V.- DINÁMICA DE FLUIDOS Y LUBRICACIÓN

pfernandezdiez.es

V.1.- ECUACIONES DE EULER

Vamos a considerar un fluido perfecto en movimiento, y un pequeño paralelepípedo de flujo, fijo, de lados infinitamente pequeños, y de volumen (*dx dy dz)*. Como el fluido es perfecto, las presiones que se ejercen sobre las caras de este paralelepípedo, son normales a las mismas; la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas exteriores que actúan sobre este volumen tiene de componentes, $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$, por unidad de masa, por lo que las fuerzas que actúan sobre el volumen en la dirección de los ejes de coordenadas, serán iguales a estas componentes multiplicadas por la masa del paralelepípedo; así tendremos que:

$$\sum F_x = m\, j_x = m\, \frac{du}{dt}$$
$$\sum F_y = m\, j_y = m\, \frac{dv}{dt}$$
$$\sum F_z = m\, j_z = m\, \frac{dw}{dt}$$

son las fuerzas que hay que introducir en las ecuaciones del movimiento, según el principio de D'Alam-bert, y que son el producto de la masa del paralelepípedo por las aceleraciones según los ejes respectivos.

Las ecuaciones del movimiento del volumen de fluido elegido, en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas, son:

$$p\, dy\, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\, dx \right) dy\, dz + X\, \rho\, dx\, dy\, dz = \rho\, dx\, dy\, dz\, \frac{du}{dt}$$
$$p\, dx\, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\, dy \right) dx\, dz + Y\, \rho\, dx\, dy\, dz = \rho\, dx\, dy\, dz\, \frac{dv}{dt}$$
$$p\, dx\, dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy + Z\, \rho\, dx\, dy\, dz = \rho\, dx\, dy\, dz\, \frac{dw}{dt}$$

Resolviendo la primera de estas tres ecuaciones se encuentra:

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + X \rho = \frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt}$$

y haciendo lo propio con las otras dos, se llega al sistema de ecuaciones de Euler: $\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt} \end{cases}$

A su vez, como: $u = f(x, y, z, t)$ y ser: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, su derivada respecto de t es:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

que sustituida en las ecuaciones de Euler, proporciona: $\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - (\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - (\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t}) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - (\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t}) \end{cases}$

que permiten completar el numero de ecuaciones necesario para la resolución del problema, a que hay que calcular para un tiempo t, cuales son las componentes de la nueva velocidad (u, v, w) dadas las componentes iniciales (u_0, v_0, w_0), la presión p y la densidad ρ.

Por lo tanto, las ecuaciones necesarias son: $\begin{cases} - \text{Ecuación de continuidad} \\ - \text{Ecuación de compresibilidad: } f(p, v, T) = 0 \\ - \text{Tres relaciones de Euler: } \sum m j \end{cases}$

V.2.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL

Partimos de las ecuaciones de Euler, a las que respectivamente, multiplicamos por dx, dy, dz, quedando en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = X dx - \frac{du}{dt} dx = X dx - \frac{du}{dt} u dt = X dx - u du \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy = Y dy - \frac{dv}{dt} dy = Y dy - \frac{dv}{dt} v dt = Y dy - v dv \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz = Z dz - \frac{dw}{dt} dz = Z dz - \frac{dw}{dt} w dt = Z dz - w dz \end{aligned}\right\}$$

Sumándolas miembro a miembro, y teniendo en cuenta que: $p = f(x, y, z, t)$, resulta:

$$\frac{1}{\rho} (\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz) = \left| \begin{aligned} dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt \\ \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt \end{aligned} \right| = \frac{1}{\rho} (dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt) =$$

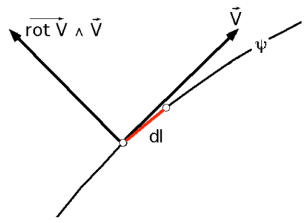


Fig V.1

$$= X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - (u\,du + v\,dv + w\,dw)$$

A su vez:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad \Rightarrow \quad V\,dV = u\,du + v\,dv + w\,dw = d(\frac{V^2}{2})$$

$$\frac{1}{\rho}(dp - \frac{\partial p}{\partial t}\,dt) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - d(\frac{V^2}{2})$$

que es la Ecuación Fundamental de la Hidráulica, combinación lineal de las tres ecuaciones de Euler. Por lo tanto, en su integración se tendrá en cuenta el camino a seguir, es decir, la ecuación fundamental de la Hidráulica solamente se puede integrar a lo largo de una trayectoria, Fig V.1.

Otra forma de obtener esta ecuación sería a partir de:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} \quad ; \quad X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Sumándola y restándola: $v\frac{\partial v}{\partial x}$, $w\frac{\partial w}{\partial x}$, se obtiene:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x} =$$

$$= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial x} + v(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + w(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(V^2)}{\partial x} + (rot\,\vec{V} \wedge \vec{V})_x + \frac{\partial u}{\partial t}$$

y haciendo lo propio para las otras dos ecuaciones, y sumándolas junto a esta, resulta:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\,grad\,p = \frac{1}{2}\,grad\,V^2 + (rot\,\vec{V} \wedge \vec{V}) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

que es la ecuación fundamental para un fluido perfecto.

V.3.- ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación Fundamental se puede poner en la forma:

$$\frac{1}{\rho}(dp - \frac{\partial p}{\partial t}\,dt) = dT - d(\frac{V^2}{2})$$

En régimen permanente $\frac{\partial p}{\partial t}\,dt = 0$, por lo que la ecuación anterior queda en la forma:

$$\frac{dp}{\rho} - dT + d(\frac{V^2}{2}) = 0$$

y si $\rho = f(p)$ resulta: $\int\frac{dp}{\rho} - (T - T_1) + \frac{V^2 - V_1^2}{2} = 0$

que siempre hay que aplicar a lo largo de una línea de corriente ψ , en la que:

$\Delta T = T - T_1$, *es la energía potencial debida a las fuerzas del campo*

$\int \frac{dp}{\rho}$ *es la energía debida a las fuerzas de presión*

$\frac{V^2 - V_1^2}{2}$ *es la energía cinética por unidad de masa*

El caso más frecuente, a la hora de aplicar esta ecuación es, que la única fuerza exterior sea la debida a la gravedad (peso del fluido), obteniéndose:

$X = 0 \; ; \; Y = 0 \; ; \; Z = - g$

y teniendo en cuenta que $(\gamma = \rho\, g)$ resulta:

$$\frac{dp}{\rho} + g\, dz + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{dp}{\gamma} + dz + d\left(\frac{V^2}{2\,g}\right) = 0$$

Integrándola:

$$\int \frac{dp}{\gamma} + (z_1 - z_2) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2\,g} = 0 \quad ; \quad \int v\, dp + (z_1 - z_2) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2\,g} = 0$$

Si el fluido es incompresible ρ = Cte, por lo que: $\frac{p}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2\,g} = Cte$

que es la ecuación de Bernoulli para un fluido ideal, siendo: $\begin{cases} z + \frac{p}{\gamma} \text{ la línea de niveles piezométricos} \\ z \text{ la trayectoria} \\ z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2\,g} \text{ el plano de carga} \end{cases}$

