III.- EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO RELATIVOS

pfernandezdiez.es

III.1.- EQUILIBRIO RELATIVO DE LÍQUIDOS QUE SE TRASLADAN

Hasta ahora se ha considerado, para el cálculo de superficies de nivel y de presión en un punto interior de un fluido, que éste se encontraba en reposo, o bien, que podía estar en movimiento uniforme, sin ninguna aceleración. Sin embargo, cuando el fluido se encuentra en el interior de un recipiente, sin ocuparlo en su totalidad, y por lo tanto, con completa libertad de movimiento para desplazarse por el interior del mismo, y el recipiente se mueve con un movimiento acelerado o retardado, se observa que el líquido va tomando una cierta inclinación que depende de la aceleración a que se halla sometido el sistema.

Para su estudio supondremos un depósito prismático con una cierta cantidad de líquido; una partícula del mismo estará sometida a dos tipos de fuerzas, tal como se indica en la Fig III.1, es decir, la fuerza debida a la aceleración del movimiento y la fuerza debida a la aceleración de la gravedad. Ambas fuerzas se pueden proyectar sobre los ejes, obteniéndose:

$$\begin{cases} X = \sum X_i = 0 - a = - a \\ Y = \sum Y_i = 0 - 0 = 0 \\ Z = \sum Z_i = - g + 0 = - g \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones fundamentales, se tiene:

$$\frac{dp}{\rho} = - a\, dx - g\, dz \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\gamma} = - a\, dx - g\, dz + K$$

que es la presión existente en un punto de coordenadas (x,y,z), y:

$$- a\, dx - g\, dz = 0 \quad \Rightarrow \quad - a\, x - g\, z = K'$$

que es la ecuación de las superficies de nivel.

Para su resolución se tienen que determinar los valores de K y K'.

La expresión: $- a\, x - g\, z = K'$, es la ecuación algebraica de un plano, oblicuo respecto el anterior,

que determina una nueva forma de distribución del fluido dentro del recipiente; para fluidos perfectos, se llega a la conclusión de que el volumen primitivo y el final, son iguales, por cuanto la parte de fluido que ha sido desplazada *hacia arriba*, es igual a la que ha sido desplazada *hacia abajo*, respecto a la superficie libre inicial horizontal del líquido, correspondiéndose el punto de intersección de ambas superficies con la mitad de la superficie libre del fluido.

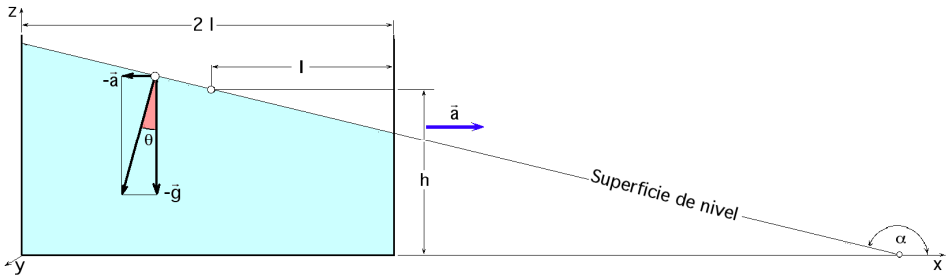

Fig III.1.- Equilibrio relativo de un líquido que se traslada

Para calcular las constantes K y K' se tiene en cuenta que para: $\begin{cases} x = l \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad p = p_{atm}$, y sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones anteriores:

$$\frac{p_{atm}}{\rho} = - a\, l - g\, h + K \quad ; \quad K = \frac{p_{atm}}{\rho} + a\, l + g\, h \quad ; \quad K' = - a\, l - g\, h$$

por lo que:

$$\frac{p}{\rho} = - a\, x - g\, z + \frac{p_{atm}}{\rho} + a\, l + g\, h = a\,(l - x) + g\,(h - z) + \frac{p_{atm}}{\rho}$$

$$- a\, x - g\, z = - a\, l - g\, h \quad ; \quad a\,(l - x) + g\,(h - z) = 0$$

quedando así determinadas la presión en cualquier punto y las superficies de nivel.

Cálculo del ángulo que forma la nueva superficie libre con la inicial, paralela al eje Ox.- La ecuación del plano que forma ángulos, α, β, γ, con los coordenados es:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = Cte$$

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

que son los cosenos directores de dicho plano, que es la superficie de nivel final.

La ecuación del plano de la superficie de nivel es:

$$a\,(l - x) + g\,(h - z) = 0 \quad ; \quad a\, x + g\, z - a\, l - g\, h = 0$$

e identificándola con: $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$, resulta: $\begin{cases} a = A \\ 0 = B \\ g = C \end{cases} \Rightarrow \quad - a\,l - g\,h = D$

$$\cos\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + g^2}} \quad ; \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + g^2}} = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{g}{\pm a} \quad ; \quad tg\,\beta = 0 \quad ; \quad tg\,\gamma = \frac{\pm a}{g}$$

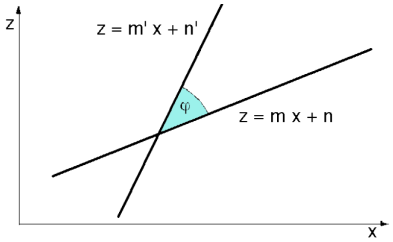

Fig III.2

Teniendo en cuenta la Fig III.2:

$$tg\,\varphi = \frac{m - m'}{1 + mm'} \quad ; \quad \varphi = 90^o \quad \Rightarrow \quad 1 + mm' = 0$$

$$tg\,\theta = \frac{a}{g} \quad ; \quad tg\,\theta\; tg\,\alpha = \pm 1 \quad ; \quad tg\,\theta = \frac{1}{\pm tg\,\alpha}$$

por lo que la resultante de las componentes de las fuerzas que actúan sobre el líquido, es perpendicular a la superficie de nivel final.

