo largo del escalonamiento:

$$\vec{c}_m = \vec{c}_{0m} = \vec{c}_{1m} = \vec{c}_{2m}$$

y si Ω_0, Ω_1 y Ω_2, son las correspondientes secciones de paso, aplicando la ecuación de continuidad se tiene:

$$\rho_1 \, \Omega_1 = \rho_2 \, \Omega_2 = \rho_3 \, \Omega_3$$

y como se trata de un proceso de expansión, el volumen específico del vapor aumenta, por lo que la sección de paso entre álabes también tiene que aumentar.

La realidad es que $c_{1m} \neq c_{2m}$, salvo excepciones

I.2.- TRIÁNGULOS DE VELOCIDADES Y PARÁMETROS

El triángulo de velocidades a la entrada se obtiene a partir de $\vec{u}$ y $\vec{c}_1$.

En el triángulo de velocidades a la salida se tiene:

- Para las *turbinas de acción*, a partir de la elección de un coeficiente de reducción de velocidad

$$\psi = \frac{w_2}{w_1} \quad \Rightarrow \quad w_2 < w_1$$

- Para las *turbinas de reacción:*

$$\psi = \frac{w_2}{w_{2t}} \quad \Rightarrow \quad w_2 > w_1$$

La altura de la sección de salida del álabe fija la relación $\frac{c_{1m}}{c_{2m}}$.

En las *turbinas de acción,* la altura del álabe se determina teniendo en cuenta el interés que presenta una reducción del ángulo β_2 y la centrifugación de la vena en los álabes de perfil constante. La elección del perfil del álabe se realiza a partir de los valores de los ángulos obtenidos, teniendo en cuenta que:

- Los álabes guía del distribuidor, cuando forman parte de los diafragmas de los escalonamientos de acción, deben resistir el empuje aplicado sobre ellos.

- Los álabes de la corona móvil deben resistir {*los esfuerzos centrífugos*; *la flexión producida por la acción tangencial del vapor*; *la fatiga debida a las vibraciones*}

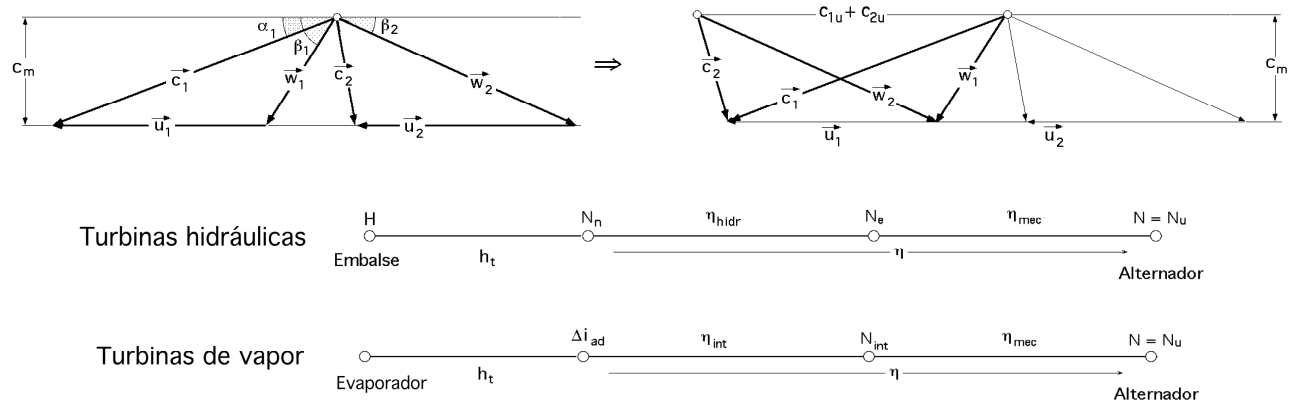


Fig I.1.- Triángulos de velocidades y esquema de rendimientos

Para definir la forma de los triángulos de velocidades, en el supuesto de velocidad axial $c_m = Cte$, se necesitan tres parámetros:

- El coeficiente de presión o de carga Ψ que expresa la capacidad de realizar un trabajo T por unidad de masa, desarrollado por el escalonamiento, y se define en la forma:

$$\Psi = \frac{T}{\frac{\sum u^2}{g}} = \left| \begin{array}{c} T = \frac{u}{g}(c_{1u} + c_{2u}) = \{ c_u = c_m cotg\,\alpha \} = \\ = \frac{u}{g} c_{1m}(cotg\,\alpha_1 + cotg\,\alpha_2) \end{array} \right| = \frac{c_{1m}(cotg\,\alpha_1 + cotg\,\alpha_2)}{u}$$

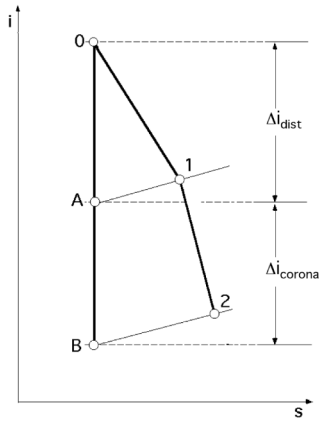


Fig I.2.- Saltos entálpicos

El signo (+) de la ecuación de Euler es debido a que en los triángulos de velocidades las componentes tangenciales $\vec{c}_{1u}$ y $\vec{c}_{2u}$ tienen sentidos contrarios.

Geométricamente es la relación entre las bases del trapecio, Fig I.1, de los triángulos de velocidades. El coeficiente de presión afecta al rendimiento del escalón y al coste de la máquina a través del número de escalonamientos.

- ***El coeficiente de caudal o de flujo*** Φ *está relacionado con el tamaño de la máquina para un gasto másico G dado, y se define como:* $\Phi = \frac{c_m}{u}$

Geométricamente es la relación entre la altura $\vec{c}_m$ y la base $\vec{u}$ del trapecio de los triángulos de velocidades; afecta al rendimiento y al coste de la máquina a través de la altura del álabe.

- El factor de calidad o nº de Parsons X *de la forma* $X = \frac{u^2}{\Delta i_{ad}}$*, permite hallar el nº de escalonamientos*

- El grado de reacción σ *, como la relación entre el salto entálpico teórico en el rotor (corona móvil) y el salto entálpico teórico total de la turbina, de la forma:*

$$\sigma = \frac{i_A - i_B}{i_0 - i_B} = \left| \begin{array}{l} i_A - i_B = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \frac{(w_{2m}^2 + w_{2u}^2) - (w_{1m}^2 + w_{1u}^2)}{2g} = \{ \begin{array}{l} Flujo\ axial \\ w_{2m} = w_{1m} \end{array} \} = \frac{w_{2u}^2 - w_{1u}^2}{2g} \\ i_0 - i_B = \frac{u(c_{1u} + c_{2u})}{g} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{w_{2u}^2 - w_{1u}^2}{2u(c_{1u} + c_{2u})} = \frac{(w_{2u} + w_{1u})(w_{2u} - w_{1u})}{2u(c_{1u} + c_{2u})} = \left| \begin{array}{l} w_{1u} = c_{1u} - u \\ w_{2u} = u + c_{2u} \\ w_{1u} + w_{2u} = c_{1u} + c_{2u} \\ w_{2u} - w_{1u} = 2u - c_{1u} + c_{2u} \end{array} \right| = \frac{w_{2u} - w_{1u}}{2u} = 1 - \frac{c_{1u} - c_{2u}}{2u}$$

Entre estos coeficientes adimensionales existen unas relaciones que tienen interés cuando la turbomáquina funciona fuera del punto de diseño; para flujo axial, $\vec{c}_{1m} = \vec{c}_{2m} = \vec{w}_{1m} = \vec{w}_{2m} = \vec{c}_m$, coeficientes que se pueden poner en función de diversos ángulos que participan en el cálculo de la máquina;

$$\sigma = \frac{w_{2u} - w_{1u}}{2u} = \left| \begin{array}{l} w_{1u} = c_{1u} - u = w_{1m}\ cotg\,\beta_1 = c_{1m}\ cotg\,\alpha_1 - u = c_m\ cotg\,\alpha_1 - u \\ w_{2u} = c_{2u} + u = w_{2m}\ cotg\,\beta_2 = c_{2m}\ cotg\,\alpha_2 + u = c_m\ cotg\,\alpha_2 + u \end{array} \right| =$$