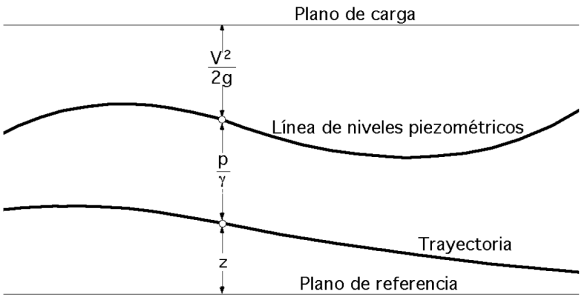


Fig V.2.-Representación gráfica de la ecuación de Bernoulli

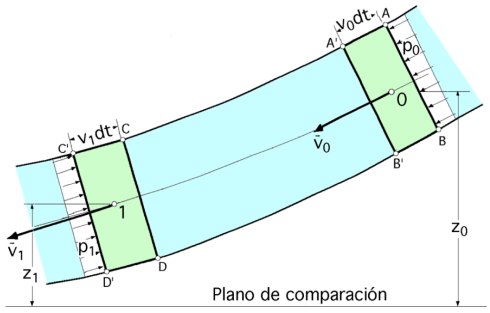


Fig V.3.- Tubo de corriente

La representación gráfica de la ecuación de Bernoulli es la indicada en la Fig V.2, que se puede deducir también a partir del Teorema de las fuerzas vivas, con las siguientes consideraciones:

- El fluido es perfecto, por lo que el trabajo debido a las fuerzas interiores es nulo, $T = 0$

- El fluido es incompresible, por lo que si en un tiempo t ocupa la posición (ABCD), en el tiempo t +dt, ocupará la posición (A'B'C'D'), Fig V.3.

- Si el régimen es permanente, las masas contenidas en (ABA'B') y en (CDC'D') son iguales, es decir:

flujo entrante = flujo saliente

siendo su valor: $\left.\begin{matrix} Masa\ en\ 0:\ m_0 = \rho\ Volumen_0 = V_0\ \ \Omega_0\ \ \rho\ dt \\ Masa\ en\ 1:\ m_1 = \rho\ Volumen_1 = V_1\ \ \Omega_1\ \ \rho\ dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \Omega_0 V_0 = \Omega_1 V_1$

d) El único trabajo es el de las fuerzas exteriores, que se compone del trabajo debido a la acción de la gravedad T_g y del trabajo debido a las presiones T_p.

- Trabajo debido a la gravedad: $T_g = Peso \times Proyección\ vertical\ del\ camino\ recorrido = \Omega_0 V_0\ dt\ g\ (z_0 - z_1)$

- Trabajo debido a las presiones: $T_p = p_0\ V_0\ \Omega_0\ dt - p_1\ V_1\ \Omega_1\ dt$

El trabajo debido a las presiones laterales del fluido sobre las paredes es 0, por ser la dirección de la fuerza originada por la presión perpendicular a la trayectoria.

De acuerdo con el Teorema de las fuerzas vivas:

$$\Omega_0\ V_0\ dt\ \gamma(z_0 - z_1) + p_0\ \Omega_0\ V_0\ dt - p_1\ \Omega_1\ V_1\ dt = \frac{m_1\ V_1^2 - m_0\ V_0^2}{2} = \frac{\Omega_1 V_1\ dt\ \rho\ V_1^2 - \Omega_0 V_0\ dt\ \rho\ V_0^2}{2}$$

y como $\Omega_0\ V_0 = \Omega_1\ V_1$, resulta:

$$\gamma\ (z_0 - z_1) + (p_0 - p_1) = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2}\ \rho \quad \Rightarrow \quad (z_0 - z_1) + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2\ g}$$

que es la expresión matemática del Teorema de Bernoulli para un fluido perfecto.

La ecuación de Bernoulli está enunciada para dos secciones cualesquiera de la vena fluida y expresa la igualdad de las alturas totales H en estas secciones; como estas secciones se han tomado libremente, para cualquier otra sección de la vena líquida, la altura total tendrá el mismo valor.

De este modo, para el fluido ideal en movimiento, la suma de las tres alturas $\begin{cases} posición \\ presión \\ dinámica \end{cases}$, es una magnitud constante a lo largo de la citada vena fluida.

El concepto energético de la ecuación de Bernoulli, para una vena líquida elemental de fluido ideal, consiste en que la energía específica total del fluido se mantiene constante a lo largo de la vena líquida. La ecuación de Bernoulli expresa, por consiguiente, la ley de conservación de la energía mecánica para un fluido ideal en movimiento, que se puede presentar en las tres formas citadas. Durante el movimiento de un fluido ideal, una forma de energía se puede transformar en otra, pero la energía específica total, queda siempre invariable.

V.4.- ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE BERNOULLI

Tubos piezométricos.- Sirven para medir la presión estática. Si colocamos en dos secciones de la

vena líquida en movimiento, unos tubos que no produzcan ningún tipo de perturbación en la corriente, el fluido alcanzará en ellos un cierto nivel que representa la altura piezométrica o manométrica $\frac{p}{\gamma}$.

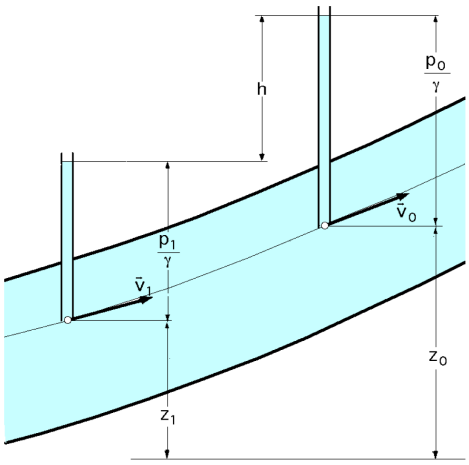


Fig V.4.- Medida de la presión estática mediante tubos piezométricos

Aplicando Bernoulli a las dos secciones, Fig V.4, resulta:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2\,g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g}$$

$$(z_0 + \frac{p_0}{\gamma}) - (z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2\,g} = h$$

El primer miembro representa el desnivel h existente entre los dos tubos piezométricos; a su vez, la diferencia de energía de velocidades entre los dos puntos, es la misma que la diferencia de niveles piezométricos entre dichos puntos.

Tubo Venturi.- De acuerdo con el apartado anterior se han desarrollado sistemas destinados a medir caudales, por simple lectura de las presiones dadas por dos manómetros dispuestos en un tubo, Fig V.5. Las presiones en la sección aguas arriba y en la garganta son presiones reales. Podemos aplicar Bernoulli entre (1) y (2) considerando en principio velocidades teóricas v_t a las que posteriormente dotaremos de un coeficiente de reducción φ para tener en cuenta el rozamiento, y ser consideradas como reales.