III.2.- EQUILIBRIO RELATIVO DE LÍQUIDOS QUE GIRAN ALREDEDOR DE UN EJE VERTICAL

Supongamos un recipiente cilíndrico, vertical, que está lleno de un determinado líquido hasta una cierta altura h; si se hace girar dicho cilindro alrededor de un eje vertical, la superficie libre del fluido cambiará de forma. El problema consiste en determinar la forma que adoptará la superficie libre, y la presión en cada punto del líquido, cuando el cilindro que lo contiene gire alrededor de su propio eje.

Para los cálculos supondremos un sistema cartesiano de forma que el eje de giro coincida con el eje z, y la base del cilindro esté contenida en el plano (x,y).

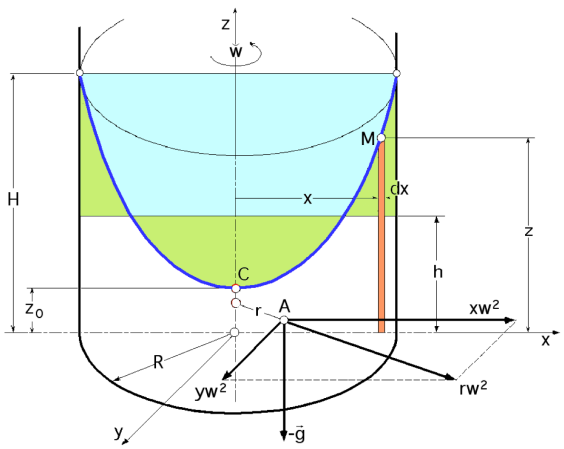

Fig III.3.- Equilibrio relativo de líquidos que giran alrededor de un eje vertical

Al girar el recipiente con una velocidad angular $\vec{w}$, cada uno de los puntos del líquido estará sometido a la acción de dos fuerzas, $\begin{cases} \text{la centrífuga, } r w^2 \\ \text{la gravedad, } - g \end{cases}$, Fig III.3.

Las componentes de la resultante de estas fuerzas son:

$$\begin{cases} X = \sum X_i = x\,w^2 \\ Y = \sum Y_i = y\,w^2 \\ Z = \sum Z_i = - g \end{cases}$$

que sustituidas en la ecuación fundamental, resulta:

$$\frac{dp}{\rho} = x\,w^2 dx + y\,w^2 dy - g\,dz \quad ; \quad x\,w^2 dx + y\,w^2 dy - g\,dz = 0$$

e integradas, permiten calcular la $\begin{cases} \text{presión en cada punto del líquido, } \dfrac{p}{\rho} = w^2\,\dfrac{x^2}{2} + w^2\,\dfrac{y^2}{2} - g\,z + K \\ \text{superficie de nivel, } w^2\,\dfrac{x^2}{2} + w^2\,\dfrac{y^2}{2} - g\,z = K' \end{cases}$

La ecuación de la superficie de nivel es un paraboloide de revolución de eje vertical, que coincide con el eje del cilindro; cuando se la corta por el plano (y = 0) es una parábola.

Para calcular las constantes de integración K y K' tomamos un punto de la superficie de nivel, por ejemplo, el $(0, 0, z_0)$ que soporta exactamente la presión atmosférica.

Para el punto C se tiene: $\begin{cases} x = 0,\ y = 0,\ z = z_0\ ,\ p = p_{atm} \\ \dfrac{p_{atm}}{\rho} = -\,g\,z_0 + K \ \Rightarrow \quad K = \dfrac{p_{atm}}{\rho} + g\,z_0 \quad ; \quad K' = -\,g\,z_0 \end{cases}$, luego:

$$\frac{p}{\rho} = w^2\,\frac{x^2}{2} + w^2\,\frac{y^2}{2} - g\,z + \frac{p_{atm}}{\rho} + g\,z_0$$

que permite calcular la presión en cualquier punto del líquido.

La ecuación de las superficies de nivel es:

$$w^2\,\frac{x^2}{2} + w^2\,\frac{y^2}{2} - g\,z + g\,z_0 = 0$$

Para determinar el valor de z_0 se considera que el volumen del fluido es el mismo si está en movi-miento, como si está en reposo, es decir:

$$V_{inicial} = V_{final} \quad ; \quad \begin{cases} V_{inic.} = \pi\,R^2\,h \\ V_{fin} = \int 2\,\pi\,x\,z\,dx \end{cases}$$

$$V_{final} = \int 2\,\pi\,x\,z\,dx = \left| \begin{array}{c} Para:\ y = 0 \\ z = z_0 + \dfrac{w^2\,x^2}{2\,g} \end{array} \right| = \int_0^R 2\,\pi\,x\,(z_0 + \frac{w^2 x^2}{2\,g})\,dx =$$

$$= (2\,\pi\,z_0\,\frac{x^2}{2} + \frac{2\,\pi\,w^2}{2\,g}\,\frac{x^4}{2})_0^R = \pi\,z_0\,R^2 + \frac{\pi\,w^2\,R^4}{4\,g}$$

$$\pi\,R^2 h = \int 2\,\pi\,x\,z\,dx = \pi\,z_0\,R^2 + \frac{\pi\,w^2\,R^4}{4\,g} \quad \Rightarrow \quad z_0 = h - \frac{w^2\,R^2}{4\,g}$$

y sustituida en las ecuaciones de presión y superficie de nivel, permite obtener:

$$p = p_{atm} + \frac{\rho\,w^2}{2}\,x^2 + \frac{\rho\,w^2}{2}\,y^2 - \rho\,g\,(z - h + \frac{w^2 R^2}{4\,g})$$

$$\frac{w^2}{2}\,x^2 + \frac{w^2}{2}\,y^2 - g\,(z - h + \frac{w^2\,R^2}{4\,g}) = 0$$

Las condiciones del punto H son $\begin{cases} x = R\,,\, y = 0\,,\, z = H \\ p = p_{atm} \end{cases}$; la altura máxima H que alcanza el líquido dentro del recipiente se obtiene sustituyendo estos valores en la ecuación de la superficie de nivel:

$$\frac{w^2}{2}\,R^2 + 0 - g\,(H - h + \frac{w^2 R^2}{4\,g}) = 0 \quad ; \quad \frac{w^2 R^2}{4} - g\,(H - h) = 0 \quad ; \quad H = h + \frac{w^2 R^2}{4\,g}$$

que es la altura máxima H alcanzada por el líquido y que, teniendo presente el valor deducido para z_0, permite afirmar que el líquido asciende tanto como desciende, a partir del nivel inicial.