$$= \frac{c_{2m}\,cotg\,\alpha_2 - c_{1m}\,cotg\,\alpha_1 + 2\,u}{2\,u} = 1 + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\alpha_2 - cotg\,\alpha_1) = 1 + \frac{\Phi}{2}\,(cotg\,\alpha_2 - cotg\,\alpha_1)$$

$$\sigma = \frac{w_{2u} - w_{1u}}{2\,u} = \frac{w_{2m}\,cotg\,\beta_2 - w_{1m}\,cotg\,\beta_1}{2\,u} = \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\beta_1)$$

$$\sigma = \frac{w_{2u} - w_{1u}}{2\,u} = \frac{w_{2m}\,cotg\,\beta_2 - (c_{1m}\,cotg\,\alpha_1 - u)}{2\,u} = \frac{1}{2} + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\alpha_1)$$

que, se resumen en:

$$\sigma = 1 + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\alpha_2 - cotg\,\alpha_1) = \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\beta_1) = \frac{1}{2} + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\alpha_1)$$

y que permiten hallar, para flujo axial, los ángulos β_1 y β_2, en la forma:

$$1 + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\alpha_2 - cotg\,\alpha_1) = \frac{1}{2} + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\alpha_1) \quad \Rightarrow \quad cotg\,\beta_2 = cotg\,\alpha_2 + \frac{u}{c_m}$$

$$\frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\beta_1) = \frac{1}{2} + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\alpha_1) \quad \Rightarrow \quad cotg\,\beta_1 = cotg\,\alpha_1 - \frac{u}{c_m}$$

Otras relaciones entre estos parámetros son:

$$c_{1u} + c_{2u} = w_{1u} + w_{2u} = c_m\,(cotg\,\alpha_2 + cotg\,\alpha_1) = c_m\,(cotg\,\beta_2 + cotg\,\beta_1)$$

$$\Psi = \frac{T}{u^2/g} = \frac{c_m}{u}\,(cotg\,\alpha_1 + cotg\,\alpha_2) = \Phi\,(cotg\,\alpha_1 + cotg\,\alpha_2) = \Phi\,(cotg\,\beta_1 + cotg\,\beta_2)$$

que junto con

$$\sigma = 1 + \frac{\Phi}{2}\,(cotg\,\alpha_2 - cotg\,\alpha_1)$$

conforman un sistema de dos ecuaciones, de las que se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= \Phi\,(cotg\,\alpha_1 + cotg\,\alpha_2) \\ \sigma &= 1 + \frac{\Phi}{2}\,(cotg\,\alpha_2 - cotg\,\alpha_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} cotg\,\alpha_1 + cotg\,\alpha_2 &= \frac{\Psi}{\Phi} \\ cotg\,\alpha_2 - cotg\,\alpha_1 &= \frac{2\,(\sigma - 1)}{\Phi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 2\,cotg\,\alpha_2 &= \frac{\Psi}{\Phi} + \frac{2\,(\sigma - 1)}{\Phi} \quad ; \quad cotg\,\alpha_2 = \frac{\Psi + 2\,(\sigma - 1)}{2\,\Phi} \\ 2\,cotg\,\alpha_1 &= \frac{\Psi}{\Phi} - \frac{2\,(\sigma - 1)}{\Phi} \quad ; \quad cotg\,a_1 = \frac{\Psi - 2\,(\sigma - 1)}{2\,\Phi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Psi = 2\,(\sigma - 1) + 2\,\Phi\,cotg\,\alpha_1$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= \Phi\,(cotg\,\beta_2 + cotg\,\beta_1) \\ \sigma &= \frac{\Phi}{2}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\beta_1) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} cotg\,\beta_1 &= \frac{\Psi - 2\,\sigma}{2\,\Phi} = cotg\,\alpha_1 - \frac{u}{c_m} \\ cotg\,\beta_2 &= \frac{\Psi + 2\,\sigma}{2\,\Phi} = cotg\,\alpha_2 + \frac{u}{c_m} \end{aligned}\right.$$

ecuaciones ya deducidas anteriormente.

Para que quede definido el *tamaño*, es necesario añadir otra magnitud que puede ser el salto entálpico total del escalonamiento Δi o la velocidad tangencial del álabe $\vec{u}$.