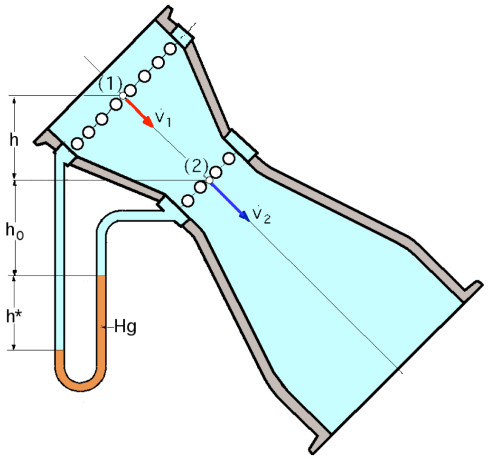


Fig V.5.- Tubo Venturi

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_{1t}^2}{2\,g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_{2t}^2}{2\,g} \qquad \textit{siendo: } z_1 - z_2 = h$$

despejando V_{2t} de la ecuación de continuidad $\Omega_1\, V_1 = \Omega_2\, V_{2t}$, se obtiene:

$$\frac{V_{2t}^2}{2\,g} = h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{V_{1t}^2}{2\,g} = \left| v_{1t} = v_{2t}\,\frac{d_2^2}{d_1^2} \right| = h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{V_{2t}^2}{2\,g}\,\frac{d_2^4}{d_1^4}$$

$$\frac{V_{2t}^2}{2\,g}\,(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}) = h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad V_{2t} = \sqrt{2\,g\,(h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma})\,\frac{1}{1 - (d_2/d_1)^4}}$$

siendo la velocidad real:

$$V_2 = \varphi \sqrt{2\,g\,(h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma})\,\frac{1}{1 - (d_2/d_1)^4}}$$

El caudal que circula es:

$$Q = \Omega_2 V_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \varphi \sqrt{2 g (h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}) \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{d_1})^4}} = \left\{ \begin{array}{l} p_1 - p_2 = \gamma_{Hg} h^* - \gamma h^* - \gamma h \\ h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h^* (\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\pi d_2^2}{4} \varphi \sqrt{2 g h^* (\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1) \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{d_1})^4}}$$

El valor del coeficiente de reducción de velocidad es del orden de $\left\{ \begin{array}{l} 0{,}985 \text{ para Venturis nuevos} \\ 0{,}98 \text{ para Venturis usados} \end{array} \right.$

Tubo Pitot.- Sirve para medir la presión total o presión de estancamiento, es decir, la suma de la presión estática y la presión dinámica. En la embocadura del tubo, punto 1, se forma un punto de estancamiento (remanso, por lo que la velocidad $V_1 = 0$ y la presión aumenta hasta el valor:

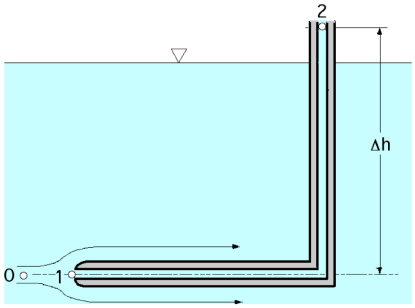


Fig V.6.- Tubo Pitot

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_{est}}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2 g}$$

A su vez entre 1 y 2:

$$z_1 + \frac{p_{est}}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 g}$$

Como en el punto 1 se tiene $V_1 = 0$, y en el punto 2, $V_2 = 0$, y llamando $z_2 = \Delta h$, resulta:

$$\frac{p_{est}}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \left| p_2 = p_{atm} = 0 \right| = z_2 = \Delta h \quad ; \quad p_{est} = \gamma \Delta h$$

en la que: $p_{est} = p_0 + \gamma \frac{V_0^2}{2 g} = p_0 + \rho \frac{V_0^2}{2}$

Tubo de Prandtl.- Este tubo combina un tubo de Pitot y un tubo piezométrico; el tubo de Pitot mide la presión total, y el tubo piezométrico la presión estática, por lo que el tubo de Prandtl mide la diferencia de los dos, es decir, la presión dinámica. Cuando el tubo de Prandtl se introduce en un fluido, produce una modificación en el flujo, de forma que dicha perturbación se traduce en la formación en el punto 1 de un punto de estancamiento, de manera que: $\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_{est} \\ V_1 = 0 \end{array} \right.$

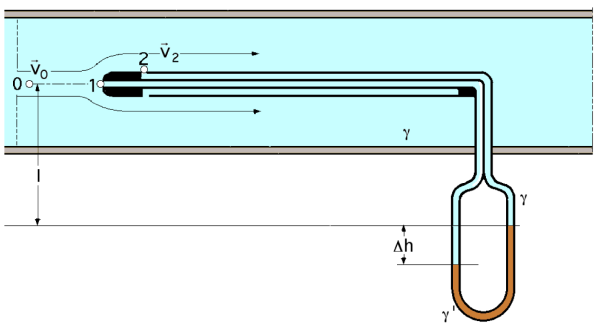


Fig V.7.- Tubo de Prandtl

Se supondrá que la diferencia de alturas entre 1 y 2 es despreciable; ademas habrá que suponer también que en el punto 2 ya no hay perturbación, por lo que $\begin{cases} p_2 = p_0 \\ V_2 = V_0 \end{cases}$

En el interior del tubo de Prandtl y del manómetro diferencial, el fluido principal y el fluido manométrico, están en reposo, por lo que se puede aplicar la ecuación fundamental de la Hidrostática (Bernoulli) entre 0 y 1, teniendo en cuenta que:

$$z_0 = z_1 \cong z_2 \quad ; \quad V_1 = 0 \quad ; \quad p_0 = p_2$$

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2\,g} = \frac{p_1}{\gamma} \quad ; \quad p_0 + \gamma\,\frac{V_0^2}{2\,g} = p_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_0 = \rho\,\frac{V_0^2}{2}$$

Aplicando, a su vez, Bernoulli entre 1 y 2, y como $z_1 \cong z_2$, resulta:

$$p_1 + \gamma\,\frac{V_1^2}{2\,g} = p_2 + \gamma\,\frac{V_2^2}{2\,g}$$

ya demostrada anteriormente.

Aplicando la ecuación fundamental de la Hidrostática entre 1 y 2:

$$p_1 = p_2 + \gamma\,l + \gamma'\,\Delta h - \gamma\,\Delta h - \gamma\,l = p_2 + \gamma'\,\Delta h - \gamma\,\Delta h = p_2 + \Delta h\,(\gamma' - \gamma)$$

y sustituyendo en $p_1 = p_2 + \rho\,\frac{V_0^2}{2}$, se obtiene:

$$p_2 + \rho\,\frac{V_0^2}{2} = p_2 + \Delta h\,(\gamma' - \gamma) \quad ; \quad \rho\,\frac{V_0^2}{2} = \Delta h\,(\gamma' - \gamma)$$

Velocidad teórica de la corriente:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2\,\Delta h\,(\gamma' - \gamma)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\,g\,\Delta h\,(\gamma' - \gamma)}{\gamma}} = \sqrt{2\,g\,\Delta h\,(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1)}$$

Tubo de Pitot-Darcy.- Este hidrotímetro, Fig V.8, utilizado para la medida de la velocidad a distintas profundidades, consiste en dos tubos montados sobre una tablilla graduada de modo que sus extremos inferiores, de aproximadamente 1,5 mm de diámetro, y con una llave común L, están doblados, uno, en el sentido de la corriente, y el otro, en el contrario.