III.3.- MOVIMIENTO RELATIVO DE LÍQUIDOS QUE GIRAN ALREDEDOR DE UN EJE HORIZONTAL

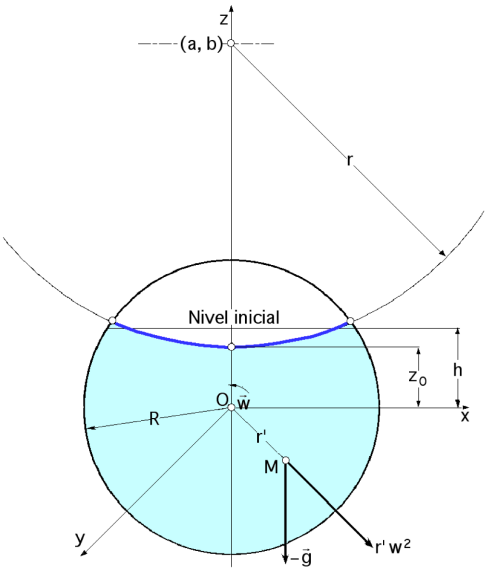

Fig III.4.- Superficie de nivel de líquidos que giran alrededor de un eje horizontal

Supongamos un recipiente cilíndrico con el eje horizontal, que le haremos coincidir con el eje Oy, Fig III.4, que está lleno de líquido hasta una cierta altura; se hace girar dicho cilindro alrededor del eje Oy, y se observa que la superficie libre del líquido cambia de posición y de forma.

En primer lugar vamos a analizar la forma y presión en cada punto, en el supuesto de masa unidad; las componentes de las fuerzas resultantes son $\begin{cases} X = \sum X_i = x\,w^2 \\ Y = \sum Y_i = 0 \\ Z = \sum Z_i = -g + z\,w^2 \end{cases}$, valores que sustituidos en las ecuaciones generales permiten obtener:

$$\frac{dp}{\rho} = x\,w^2\,dx + (-g + z\,w^2)\,dz \xrightarrow{\text{Integrando}} \frac{p}{\rho} = \frac{x^2}{2}\,w^2 + (-g\,z + \frac{z^2}{2}\,w^2)$$

$$x\,w^2\,dx + (-g + z\,w^2)\,dz = 0 \xrightarrow{\text{Integrando}} \frac{x^2}{2}\,w^2 + (-g\,z + \frac{z^2}{2}\,w^2) = K' \Rightarrow x^2 + z^2 - \frac{2\,g}{w^2}\,z = \frac{2\,K'}{w^2}$$

que es la ecuación de una circunferencia, Fig III.4.

Las coordenadas del centro se obtienen comparándola con la ecuación:

$$(x - a)^2 + (z - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + z^2 - 2\,a\,x + a^2 - 2\,b\,z + b^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = g/w^2 \end{cases}$$

El valor del radio es: $r^2 = b^2 + \frac{2\,k'}{w^2} = \frac{g^2}{w^4} + \frac{2\,k'}{w^2}$; $r = \frac{\sqrt{(g^2/w^2) + 2\,k'}}{w}$

Para hallar su punto inferior z_0 tendremos en cuenta que: $b - r = \frac{g}{w^2} - r = z_0$, y para determinar los puntos de corte de las dos circunferencias, la del depósito y la de la superficie de nivel:

$$x^2 + z^2 = R^2 = \frac{2\,g}{w^2}\,z + \frac{2\,K'}{w^2} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{2}{w^2}\,(g\,z + K') \quad ; \quad z = \frac{R^2 w^2}{2\,g} - \frac{K'}{g}$$

Como resultado de lo expuesto, se tiene que:

a) Para: $w = 0$, el radio de la superficie de nivel es (∞)

b) Para: $w \to \infty$, las superficies de nivel toman la forma de circunferencias concéntricas con el centro de la sección transversal del recipiente

III.4.- MOVIMIENTO RELATIVO DE LÍQUIDOS CON VELOCIDAD TANGENCIAL CONSTANTE SOBRE UN EJE VERTICAL

Cuando se estudia la forma que adoptará la superficie libre de un río o un canal, al circular por una curva, se observa que deja de ser horizontal, para convertirse en una superficie curva, Fig III.5, por cuanto en el momento en que el agua pasa por dicha curva, estará sometida a un giro alrededor de un eje vertical, por lo que aparecerán unas fuerzas centrífugas que, al actuar sobre cada uno de los puntos de la masa fluida, harán variar la presión en cada punto del mismo, modificándose, como consecuencia directa de ello, la superficie libre del líquido. Asimismo habrá que tener en cuenta que, la velocidad de cada una de las partículas del líquido será diferente según se encuentre situada en la parte interior de la curva o en su parte exterior.

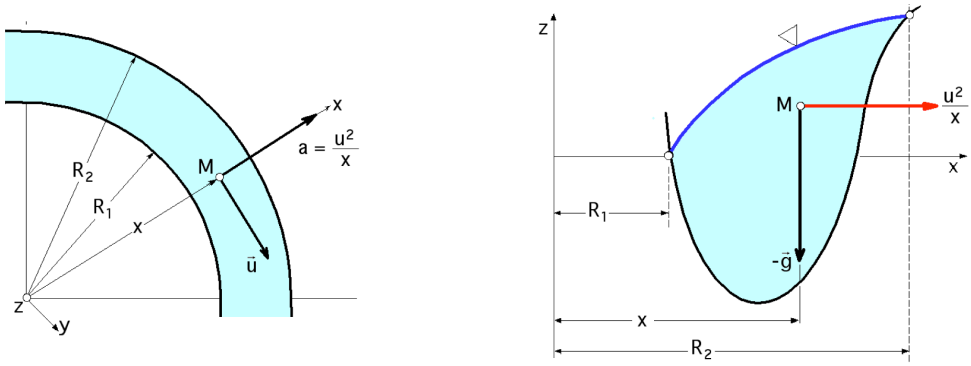

Fig III.5.- Equilibrio relativo de líquidos con velocidad tangencial constante alrededor de un eje vertical