I.3.- DISEÑO BÁSICO DE LOS ESCALONAMIENTOS DE TURBINAS AXIALES

Los diseños básicos de los escalonamientos de turbinas axiales pueden ser:

Grado de reacción cero
Grado de reacción 0,5
Velocidad de salida axial y grado de reacción cualquiera

Sin embargo no hay que limitarse a emplear sólo estos diseños básicos, por cuanto en el diseño tridimensional empleado para álabes con relación (base-punta) baja, y álabes torsionados, la reacción puede variar a lo largo del álabe (torbellino libre).

Grado de reacción σ **= 0** *(Escalonamiento de acción).-* De la definición de grado de reacción y de las expresiones desarrolladas para $\sigma = 0$, se tiene:

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = i_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w_2 = w_1 & \textit{(sin rozamiento)} \\ w_2 = \psi\, w_1 & \textit{(con rozamiento)} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2 = 2\,\beta_2$$

$$\sigma = \frac{c_m}{2\,u}\,(\mathrm{cotg}\,\beta_2 - \mathrm{cotg}\,\beta_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \beta_1\,,\ \textit{álabes simétricos}$$

$$\Psi = 2\,(\sigma - 1) + 2\,\Phi\,\mathrm{cotg}\,\alpha_1 = 2\,(\Phi\,\mathrm{cotg}\,\alpha_1 - 1) = 2\,\Phi\,\mathrm{cotg}\,\beta_2$$

siempre que c_{2m}= *Cte*, con excepción de algún caso especial, como el escalonamiento de regulación de las turbinas de vapor (corona simple de acción o turbina Curtis).

En las turbinas de vapor de acción de pequeña y media potencia, el salto entálpico asignado al primer escalonamiento de acción resulta excesivo, por lo que se sustituye por un doble escalonamiento Curtis que permite la admisión parcial; *a esta corona Curtis se la conoce como corona de regulación*, ya que en ella se verifica la regulación cuantitativa de la turbina, por la regulación del gasto de vapor que ejerce la tobera. Si el flujo es isentrópico la presión se mantiene constante en el rotor y el escalonamiento de reacción cero se corresponde con un escalonamiento de presión constante en el rotor, que se conoce como *escalonamiento de acción*. *Los escalonamientos de p = Cte en el rotor con flujo no isentrópico, tienen reacción negativa, es decir, disminuye la velocidad relativa en el rotor.*

$$\textit{Para:} \begin{cases} \Phi = 0\ ;\ \Psi = -2 \\ \Psi = 0\ ;\ \Phi\,\mathrm{cotg}\,\alpha_1 = 1\ ;\ \ \Phi = \mathrm{tg}\,\alpha_1 \end{cases}$$

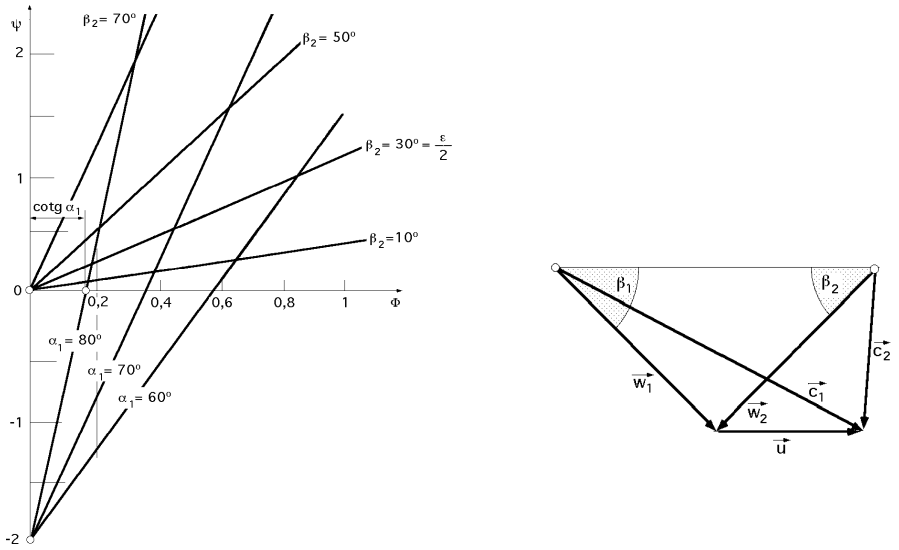


Fig I.3.- Triángulos de velocidades sin pérdidas, con σ = 0

Grado de reacción,* σ *= 0,5.- Para este valor del grado de reacción, Fig I.4, se tiene:

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\beta_2 - cotg\,\alpha_1) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \alpha_1\text{, triángulos de velocidades simétricos}$$

$$\Psi = 2\,(\sigma - 1) + 2\,\Phi\,cotg\,\alpha_1 = 2\,\Phi\,cotg\,\alpha_1 - 1 = 2\,\Phi\,cotg\,\beta_2 - 1$$

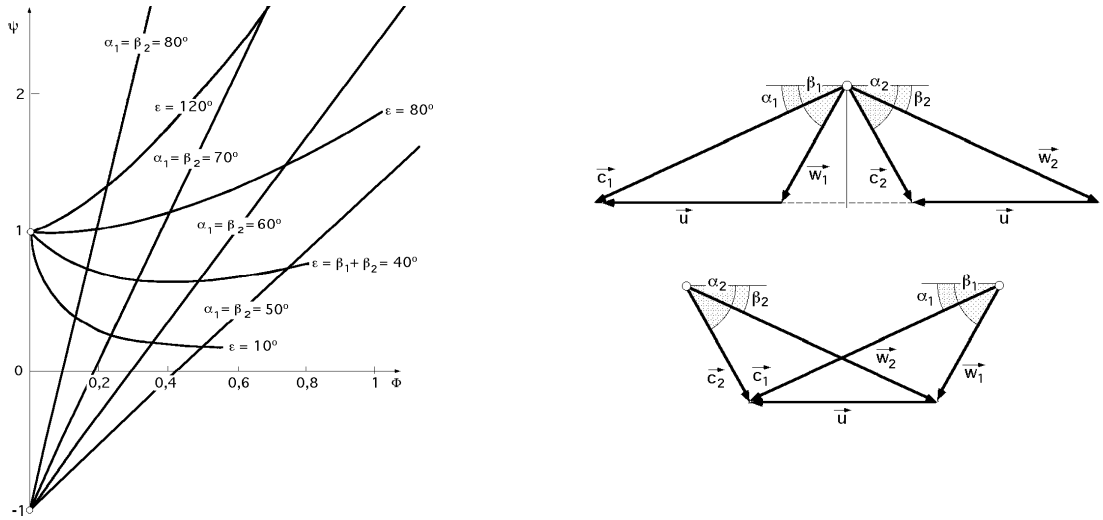


Fig I.4.- Triángulos de velocidades sin pérdidas,con grado de reacción 0,5

Velocidad de salida c_2 axial.- En este caso, $\alpha_2 = 90º$, Fig I.5, por lo que:

$$\sigma = 1 + \frac{c_m}{2\,u}\,(cotg\,\alpha_2 - cotg\,\alpha_1) = \left|\,\alpha_2 = 90^o\,\right| = 1 - \frac{c_m}{2\,u}\,cotg\,\alpha_1 = 1 - \frac{c_n}{2\,u} = 1 - \frac{\Phi}{2}\,cotg\,\alpha_1$$

$$\Psi = 2\,\Phi\,cotg\,\alpha_1 + 2\,(\sigma - 1) = 2\,\Phi\,cotg\,\alpha_1 + 2\,(1 - \frac{\Phi}{2}\,cotg\,\alpha_1 - 1) = \Phi\,cotg\,\alpha_1 = \left|\begin{array}{l} \sigma = 1 - \dfrac{\Phi\,cotg\,\alpha_1}{2} \\ \Phi\,cotg\,\alpha_1 = 2\,(1 - \sigma) \end{array}\right| =$$

$$= 2\,(1 - \sigma) = \Phi\ cotg\ \beta_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad cotg\ \beta_2 = \frac{\Psi + 2\,\sigma}{2\,\Phi} \quad ; \quad \Phi = tg\ \beta_2$$

$$Para, \begin{cases} \sigma = 0 \ ; \ \Psi = 2 \ ; \ cotg\ \beta_1 = cotg\ \beta_2 = \dfrac{u}{c_m} \ ; \ T = \dfrac{2\,u^2}{g} \\ \sigma = 0{,}5 \ ; \ \Psi = 1 \ ; \ cotg\ \beta_2 = cotg\ \alpha_1 = \dfrac{u}{c_m} \ ; \ T = \dfrac{u^2}{g} \end{cases}$$