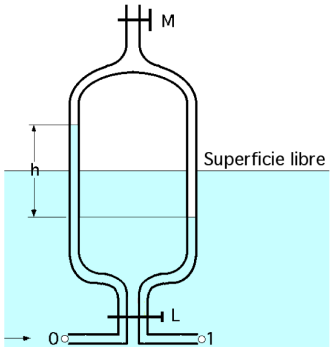


Fig V.8.- Tubo de Pitot-Darcy

Una vez sumergido en el líquido, éste asciende por el primer tubo a un nivel superior a la superficie libre, mientras que en el otro tubo se produce una aspiración, descendiendo el nivel del líquido por debajo de dicha superficie libre.

Cuando se introduce el tubo en la corriente, verticalmente, a la profundidad deseada, y se abren las llaves L y M, el líquido habrá adquirido la posición que se indica en la Fig V.8, momento en el que se cierra la llave

M y se saca el aparato. Aplicando la ecuación de Bernoulli se tiene:

$$0 + \frac{p_0}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V^2}{2\,g}$$

$$\frac{V^2}{2\,g} = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma} = h \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2\,g\,h} = 4{,}42\,\sqrt{h}$$

Para líquidos reales se suele utilizar otra expresión de la forma, $V = \varphi\sqrt{2\,g\,h}$, en la que el coeficiente φ de reducción de velocidad varía entre $0{,}84 \div 1$, y depende de $\begin{cases} \text{- la forma} \\ \text{- las dimensiones} \end{cases}$ del aparato.

V.5.- TEOREMA DE TORRICELLI

Si a una masa líquida la aplicamos la ecuación de Bernoulli entre su superficie libre, y la salida por un orificio libre, tomando como plano de referencia el que pasa por el centro de dicho orificio, Fig V.9, se tiene:

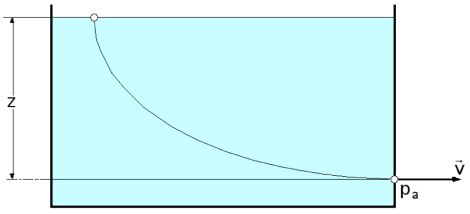


Fig V.9

$$z + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{V^2}{2\,g} \quad ; \quad V = \sqrt{2\,g\,z}$$

que es la velocidad de salida de un líquido por un orificio, función de la profundidad a la que se encuentre el orificio.

V.6.- APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI A LÍQUIDOS EN ROTACIÓN

Sea un canal guía que gira alrededor del eje Oz, Fig V.10, por el interior del cual circula un líquido; las fuerzas exteriores que actúan sobre dicho líquido en rotación son su:

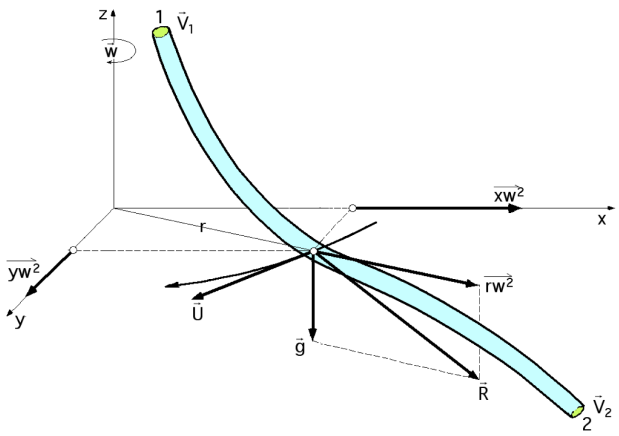


Fig V.10.- Canal guía que gira alrededor del eje z

$$\begin{cases} \text{Fuerza centrífuga: } r\,w^2 \;\; (x\,w^2\,,\, y\,w^2\,,0) \\ \text{Gravedad: } \vec{g}\,(0,\,0,\,-g) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x\,w^2 \\ Y = y\,w^2 \\ Z = -\,g \end{cases}$$

A su vez:

$$dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = x\,w^2 dx + y\,w^2 dy - g\,dz$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = w^2\,\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + w^2\,\frac{y_2^2 - y_1^2}{2} - g\,(z_2 - z_1) =$$

$$= w^2\,\frac{x_2^2 + y_2^2}{2} - w^2\,\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} - g\,(z_2 - z_1) =$$

$$= w^2\,\frac{r_2^2}{2} - w^2\,\frac{r_1^2}{2} - g\,(z_2 - z_1)$$

y como para la velocidad tangencial se tiene $\begin{cases} u_1 = w\,r_1 \\ u_2 = w\,r_2 \end{cases}$, resulta:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} - g\,(z_2 - z_1)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación general:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} - (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = 0 \quad ; \quad \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g\,(z_2 - z_1) + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = 0$$

que se puede poner en la forma:

$$\frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2 - u_2^2}{2} = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2 - u_1^2}{2}$$

de la que se obtienen las siguientes conclusiones:

a) Si el tubo no gira, u = 0, se obtiene de nuevo la ecuación de Bernoulli para líquidos en movimiento, en su forma más simple

b) Si el tubo es recto y paralelo al eje de giro, la velocidad tangencial es la misma para todos los puntos, $u_2 = u_1$ y así queda también la ecuación de Bernoulli en su forma más simple

La ecuación anterior es de aplicación al desarrollo de la ecuación general de las turbinas hidráulicas; también lo es a los sistemas de engrase y refrigeración de ejes, etc.

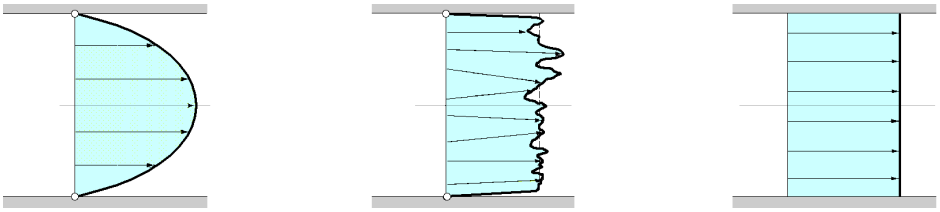
V.7.- INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE LOS FLUIDOS REALES

Los fluidos reales se distinguen de los ideales en que poseen una cierta viscosidad, es decir, un rozamiento interior que origina tensiones tangenciales entre los filetes fluidos.