Las componentes de las fuerzas que actúan en un instante determinado son:

$$X = \sum X_i = \frac{u^2}{x} \quad ; \quad Y = \sum Y_i = 0 \quad ; \quad Z = \sum Z_i = -\,g$$

por lo que la ecuación de las superficies de nivel es:

$$\frac{u^2}{x}\,dx - g\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2\ ln\,x - g\,z = K = \left| \begin{array}{c} z = 0\ ;\ x = R_1 \\ K = u^2\ ln\,R_1 \end{array} \right| = u^2\ ln\,R_1 \quad \Rightarrow \quad u^2\ ln\,\frac{x}{R_1} = g\,z$$

Para $x = R_2$ se obtiene el punto más elevado de la misma, $z_{máx} = \frac{u^2}{g}\ ln\ \frac{R_2}{R_1}$

Aplicación a canales.- Sea un canal de sección rectangular, Fig III.6, por el que circula agua, inicialmente hasta una altura h. El problema que se plantea es el de determinar la elevación del nivel del agua en la curva, sobre la pared exterior del canal. Aplicando las expresiones deducidas anteriormente, y tomando unos ejes coordenados de forma que el radio que anteriormente se consideraba co-mo incógnita, coincida ahora sobre el eje Ox, y trasladando dicho eje Ox para que pase por el fondo del canal, la ecuación de la superficie libre del fluido viene dada por:

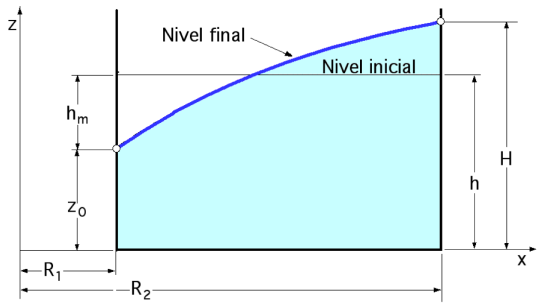

Fig III.6
Equilibrio relativo del giro del agua en un canal rectangular

$$z = z_0 + \frac{u^2}{g}\ ln \frac{x}{R_1}$$

e igualando la sección del tramo recto, con la que determina el fluido al circular, teniendo como perfil el dado por la curva anterior, se podrá poner:

$$(R_2 - R_1)\ h = \int z\ dx = \int_{R_1}^{R_2} (z_0 + \frac{u^2}{g}\ ln\ \frac{x}{R_1})\ dx = \left| \int ln\ x\ dx = x\ ln\ x - x \right| =$$

$$= z_0\ (R_2 - R_1) + \frac{u^2}{g}\ (R_2\ ln\ \frac{R_2}{R_1} - R_2 + R_1)$$

$$h = z_0 + \frac{u^2}{g}\ (\frac{R_2}{R_2 - R_1}\ ln\ \frac{R_2}{R_1} - 1) = z_0 + h_m$$

El punto más alto de la curva se obtiene haciendo $\begin{cases} x = R_2 \\ z = H \end{cases}$

$$H = z_0 + \frac{u^2}{g}\ ln\ \frac{R_2}{R_1} = h - \frac{u^2}{g}\ (\frac{R_2}{R_2 - R_1}\ ln\ \frac{R_2}{R_1} - 1) + \frac{u^2}{g}\ ln\ \frac{R_2}{R_1} = h - \frac{u^2}{g}\ (\frac{R_1}{R_2 - R_1}\ ln\ \frac{R_2}{R_1} - 1)$$

III.5.- ESFUERZO EJERCIDO POR UN FLUIDO SOBRE UNA PARED PLANA SUMERGIDA

Sea una superficie plana sumergida en un fluido S, Fig III.7, que forma un cierto ángulo a con la superficie libre del mismo, que para el caso de un fluido en reposo es horizontal, siendo p_G la presión en el centro de gravedad de la sección.

Considerando un elemento dw muy pequeño de dicha superficie plana, la presión que soporta es:

$$p = \gamma\ h = \gamma\ x\ sen\ \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\gamma} = x\ sen\ \alpha$$

que es la ecuación de una recta; se deduce que la presión p varía proporcionalmente con la distancia.

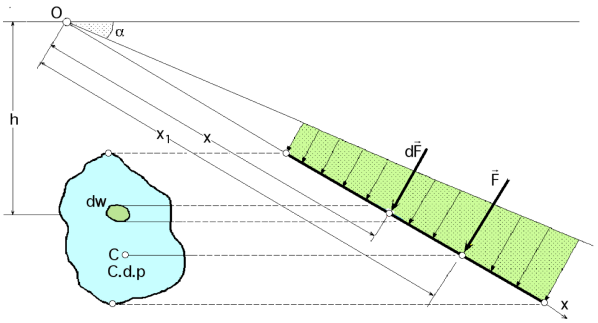

Fig III.7.- Pared plana sumergida

En dw actúa una fuerza diferencial $d\vec{F}$ debida a las presiones, de valor:

$$dF = p\, dw = \gamma\, x\, sen\, \alpha\, dw \xrightarrow{Integrando} F = \gamma\, sen\, \alpha \int x\, dw$$

en la que $\int x\, dw = S\, x_G$ es la expresión correspondiente al momento estático, por lo que:

$$F = \gamma\, S\, x_G\, sen\, \alpha = \gamma\, S\, h_G = p_G S\,,\ con \begin{cases} h_G = x_G\, sen\, \alpha \\ p_G = \gamma\, h_G \end{cases}$$

Al punto de aplicación de esta fuerza se le denomina *centro de presión*, c.d.p.; para su determinación haremos la siguiente consideración: *El esfuerzo total ejercido sobre la superficie S estará aplicado sobre un punto x_1 de la misma superficie plana, que es el centro de presión*