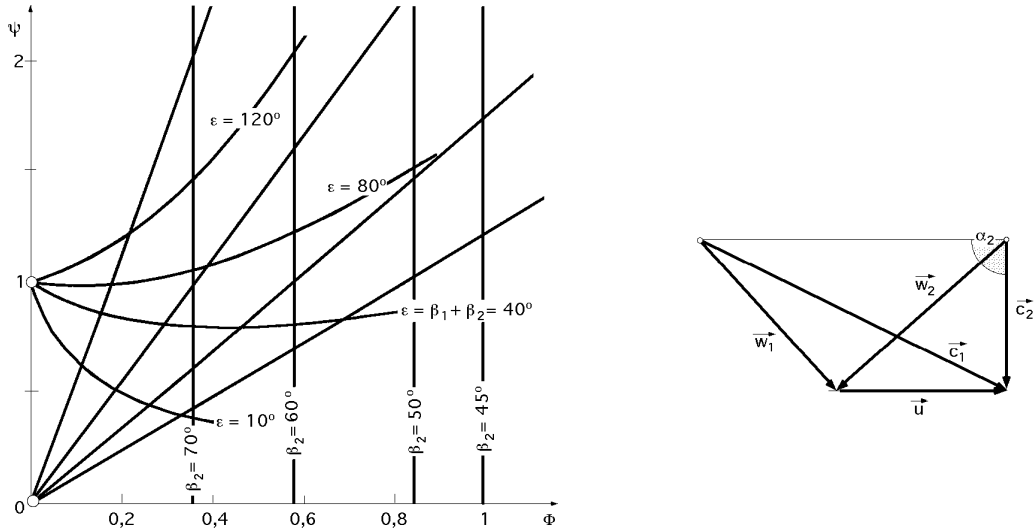


Fig I.5.- Triángulos de velocidades sin pérdidas, con un ángulo de salida $\alpha_2 = 90°$

Se observa que con velocidad de salida axial no es posible obtener valores de $\Psi > 2$, a menos que la reacción sea negativa, es decir, a menos que disminuya la velocidad relativa en el rotor (acción).

I.4.- TRIÁNGULOS DE VELOCIDADES EN FUNCIÓN DEL GRADO DE REACCIÓN

El grado de reacción para un escalón compuesto por distribuidor y corona, se define en la forma:

$$\sigma = \frac{\Delta i_{corona}}{\Delta i_{escalón}} = \frac{\Delta i_{corona}}{\Delta i_{ad}} = \frac{i_A - i_B}{i_0 - i_B}$$

por lo que:

$$\frac{\Delta i_{ad}}{1} = \frac{\Delta i_{corona}}{\sigma} = \frac{\Delta i_{dist}}{1 - \sigma} = \frac{\left(\frac{c_1^2}{\varphi^2} - c_0^2\right)}{2\,g\,(1 - \sigma)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta i_{corona} = \dfrac{\sigma}{2\,g\,(1 - \sigma)}\left(\dfrac{c_1^2}{\varphi^2} - c_0^2\right) = \sigma\ \Delta i_{ad} \\ \Delta i_{dist} = \dfrac{1}{2\,g}\left(\dfrac{c_1^2}{\varphi^2} - c_0^2\right) = (1 - \sigma)\ \Delta i_{ad} \end{cases}$$

$$c_1 = \varphi_1\ \sqrt{c_0^2 + 2\,g\,\Delta i_{dist}} = \varphi_1\ \sqrt{c_0^2 + 2\,g\,(1 - \sigma)\,\Delta i_{ad}}$$

en la que $\vec{c}_0$ es la velocidad de alimentación del escalón.