Los movimientos de circulación de los fluidos se pueden dividir en dos tipos:

a) ***Movimientos laminares, o de Poiseuille,*** que son flujos regulares en los que la masa fluida esta formada por filetes yuxtapuestos, perfectamente individualizados, en los que las superficies libres son lisas y unidas; en realidad sólo se dan en algunos casos muy particulares o en fluidos muy viscosos; el número de Reynolds en flujos por el interior de tubos es inferior a 2.000.

b) ***Movimientos turbulentos, o hidráulicos,*** en los que los filetes líquidos se entrecruzan no conservan su individualidad; las superficies libres son turbulentas y estriadas, y son los movimientos que con más frecuencia se presentan en la práctica.



a) Flujo laminar *b) Flujo turbulento* *c) Flujo ideal*

Fig V.11.- Isotaquias de velocidades

Si en cada punto de una masa fluida en movimiento turbulento se miden las velocidades instantá-neas, se observa que estas varian en magnitud y dirección sin ninguna regularidad, con una fre-

cuencia a veces muy grande, pero no se apartan jamas de un valor medio, alrededor del cual oscilaran más o menos rápidamente; otro tanto sucede con las presiones. Los valores medios, de velocidades y presiones, definen un régimen ficticio que se conoce como movimiento medio (Bazin), siendo sus características las que normalmente aparecen en las formulas prácticas de Hidráulica.

Mediante este modelo, el movimiento de un fluido en cualquier tipo de régimen, laminar o turbulento, puede asimilarse al de un fluido perfecto, salvo en las zonas próximas a las paredes, en que la existencia de elevados gradientes de velocidad, aun en fluidos de pequeña viscosidad, hacen que se manifiesten en gran manera las fuerzas de viscosidad; a esta región se la conoce como capa límite.

V.8.- ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE UN FLUIDO VISCOSO INCOMPRESIBLE

En un fluido en movimiento, las tensiones tangenciales engendradas por la viscosidad son proporcionales a los gradientes de velocidad, lo cual permite calcular, en forma muy exacta, las pérdidas existentes en un flujo laminar.

Sin embargo, los resultados obtenidos no se pueden utilizar para calcular las pérdidas si el movimiento es turbulento, ni aun en el caso de considerarle como movimiento medio, por cuanto a éste habrá que superponer un movimiento de agitación originado al existir un continuo intercambio de pequeñas masas fluidas en movimiento, que originan una disipación de energía por frotamiento viscoso, tal, que las pérdidas de carga totales son mucho más importantes que las que resultarían de considerar solamente la viscosidad en el citado movimiento medio; en consecuencia, las masas fluidas en movimiento originaran unas variaciones de las cantidades de movimiento que originan una disipación de energía por choque.

Por lo tanto, si a las ecuaciones de Euler se añaden las que ocasiona la viscosidad, se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma más simplificada. Para su cálculo y determinación, estudiaremos lo que acontece a lo largo del eje Ox, teniendo en cuenta la ecuación de Newton de la viscosidad para la velocidad $\vec{u}$, y que tiene por componentes $(\tau_{ux}, \tau_{uy}, \tau_{uz})$ según los ejes *(x, y, z)* respectivamente, en la forma:

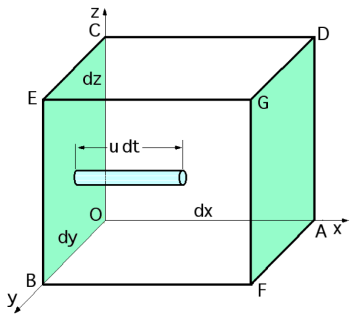


Fig V.12.- Paralelepípedo elemental para fluidos reales

$$\tau_{ux} = \eta \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \tau_{uy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \tau_{uz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$$

correspondientes al flujo entrante por las caras $\begin{cases} (ECOB) \text{ ó } dy\,dz \\ (EGFB) \text{ ó } dx\,dz \\ (ECDG) \text{ ó } dx\,dy \end{cases}$, respectivamente.

Para las caras opuestas a las anteriormente citadas del cubo elemental de fluido, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{ux} - \frac{\partial \tau_{ux}}{\partial x}\,dx &= \eta\,\frac{\partial u}{\partial x} - \eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx \\ \tau_{uy} - \frac{\partial \tau_{uy}}{\partial y}\,dy &= \eta\,\frac{\partial u}{\partial y} - \eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy \\ \tau_{uz} - \frac{\partial \tau_{uz}}{\partial z}\,dz &= \eta\,\frac{\partial u}{\partial z} - \eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dz \end{aligned}\right\}\ \textit{y restadas de las primeras:}\ \left\{\begin{aligned} &\textit{Según el eje } Ox: \ \eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx \\ &\textit{Según el eje } Oy: \ \eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy \\ &\textit{Según el eje } Oz: \ \eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dz \end{aligned}\right.$$

, que multiplicadas por la sección correspondiente, permiten obtener las fuerzas de naturaleza viscosa, debidas a la variación de la componente $\vec{u}$ de la velocidad según los citados ejes:

$$\left\{\begin{aligned} &\eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz = dF_{ux} \\ &\eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx\,dy\,dz = dF_{uy} \\ &\eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dx\,dy\,dz = dF_{uz} \end{aligned}\right.$$

Sumándolas se obtiene la fuerza total debida a la viscosidad, para la velocidad $\vec{u}$:

$$dF_u = \eta\,(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})\,dx\,dy\,dz = \eta\,\Delta u\,dx\,dy\,dz$$

Lo mismo se puede hacer para las velocidades $\vec{v}$ y $\vec{w}$ actuando sobre las mismas caras anteriormente definidas.

Añadiendo estas expresiones a las ecuaciones de Euler, se tiene, para la velocidad $\vec{u}$:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \rho\,X\,dx\,dy\,dz - \frac{du}{dt}\,\rho\,dx\,dy\,dz + \eta\,\Delta u\,dx\,dy\,dz$$

que convenientemente simplificada se reduce a:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \nu\,\Delta u = \left|\begin{array}{c} u = f(x, y, z, t) \\ \dfrac{du}{\partial t} = u\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{array}\right| = X - (u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}) + \nu\,\Delta u$$

que junto con las obtenidas para las velocidades $\vec{v}$ y $\vec{w}$, de la forma:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt} + \nu\,\Delta v = Y - (u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}) + \nu\,\Delta v$$

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt} + \nu\,\Delta w = Z - (u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}) + \nu\,\Delta w$$

definen muy bien el régimen laminar, pero no el turbulento, aunque para fluidos incompresibles los regímenes turbulentos pueden ser tratados con esta misma ecuación.

V.9.- MOVIMIENTO TURBULENTO

Para definir y comprender el movimiento turbulento, es necesario hacer figurar lo valores medios de la velocidad y de la presión que definen al movimiento medio, y completar las ecuaciones de

Navier mediante un término que comprenda las variaciones de la cantidad de movimiento entre las diversas partículas fluidas. Para tener en cuenta este fenómeno se define una velocidad de agitación $\vec{V}_{ag}$ que en cada instante complemente a la velocidad media del movimiento medio, Fig V.13.