Para encontrar su posición, tomamos momentos respecto el punto O:

$$F\, x_1 = \int x\, dF = \int x\, (x\, \gamma\, sen\, \alpha\ \, dw) = \gamma\, sen\, \alpha \int x^2\, dw = \left| \int x^2\, dw = I_{yy'} \right| = \gamma\, sen\, \alpha\, I_{yy'}$$

$$y\ como:\ F = \gamma\, sen\, \alpha\, S\, x_G \quad \Rightarrow \quad \gamma\, sen\, \alpha\, S\, x_G\, x_1 = \gamma\, sen\, \alpha\, I_{yy'} \quad \Rightarrow \quad I_{yy'} = S\, x_G\, x_1$$

Aplicando el Teorema de Steiner:

$$I_{yy'} = I_{G_{yy'}} + S\, x_G^2 = S\, x_G\, x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{I_{G_{yy'}}}{S\, x_G} + x_G$$

que determina el punto de aplicación de la resultante de las presiones sobre la superficie plana, siendo I_G el m.d.i. de la superficie plana respecto al eje horizontal que pasa por su c.d.g.

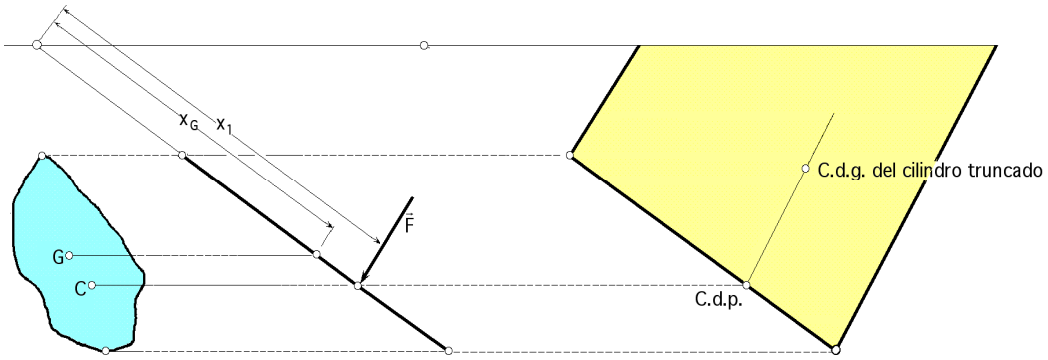

Fig III.8.- Centro de presión

La magnitud definida por $I_{G_{yy'}} / S\, x_G$ es siempre positiva, lo que supone que el centro de presión estará siempre por debajo del centro de gravedad de la superficie.

Para determinar gráficamente el c.d.p. se construye un cilindro de fluido cuya sección recta es la propia superficie S, Fig III.8, con sus generatrices normales a esta sección, cilindro que es cortado por la superficie libre. Se determina el c.d.g. de este cilindro de líquido y su proyección sobre la superficie plana S será el c.d.p. de la misma.

III.6.- ESFUERZO EJERCIDO POR UN LIQUIDO SOBRE UNA SUPERFICIE ALABEADA SUMERGIDA

Supongamos una superficie alabeada sumergida en un líquido, a la que para mayor comodidad vamos a intersectar por un plano cualquiera (x,z) como se muestra en la Fig III.9. Sobre cada elemento de esta superficie *dw* actúa una fuerza normal, de la forma:

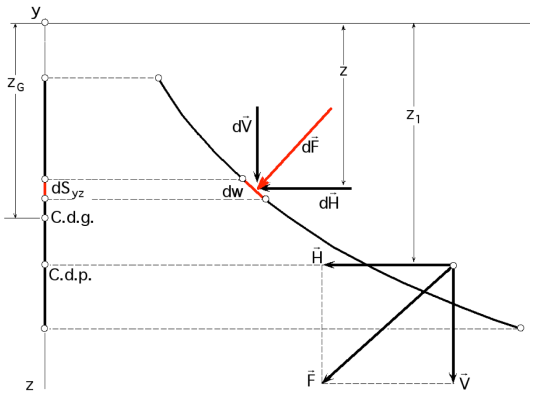

Fig III.9.- Pared alabeada sumergida

$$dF = p\ dw = \gamma\ z\ dw$$

que se puede descomponer en dos, una vertical $d\vec{V}$ y otra horizontal $d\vec{H}$ de forma que:

$$d\vec{F} = d\vec{V} + d\vec{H}$$

El esfuerzo horizontal es:

$$dH = dF\cos\alpha = \gamma\ z\ dw\ \cos\alpha = \gamma\ z\ dS_{yz}$$

$$H = \gamma \int z\, dS_{yz}$$

siendo dS_{yz} la proyección de la superficie alabeada elemental, sobre un plano vertical.

Como $\int z\, dS_{yz} = S_{yz}\ z_G$, es la expresión del momento estático con $p_G = \gamma\ z_G$, resulta:

$$H = \gamma\ z_G\ S_{yz} = p_G\ S_{yz}$$

siendo p_G la presión en el centro de gravedad, se puede poner:

Para determinar el punto de aplicación de la fuerza $\vec{H}$, consideramos que sobre la curva intersección actúa dicha fuerza, que es la misma que actuaría sobre una superficie vertical que fuese la proyección de dicha superficie o curva intersección equivalente, sobre el plano (y,z).

Tomando momentos respecto al eje (x-x), se tiene:

$$H\, z_1 = \int dH\, z = \int \gamma\ z\ dS_{yz} = g \int z^2\, dS_{yz} = \gamma\ I_{yy}$$

Mediante el Teorema de Steiner se obtiene el valor de z_1 en la forma:

$$I_{yy'} = I_{G_{yy'}} + S_{yz}\ z_G^2 = \frac{H\, z_1}{\gamma} = \frac{(\gamma\ z_G\ S_{yz}\ )\, z_1}{\gamma} = z_G\ S_{yz}\ z_1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{I_{G_{yy'}}}{z_G\ S_{yz}} + z_G$$

que está por debajo del centro de gravedad de la superficie.