El valor de $\vec{w}_2$ se obtiene, asumiendo que el salto entálpico $(i_A - i_B) \approx (i_c - i_h)$, lo que es aproximado siempre que la diferencia de presiones correspondientes al escalón sea pequeña:

- *Para* $\psi < 1$

$$w_2 = \psi\ w_{2t} = \psi\ \sqrt{w_1^2 + 2\,g\,\sigma\ \Delta i_{ad.}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \Delta i_{ad} = \dfrac{c_{1t}^2 - c_0^2}{2\,g\,(1-\sigma)} = \dfrac{1}{2\,g\,(1-\sigma)}\left(\dfrac{c_1^2}{\varphi^2} - c_0^2\right) \\ w_1 = \dfrac{c_1\ \cos\alpha_1 - u}{\cos\beta_1} \end{array} \right| = \psi\ \sqrt{\left(\frac{c_1\ \cos\alpha_1 - u}{\cos\beta_1}\right)^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{c_1^2}{\varphi^2} - c_0^2\right)}$$

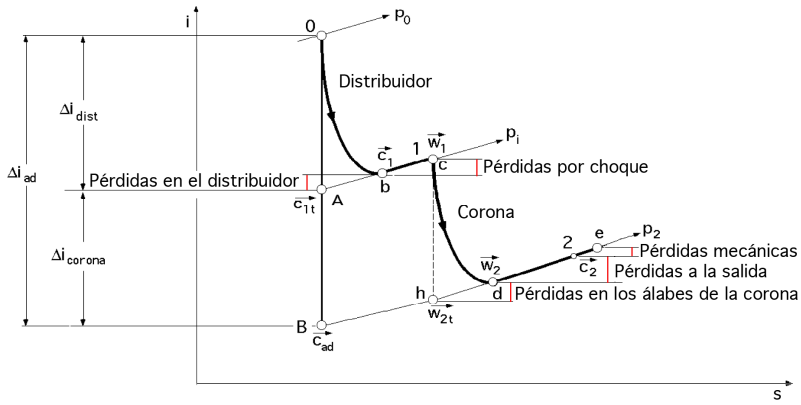


Fig I.6.- Diagrama (entalpía-entropía) de un escalonamiento

- *Para* $\psi = 1$

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 + 2\,g\,\Delta i_{corona}} = \left| \begin{array}{l} \Delta i_{corona} = \dfrac{\sigma}{2\,g\,(1-\sigma)}\left(\dfrac{c_1^2}{\varphi^2} - c_0^2\right) \\ w_1^2 = c_1^2 + u^2 - 2\,u\,c_1 \cos\alpha_1 \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{c_1^2\ \left(1 + \frac{\sigma}{(1-\sigma)\,\varphi^2}\right) + u^2 - 2\,u\,c_1\ \cos\alpha_1 - \frac{\sigma\ c_0^2}{1-\sigma}}$$

y considerando, $\varphi = 1$, $\dfrac{c_0^2}{c_1^2} \approx 0$ y la condición de rendimiento máximo $\alpha_2 = 90^o$, se tiene:

$$w_2^2 = \frac{c_1^2}{1-\sigma} + u^2 - 2\,u\,c_1\ \cos\alpha_1 = \left| w_2^2 = u^2 + c_2^2 = u^2 + c_{2m}^2 = u^2 + c_{1m}^2 \right| = u^2 + (c_1\ sen\ \alpha_1)^2$$

$$\frac{c_1^2}{1-\sigma} + u^2 - 2\,u\,c_1\ \cos\alpha_1 = u^2 + (c_1\ sen\ \alpha_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-\sigma} - 2\,\xi\ \cos\alpha_1 = sen^2\alpha_1$$

despejándose la relación cinemática ξ:

$$\xi = \frac{1 - sen^2\alpha_1 + \sigma\ sen^2\alpha_1}{2\ (1-\sigma)\ cos\ \alpha_1} = \frac{cos^2\alpha_1 + \sigma\ sen^2\alpha_1}{2\ (1-\sigma)\ cos\ \alpha_1} = \frac{cos\ \alpha_1 + \sigma\ sen\ \alpha_1\ tg\ \alpha_1\ \frac{cos\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1}}{2(1-\sigma)} = \frac{cos\ \alpha_1\ (1 + \sigma\ tg^2\alpha_1)}{2(1-\sigma)}$$