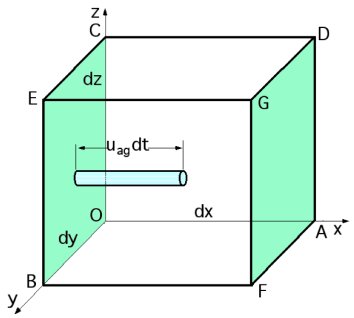


Fig V.13.- Velocidad de agitación en el movimiento turbulento

La velocidad sobre el eje $\begin{cases} Ox \rightarrow u = \hat{u} + u_{ag} \\ Oy \rightarrow v = \hat{v} + v_{ag} \\ Oz \rightarrow w = \hat{w} + w_{ag} \end{cases}$, siendo:

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$, *las componentes de la velocidad media del movimiento medio en cada punto en el instante t*

u_{ag} , v_{ag} , w_{ag} *las componentes de la velocidad de agitación, que son las componentes de la desviación de la velocidad* $\vec{u}$ *respecto de su valor medio* $\hat{u}$.

Debido al movimiento de agitación, en el tiempo *dt* entran por las diferentes caras del cubo elemental, las siguientes masas de fluido $\begin{cases} \rho\ dy\ dz\ u_{ag}dt \\ \rho\ dx\ dz\ v_{ag}dt \\ \rho\ dx\ dy\ w_{ag}dt \end{cases}$

Las cantidades de movimiento proyectadas por cada masa así definida son iguales a los impulsos mecánicos correspondientes, obteniéndose:

Sobre el eje Ox, $\begin{cases} \rho\ dy\ dz\ u_{ag}dt\ (\hat{u} + u_{ag}) = f_{1x}dt \\ \rho\ dx\ dz\ v_{ag}dt\ (\hat{u} + u_{ag}) = f_{2x}dt \\ \rho\ dx\ dy\ w_{ag}dt\ (\hat{u} + u_{ag}) = f_{3x}dt \end{cases}$

Sobre el eje Oy, $\begin{cases} \rho\ dy\ dz\ u_{ag}dt\ (\hat{v} + v_{ag}) = f_{1y}dt \\ \rho\ dx\ dz\ v_{ag}dt\ (\hat{v} + v_{ag}) = f_{2y}dt \\ \rho\ dx\ dy\ w_{ag}dt\ (\hat{v} + v_{ag}) = f_{3y}dt \end{cases}$

Sobre el eje Oz, $\begin{cases} \rho\ dy\ dz\ u_{ag}dt\ (\hat{w} + w_{ag}) = f_{1z}dt \\ \rho\ dx\ dz\ v_{ag}dt\ (\hat{w} + w_{ag}) = f_{2z}dt \\ \rho\ dx\ dy\ w_{ag}dt\ (\hat{w} + w_{ag}) = f_{3z}dt \end{cases}$

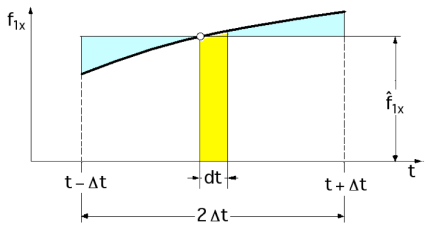


Fig V.14

Estudiemos en particular una de las ecuaciones, por ejemplo la f_{1x} sobre el eje Ox:

$$f_{1x} = \rho\ dy\ dz\ u_{ag}(\hat{u} + u_{ag})$$

Su valor medio en el instante *t*, Fig V.14, es:

$$\hat{f}_{1x} = \frac{1}{2\ \Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} f_{1x}\ dt = \frac{1}{2\ \Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \rho\ dy\ dz\ u_{ag}(\hat{u} + u_{ag})\ dt = \frac{\rho\ dy\ dz}{2\ \Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}(\hat{u} + u_{ag})\ dt =$$

$$= \frac{\rho\ dy\ dz}{2\ \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}^2 dt + \frac{\rho\ dy\ dz}{2\ \Delta t}\ \hat{u} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag} dt = \frac{\rho\ dy\ dz}{2\ \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}^2 dt$$

Las integrales de la forma: $\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}\, dt = 0$, ya que:

$$\hat{u} = \frac{1}{2\ \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u\ dt = \frac{1}{2\ \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} (\hat{u} + u_{ag})\ dt = \frac{1}{2\ \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}\, dt + \frac{1}{2\ \Delta t}\ \hat{u} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\ \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}\, dt + \frac{1}{2\ \Delta t}\ \hat{u}\ (t + \Delta t - t + \Delta t) = \frac{1}{2\ \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}\, dt + \hat{u}$$

y como $\Delta t \neq 0$ se obtiene: $\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}\, dt = 0$

y lo mismo para: $\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} v_{ag}\, dt = 0$; $\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} w_{ag}\, dt = 0$

La integral $\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}^2\, dt$ es la media del cuadrado de la fluctuación, que no es cero, y que se interpreta como una medida de la intensidad de la turbulencia.

La fuerza $\hat{f}_{1x}$ es la ejercida sobre una de las caras *(dy,dz)* por lo que para el conjunto de dos caras paralelas se tiene:

$$\hat{f}_{1x} - (\hat{f}_{1x} - \frac{\partial \hat{f}_{1x}}{\partial x}\ dx) = \frac{\partial \hat{f}_{1x}}{\partial x}\ dx = \frac{\rho\ dx\ dy\ dz}{2\Delta t}\ \frac{\partial}{\partial x} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}^2 dt$$

y haciendo lo mismo para $\hat{f}_{2x}$ y $\hat{f}_{3x}$, se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{f}_{2x}}{\partial x}\ dy = \frac{\rho\ dx\ dy\ dz}{2\ \Delta t}\ \frac{\partial}{\partial y} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag} v_{ag} dt$$

$$\frac{\partial \hat{f}_{3x}}{\partial x}\ dz = \frac{\rho\ dx\ dy\ dz}{2\ \Delta t}\ \frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag} w_{ag} dt$$

La proyección sobre el eje Ox de la fuerza total, debida a la cantidad de movimiento, es la suma de las anteriores, es decir:

$$\frac{\rho\ dx\ dy\ dz}{2\ \Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}^2\, dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag} v_{ag}\, dt + \frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag} w_{ag}\, dt \right)$$

Para los ejes Oy y Oz se obtienen otras dos ecuaciones similares.

En consecuencia, la ecuación de Navier-Stokes para el movimiento medio respecto al eje Ox, queda en la forma:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \nu\ \Delta u + \frac{1}{2\ \Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag}^2\, dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag} v_{ag}\, dt + \frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u_{ag} w_{ag}\, dt \right)$$

que se complementa con otras dos respecto a los ejes Oy y Oz.