Para calcular el esfuerzo vertical $\vec{V}$ se parte de:

$$dV = dF\ sen\,\alpha = \gamma\ z\ dw\ sen\,\alpha = \left| dS_{xy} = dw\ sen\,\alpha \right| = \gamma\ z\ dS_{xy} = \gamma\ dw$$

siendo dw el volumen de líquido que hay sobre el elemento de superficie considerado.

Integrándola, resulta:

$$\int dV = \gamma \int dW \quad ; \quad V = \gamma\ W$$

siendo W el volumen de líquido comprendido por la superficie curva y las verticales que pasan por sus extremos.

El punto de aplicación del esfuerzo vertical $\vec{V}$ se determina tomando momentos, Fig III.9:

$$V\, x_1 = \int x\ dV \quad ; \quad x_1 = \frac{\int x\ dV}{V} = \frac{\int \gamma\ x\ dW}{V}$$

que es la expresión que se corresponde con la coordenada x del centro de gravedad del volumen abarcado por la pared curva y las verticales en sus extremos.

Corolario.- Si se supone una superficie cerrada sumergida en un fluido en general, el esfuerzo horizontal sobre (ABC) vale, Fig III.10:

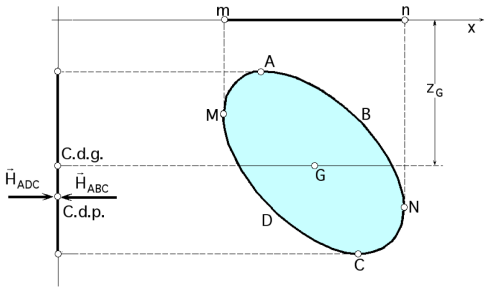

Fig III.10.- Esfuerzos sobre una superficie cerrada sumergida en un fluido

$$H_{ABC} = p_G\, S_{ABC}$$

El esfuerzo horizontal sobre (ADC) es: $H_{ADC} = p_G\, S_{ADC}$

Como $(S_{ABC} = S_{ADC})$ por cuanto las proyecciones del mismo cuerpo sobre un mismo plano son iguales, resulta que $(H_{ABC} = H_{ADC})$ en valor absoluto, y de signo contrario, por lo que la resultante $\vec{H}$ horizontal será nula.

El esfuerzo vertical sobre (MDN) vale $(V_{MDN} \cdot g\ W_{MDN})$ en donde W_{MDN} es el volumen abarcado por la curva (MDN) y las ordenadas verticales de sus extremos; en la misma forma, el esfuerzo vertical sobre (MBN), es:

$$V_{MBN} = \gamma\ W_{MBN}$$

En consecuencia, la resultante vertical $\vec{V}$ es:

$$V = - V_{MDN} + V_{MBN} = - \gamma W_{MDN} + \gamma W_{MBN} = \gamma (W_{MBN} - W_{MDN}) = - \gamma W$$

siendo W el volumen limitado por la superficie cerrada.

En resumen, sobre la superficie cerrada sumergida actúa, solamente, una fuerza tal como la $-\vec{V}$, igual y opuesta al peso del líquido desalojado por ésta.

Principio de Arquímedes.- El peso de un cuerpo en el seno de un fluido no es el real, sino el aparente, ya que experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido que desaloja, y que queda perfectamente expresado de acuerdo con el Corolario anterior.

III.7.- FUERZAS HIDROSTÁTICAS EN LÍQUIDOS ESTRATIFICADOS

Las fórmulas anteriormente descritas para superficies sumergidas planas y curvas, son válidas, únicamente, para fluidos de densidad uniforme.

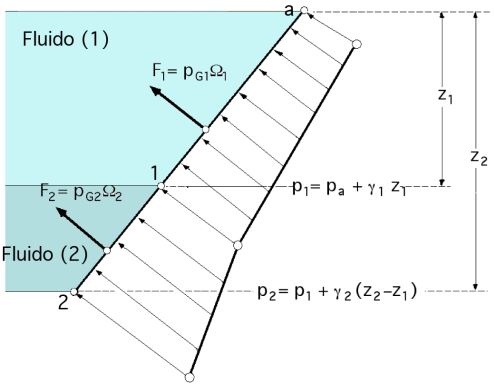

Fig III.11.- Superficie inmersa en una región fluida con dos capas

Si el fluido esta estratificado con diferentes densidades, no se puede obtener la solución general mediante una única expresión, ya que la pendiente de la distribución lineal de presiones cambia de capa en capa. Sin embargo, las fórmulas conocidas se pueden aplicar por separado a cada capa, de modo que el procedimiento adecuado será el de calcular las fuerzas y momentos de cada una, y sumarlas posteriormente.

Si se considera la superficie plana de la Fig III.11, sumergida en una región fluida de dos capas, la distribución de presiones se hace más acusada al pasar de la primera capa a la segunda, que es de fluido mas denso. La fuerza total sobre la placa no será igual a la presión en el c.d.g. por la superficie de la placa, sino que cada parte de ésta lo tiene que cumplir por separado, de forma que, sumando las dos contribuciones se obtenga el total, es decir:

$$F = \sum F_i = \sum p_{Gi} \, S_i$$

Por lo que respecta a la determinación del c.d.p. o centroide de la placa, hay que determinar en primer lugar el centro de presiones de cada $\vec{F}_i$ respecto al centroide de la parte respectiva, no respecto al de la placa completa.

El centro de presiones correspondiente a la fuerza total $F = \sum F_i$, se obtiene sumando los momentos correspondientes respecto a un punto de referencia convenientemente elegido, que bien pudiera ser la superficie libre.