Trabajo interno.- Sabemos es de la forma $T_{int} = \frac{u}{g}\ (c_{1u} + c_{2u})$, siendo:

$c_{1n} = c_1\ cos\ \alpha_1$

$$c_{2u} = w_{2u} - u = \psi\ cos\ \beta_2 \sqrt{(\frac{c_1\ cos\ \alpha_1 - u}{cos\ \beta_1})^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\ (\frac{c_1^2}{\varphi^2} - c_0^2)} - u =$$

$$= \psi\ c_1\ cos\ \beta_2 \sqrt{(\frac{cos\ \alpha_1 - \xi}{cos\ \beta_1})^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\ (\frac{1}{\varphi^2} - \frac{c_0^2}{c_1^2})} - u = \left| Y = \sqrt{(\frac{cos\ \alpha_1 - \xi}{cos\ \beta_1})^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\ (\frac{1}{\varphi^2} - \frac{c_0^2}{c_1^2})} \right| = \psi\ c_1\ cos\ \beta_2\ Y - u$$

por lo que, sustituyéndolas se tiene:

$$T_{int} = \frac{u}{g}\ (c_{1u} + c_{2u}) = \frac{u}{g}\ (c_1\ cos\ \alpha_1 + \psi\ c_1\ cos\ \beta_2\ Y - u) = \frac{c_1^2\ \xi}{g}\ (cos\ \alpha_1 + \psi\ Y cos\ \beta_2 - \xi)$$

Rendimiento útil

$$\eta_{útil} = \frac{T_{int}}{T_{ad}} = \frac{\frac{c_1^2\ \xi}{g}\ (cos\ \alpha_1 + \psi\ Y cos\ \beta_2 - \xi)}{\frac{1}{2\ g\ (1-\sigma)}\ (\frac{c_1^2}{\varphi^2} - c_0^2)} = \ ... \ = \frac{2\ \varphi^2\ \xi\ (cos\ \alpha_1 + \psi\ Y cos\ \beta_2 - \xi)\ (1-\sigma)}{1 - \frac{\varphi^2\ c_0^2}{c_1^2}}$$

Relación cinemática óptima.- Se obtiene haciendo $c_{2n} = 0$

$$\xi_{ópt} = \frac{u}{c_1} = \psi\ Y cos\ \beta_2 = \psi\ cos\ \beta_2 \sqrt{(\frac{cos\ \alpha_1 - \xi_{ópt}}{cos\ \beta_1})^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\ (\frac{1}{\varphi^2} - \frac{c_0^2}{c_1^2})}$$

que es una ecuación de 2º grado en $\xi_{ópt}$.

Con las ecuaciones obtenidas se pueden estudiar casos particulares, sin tener que partir de ningún tipo de hipótesis inicial restrictiva, pudiéndose hacer las siguientes simplificaciones:

$$-\frac{c_0^2}{c_1^2} \approx 0,\ por\ ser,\ c_0 << c_1 \quad \Rightarrow \quad \xi_{ópt} = \psi\ cos\ \beta_2 \sqrt{(\frac{cos\ \alpha_1 - \xi_{ópt}}{cos\ \beta_1})^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\ \frac{1}{\varphi^2}}$$

- Para un escalón de acción $\sigma = 0$, y álabes no simétricos, se obtiene:

$$\xi_{ópt} = \psi\ cos\ \beta_2 \sqrt{(\frac{cos\ \alpha_1 - \xi_{ópt}}{cos\ \beta_1})^2} \quad \Rightarrow \quad \xi_{ópt} = \frac{\psi\ cos\ \beta_2\ cos\ \alpha_1}{cos\ \beta_1 + \psi\ cos\ \beta_2} = \frac{\psi\ \frac{cos\ \beta_2}{cos\ \beta_1}}{1 + \psi\ \frac{cos\ \beta_2}{cos\ \beta_1}}\ cos\ \alpha_1$$

- Para un escalón de acción $\sigma = 0$, y álabes simétricos, se tiene: $\xi_{ópt} = \frac{\psi}{1 + \psi} \cos \alpha_1$

- Si se considera $\psi = 1$, resulta: $\xi_{ópt} = \frac{\cos \alpha_1}{2}$