Otra forma de expresar las ecuaciones de Navier-Stokes, para el movimiento medio, es la debida a White, de la forma:

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho X + \frac{\partial}{\partial x} (\eta \frac{d\hat{u}}{dx} - \rho \hat{u}_{ag}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\eta \frac{d\hat{u}}{dy} - \rho \overline{u_{ag} v_{ag}}) + \frac{\partial}{\partial z} (\eta \frac{d\hat{u}}{dz} - \rho \overline{u_{ag} w_{ag}}) =$$

$$= - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho X + \eta \Delta \hat{u} - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \hat{u}_{ag}^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{u_{ag} v_{ag}}) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{u_{ag} w_{ag}})$$

que se puede poner también como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \nu \Delta \hat{u} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}_{ag}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_{ag} v_{ag}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u_{ag} w_{ag}}$$

en la que las expresiones $\begin{cases} - \rho \hat{u}_{ag}^2 \\ - \rho \overline{u_{ag} v_{ag}} \\ - \rho \overline{u_{ag} w_{ag}} \end{cases}$ se conocen como esfuerzos turbulentos debidos al movimiento de agitación.

La integración de las ecuaciones de Navier-Stokes es, en la mayor parte de los casos, imposible; no obstante, existen soluciones exactas para las mismas al menos en los siguientes casos:

Flujo paralelo permanente y no permanente:

- Entre paredes paralelas fijas

- Entre paredes paralelas, una fija y la otra moviéndose en su propio plano, sin o con un gradiente de presión positivo o negativo

- Dentro de un conducto cerrado de sección transversal cualquiera

- Entre cilindros concéntricos en rotación

Flujo estacionario:

- Entre placas giratorias

- Entre placas convergentes y divergentes

- Flujos planos y asimétricos normales a una placa

- Flujo en un chorro laminar de sección circular transversal

Flujo transitorio:

- Adyacente a una pared plana acelerada repentinamente

- Adyacente a una placa oscilante en su propio plano

Asimismo, y para números de Reynolds pequeños, en los que las fuerzas de inercia se pueden despreciar, se han encontrado soluciones aproximadas para los siguientes casos:

- Flujo permanente alrededor de una esfera

- Lubricación de un cojinete

- Flujo alrededor de un obstáculo entre dos placas paralelas colocadas a una distancia pequeña (flujo de Hele-Shaw)

Los flujos laminares con fluidos de viscosidad muy pequeña, algunos problemas relacionados con el rozamiento, el coeficiente de transmisión de calor entre la superficie de un cuerpo y el flujo que lo circunda, etc., se resuelven teniendo en cuenta las capas límite $\begin{cases} - \textit{ térmica} \\ - \textit{ hidrodinámica} \end{cases}$

V.9.- ECUACIONES PARA UN FLUIDO PESADO Y VISCOSO

Sea la conducción inclinada indicada en la Fig V.15, en la que el eje Ox coincide con el eje de la misma; para este caso se tiene:

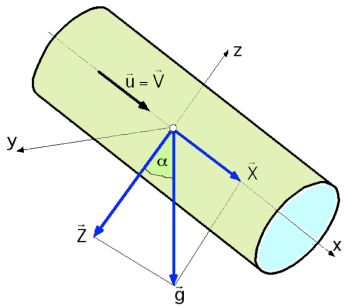


Fig V.15.- Conducción inclinada de un conducto por el que circula un fluido pesado y viscoso

$$\begin{cases} X = g\ sen\ \alpha \\ Y = 0 \\ Z = -\ g\ cos\ \alpha \end{cases} \quad ; \quad u = f(x, y, z, t) \quad \begin{cases} u = V \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Ecuación de continuidad:

$$\rho = Cte \ \Rightarrow \ div\ \vec{V} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

y como: $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Otras simplificaciones son

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \ ; \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ ; \ \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \ ; \ \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \ ; \ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ ; \ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \ ; \ \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

y sustituyendo en Navier-Stokes se obtiene: $\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = g\ sen\ \alpha - \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\eta}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\ g\ cos\ \alpha \end{cases}$

Para un régimen permanente $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, y si además se gira la tubería hasta hacer coincidir g con la dirección del eje Oz $(\alpha = 0)$ las ecuaciones anteriores se reducen a: $\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\eta}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\ g \end{cases}$, observándose que:

a) La variación de presión con respecto al eje Oz sigue las leyes de la Hidrostática: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\ \rho\ g = -\ \gamma$

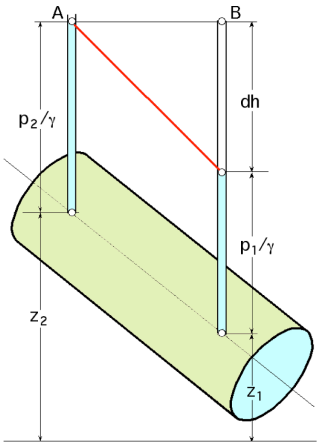


Fig V.16.- Pérdida de carga

b) Existe una pérdida de presión debida al roce de las partículas de fluido:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \eta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) = J \gamma$$

$$\frac{dp}{\gamma} = J \; dx = J \; dl$$

siendo l la longitud de la tubería, y J= f(V) la pérdida de carga por unidad de longitud, (adimensional)

Cuando no existen pérdidas de presión a lo largo de la conducción, la ecuación de Bernoulli es:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$$

es decir, la línea de niveles piezométricos es horizontal, pero sabemos que, de acuerdo con lo anteriormente estudiado, existe una pérdida de presión a lo largo de la conducción $\frac{dp}{\gamma} = J \, dl$, por lo que la línea (AB) pasa a transformarse en la (AB') y, por lo tanto, se puede poner:

$$d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = J \, dl \quad ; \quad J = \frac{d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}{dl} = \xi \, \frac{V^2}{2 \, g}$$

En consecuencia, la ecuación diferencial de Bernoulli toma la forma:

$$dz + \frac{dp}{\gamma} + d \, \frac{V^2}{2 \, g} + J \, dl = 0$$

que para un fluido incompresible se transforma, una vez integrada, en:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \, g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \, g} + J \, l = Cte$$

En general, para una corriente, la ecuación de Bernoulli es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \, \frac{V_1^2}{2 \, g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \, \frac{V_2^2}{2 \, g} + J \, l = Cte \quad \Rightarrow \quad dz + \frac{dp}{\gamma} + \alpha \, d\left(\frac{V^2}{2 \, g}\right) + J \, dl = 0$$

en la que α es un coeficiente corrector de la velocidad que se conoce como coeficiente de Coriolis, de forma que $\alpha \, \frac{V^2}{2 \, g}$ es el promedio de energía cinética por unidad de masa que pasa por la sección; para régimen estacionario $\alpha = 1$, y dejará de valer 1 cuanto mayor sea la irregularidad en la distribución de la velocidad; en la Tabla V.1 se indican algunos valores de α para distintos tipos de conducciones.

La representación gráfica de la ecuación completa de Bernoulli se presenta en la Fig V.17, en la que se han dibujado la trayectoria, línea de niveles piezométrico y de carga, y plano de carga, entre dos puntos de la conducción.