III.8.- ESTABILIDAD Y FLOTACIÓN

Los mismos Principios que hemos utilizado para calcular las fuerzas hidrostáticas sobre superficies, se pueden aplicar para el cálculo de la resultante sobre un cuerpo sumergido o sobre un cuerpo que flota. De todo ello se deducen las dos leyes de flotación que fueron enunciadas por Arquímedes:

a) Un cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotación igual al peso del fluido que desaloja

b) Un cuerpo que flota desaloja un volumen de fluido cuyo peso es el del cuerpo flotante

Supongamos un cuerpo sumergido; estará sometido a dos fuerzas de sentidos contrarios, una de ellas, el empuje, debido al Principio de Arquímedes; la otra, su propio peso.

En consecuencia, podrán suceder tres casos, según que el peso P sea mayor, igual o menor que el empuje E, $\begin{cases} P > E, \text{ el cuerpo se hunde} \\ P < E, \text{ el cuerpo flota} \\ P = E, \text{ el cuerpo queda entre dos aguas, indiferente} \end{cases}$

Las condiciones de equilibrio en el seno del fluido son:

a) Si el c.d.p. está encima del c.d.g., el equilibrio es estable

b) Si el c.d.p. coincide con el c.d.g., el equilibrio es indiferente

c) Si el c.d.p. está por debajo del c.d.g., el equilibrio es inestable, y expontáneamente se engendrará un par de fuerzas que le llevan a una posición aun más inestable

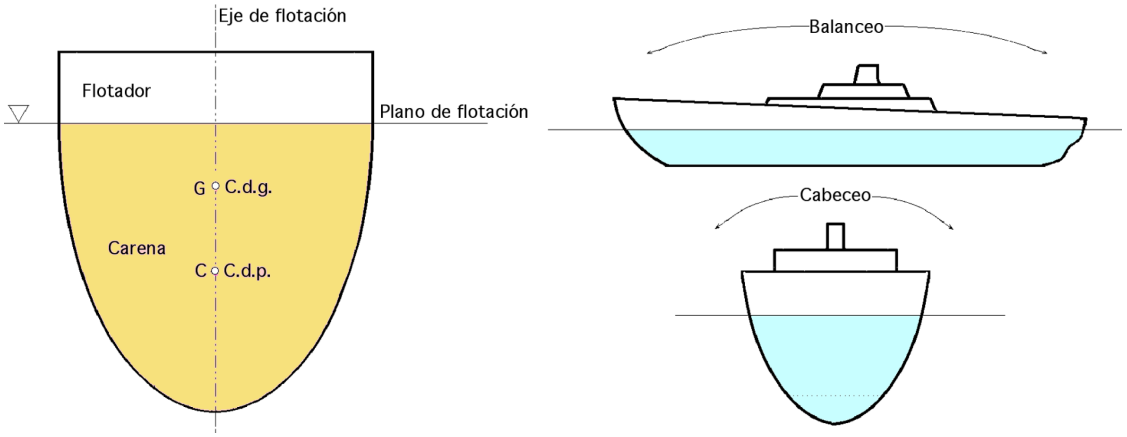

Fig III.12.- Definiciones para el flotador

Para que un cuerpo flote es necesario que el peso del fluido que desaloja sea mayor que su propio peso. Veamos algunas definiciones, Fig III.12, que permiten comprender mejor este estudio:

- Flotador, es el nombre que se da al cuerpo que flota

- Flotación, es el nombre que se da a la parte sumergida

- El plano de flotación viene determinado por la intersección de la superficie del fluido con el flotador

- Carena, es el volumen de fluido desalojado por la flotación o parte sumergida.

- Centro de carena, es el c.d.g. de la parte de fluido que desaloja el flotador.

- Eje de flotación, es la línea que une el c.d.g. del flotador con el centro de carena c.d.c.

- Cabeceo, es el movimiento del flotador alrededor de su eje longitudinal

- Balanceo, es el movimiento del flotador alrededor de su eje transversal

Condiciones de estabilidad de un flotador.- Un cuerpo que flota puede encontrarse en una situación estáticamente inestable; se deben cuidar los diseños para impedir esta inestabilidad en la flotación, de forma que, para asegurar que una posición de equilibrio sea estable, se aplica una pequeña perturbación al flotador, y se observa si aparece un momento restaurador que lo lleve a la posición de equilibrio original; si esto sucede, el equilibrio es estable y en caso contrario, inestable.

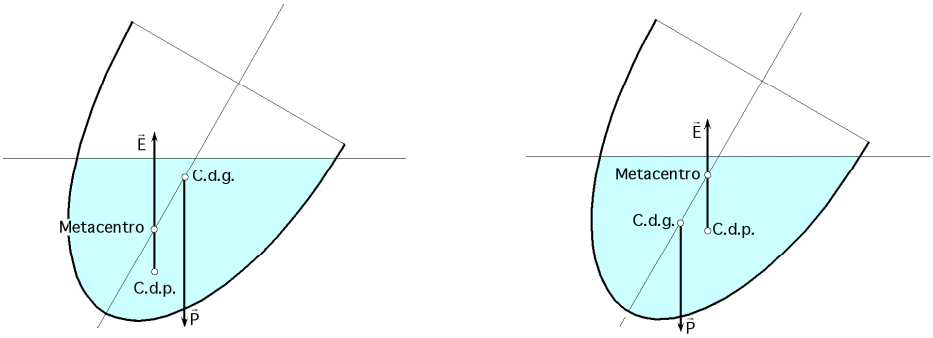

Fig III.13.- Condiciones de equilibrio de los cuerpos flotantes

Para una mejor comprensión del fenómeno, definimos el concepto de *metacentro* como el punto que se halla en la intersección de la vertical que pasa por el centro de carena, y el plano de simetría del flotador. Las condiciones de equilibrio de los cuerpos flotantes vienen definidas por la posición del metacentro respecto al c.d.g. del flotador, Fig III.13.

En efecto:

- Si el metacentro está por encima del c.d.g. el equilibrio es estable

- Si el metacentro está por debajo del c.d.g. el equilibrio es inestable, apareciendo un par de fuerzas sobre el flotador, que le llevan a una posición aun más inestable

- Si el metacentro coincide con el c.d.g. el equilibrio es indiferente, no apareciendo ningún par de fuerzas sobre el flotador

Cálculo de la distancia entre el metacentro y el c.d.g. de un flotador.- Si se supone un flotador, sobre un líquido, al que se hace girar un cierto ángulo infinitesimal, al producirse el giro, el centro de carena se desplaza de forma que el empuje E puede tender a desequilibrar aún mas al flotador; en consecuencia, aparecerán unos pares de fuerzas estabilizadoras f_{est} que tienden a llevar al flotador a su posición de equilibrio inicial.

El momento desequilibrador es: $M = E\ x = E\ l\ sen\alpha = E\ (h + a)\ sen\alpha$

El momento estabilizador M' es: $M' = \int 2\ df_{est}\ y = \int 2\ (y\ \alpha\ dS\ \gamma)\ y = \int 2\ \alpha\ \gamma\ y^2\ dS = \gamma\ \alpha\ I_{xx}$

Igualando dichos momentos se obtiene la distancia entre el centro de carena y el metacentro:

$$E\ (h + a)\ sen\ \alpha = \gamma\ \alpha\ I_{xx'} \quad \Rightarrow \quad h + a = \frac{\gamma\ \alpha\ I_{xx'}}{E\ sen\ \alpha} = \left| \lim_{\alpha \to 0} \frac{sen\ \alpha}{\alpha} \to 1 \right| = \frac{\gamma\ I_{xx'}}{E}$$

por cuanto el ángulo α es muy pequeño; γ es el peso específico del líquido.

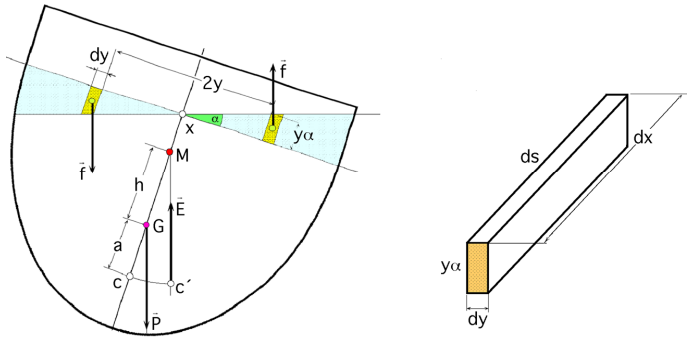

Fig III.14.- Posiciones del metacentro y c.d.g. de un flotador

Periodo de oscilación de un flotador.- Partiendo de la expresión: $C = I\ w^2 \alpha$, en la que:

$$C = m\ g\ h\ sen\ \alpha = m\ g\ (r - a)\ sen\ \alpha = m\ g\ (r - a)\ \alpha$$

el valor del período T de oscilación de un flotador es:

$$T = \frac{2\ \pi}{w} = \left| C = I\ (\frac{2\ \pi}{T})^2 a = m\ g\ (r - a)\ \alpha \right| = 2\ \pi\ \sqrt{\frac{I}{m\ g\ (r - a)}} = \left| R_G^2 = \frac{I}{m} \right| = \frac{2\ \pi\ R_G}{\sqrt{g\ h}}$$

Aplicación.- Dado el prisma de la Fig III.15, que flota en un líquido de peso específico γ, de sección transversal cuadrada de lado l y peso específico γ_1, las condiciones de flotabilidad y estabilidad se calculan como sigue:

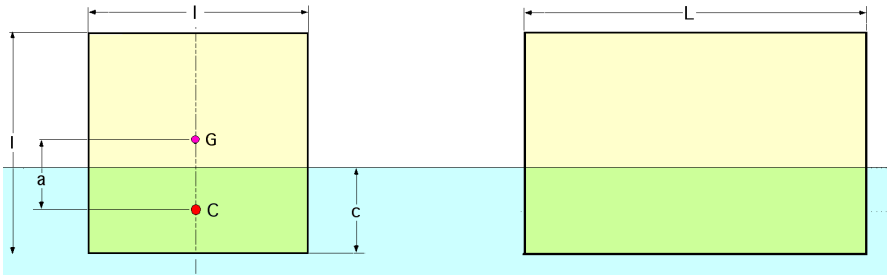

Fig III.15

La condición de flotabilidad es:

$$P = E \;\; ; \;\; \begin{cases} \text{Peso del prisma: } P = L\, l^2 \gamma_1 \\ \text{Empuje ascensional: } E = L\, l\, c\, \gamma \end{cases} \Rightarrow \;\; L\, l^2 \gamma_1 = L\, l\, c\, \gamma \;\; \Rightarrow \;\; l\, \gamma_1 = c\, \gamma \;\; ; \;\; \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{c}{l}$$

La condición de estabilidad requiere valores de $h > 0$, es decir:

$$h = \frac{I_{xx'}}{V} - a > 0 \;\; ; \;\; \frac{I_{xx'}}{V} > a \;\; , \text{ siendo: } \begin{cases} \frac{I_{xx'}}{V} = \frac{L\, l^3/12}{L\, l\, c} = \frac{l^2}{12\, c} \\ a = \frac{l - c}{2} \end{cases}$$

$$\frac{l^2}{12\, c} > \frac{l - c}{2} \;\; \Rightarrow \;\; l^2 - 6\, l\, c + 6\, c^2 = 0$$

de la que se obtienen los siguientes valores:

$$c = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} 0{,}788\; l \\ 0{,}212\; l \end{cases}$$, presentándose la condición de estabilidad para: $\begin{cases} \frac{c_1}{l} > 0{,}788 \\ \frac{c_2}{l} < 0{,}212 \end{cases}$

En efecto, podemos poner que:

$$6\, c^2 - 6\, c\, l + l^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{c}{l}\right)^2 - \left(\frac{c}{l}\right) + \frac{1}{6} > 0$$

siendo sólo válidos para el equilibrio estable aquellos valores que la hagan mayor de cero, Fig III.16, es decir:

$$\frac{c}{l} > 0{,}788 \;\; y \;\; \frac{c}{l} < 0{,}212$$

Los valores del intervalo $\left(0{,}212 < \frac{c}{l} < 0{,}788\right)$ se corresponden con el equilibrio inestable.