Tabla V.1.- Valores de α para diversas conducciones

Tipo de Conducción	α
Conducciones cilíndricas (Régimen turbulento)	*1,06*
Conducciones cilíndricas (Régimen laminar)	*2*
Canal con planchas lisas (Bazín)	*1,039*
Canal cubierto (Rugosidad normal)	*1,11*

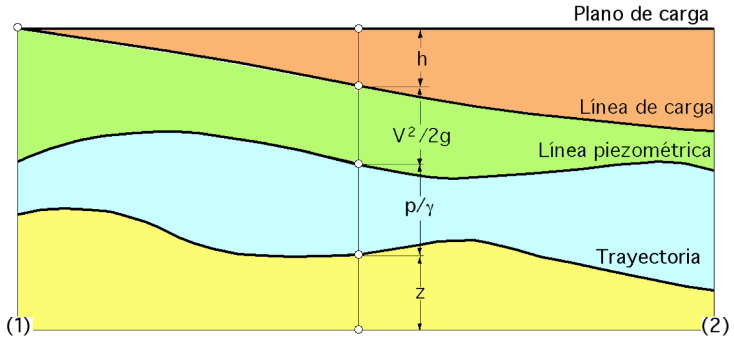


Fig V.17.- Representación gráfica de la ecuación de Bernoulli para un fluido real

V.10.- VARIACIÓN DE LA POTENCIA EN UNA CORRIENTE

Cuando en una corriente fluida se intercalan máquinas, la línea de carga y la línea piezométrica suben o bajan en ese tramo una cantidad equivalente a la energía absorbida o cedida, Fig V.18.

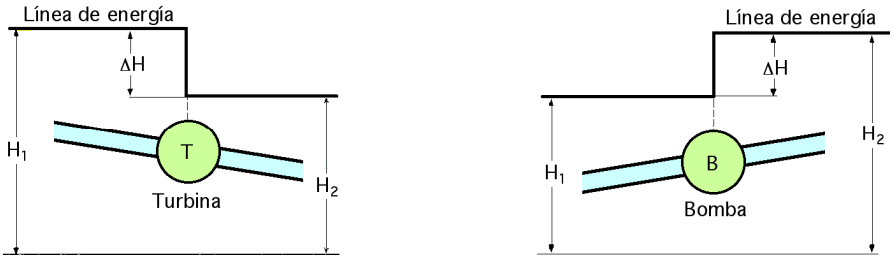


Fig V.18.- Variación del plano de carga cuando se introduce maquinaria en una conducción

La potencia teórica de una máquina, sea bomba B o turbina T, viene determinada por la diferencia entre las potencias de la corriente N_2 después de la máquina, y N_1 antes de ella, es decir:

$$N_{máq} = N = \left| N_2 - N_1 \right|$$

La potencia generada en la turbina viene afectada por las pérdidas originadas en el interior de la máquina, tanto de tipo hidráulico, como de tipo mecánico; las pérdidas se consideran (+) para el caso de una bomba, y (-) para una turbina; si representamos estas pérdidas por N_p se tiene:

$$N_{Bomba} = N_2 - N_1 + N_p$$

$$N_{Turbina} = N_2 + N_1 - N_p$$

El rendimiento de una bomba se define en la forma:

$$\eta_{Bomba} = \frac{Energía\ aportada\ al\ fluido}{Energía\ que\ acciona\ el\ motor\ de\ la\ bomba} = \frac{N_2 + N_1}{N_{Bomba}} = \frac{\gamma\ Q\ (H_2 - H_1)}{N_{Bomba}} = \frac{\gamma\ Q\ \Delta H}{N_{Bomba}}$$

en la que ΔH se conoce como *altura manométrica en bombas y altura neta en turbinas*.

La potencia aplicada al eje de la bomba es:

$$N_{Bomba} = \frac{\gamma\ Q\ \Delta H}{\eta_B} = \frac{\gamma\ Q\ H_{man}}{\eta_B}$$

El rendimiento de una turbina se define en la forma:

$$\eta_{Turbina} = \frac{Energía\ total\ obtenida\ en\ el\ eje\ de\ la\ turbina}{Energía\ tomada\ del\ fluido} = \frac{N_{Turbina}}{N_1 - N_2} = \frac{N_{Turbina}}{\gamma\ Q\ (H_1 - H_2)} = \frac{N_{Turbina}}{\gamma\ Q\ \Delta H}$$

siendo la potencia útil obtenida en la turbina:

$$N_{Turbina} = \gamma\ Q\ \Delta H\ \eta_{Turb}$$

El valor de ΔH es la carga o altura neta que se pone a disposición de la turbina

V.11.- LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

El estudio de la teoría de la lubricación se puede considerar como un caso particular de la teoría hidrodinámica de flujo laminar; en el fluido que llena los espacios vacíos entre las dos superficies a lubricar, una de las cuales tiene una ligera inclinación respecto a la otra, se desarrollan fuerzas de gran magnitud, experimentando el fluido una especie de acuñamiento; como la inclinación del patín es muy pequeña, se puede tomar como ecuación del movimiento la correspondiente a un movimiento laminar plano, en la hipótesis de que no existan flujos hacia afuera de los extremos del cojinete, en dirección normal al plano de la Fig V.19.

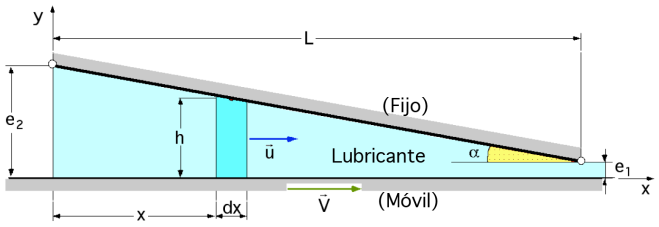


Fig V.19

En un sistema de ejes (x,y), la velocidad $\vec{u}$ del lubricante dependerá de x y de y, mientras que la presión p no depende más que de x; de las ecuaciones de Navier-Stokes se deduce la ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dx} = \eta\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En lo que sigue, y por comodidad, se puede suponer que el patín está fijo, y que lo que se mueve es el plano de deslizamiento, a la velocidad $\vec{v}$; si se considera una pequeña franja de fluido de espe-

sor dx y altura h, y siendo la inclinación a del patín respecto al plano de deslizamiento muy pequeña, se puede suponer que la distribución de velocidades es igual a la que resulta entre dos planos paralelos, es decir, h constante, por lo que la velocidad $\vec{u}$ es función únicamente de y, mientras que la presión p es independiente de y.

Integrando la ecuación anterior respecto de y, y considerando que $\frac{\partial p}{\partial x} = Cte$, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\ \frac{dp}{dx}\ y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\eta}\ \frac{dp}{dx}\ \frac{y^2}{2} + C_1\ y + C_2$$

en las que C_l y C_2 vienen definidas por las condiciones en los límites, en la forma:

$$Para, \begin{cases} u = V \ ; \ y = 0 \ ; \ C_2 = V \\ u = 0 \ ; \ y = h \ ; \ C_1 = -\left(\frac{V}{h} + \frac{h}{2\,\eta}\ \frac{dp}{dx}\right) \end{cases}$$

y, por lo tanto:

$$u = \frac{1}{\eta}\ \frac{dp}{dx}\ \frac{y^2}{2} - \left(\frac{V}{h} + \frac{h}{2\,\eta}\ \frac{dp}{dx}\right) y + V = \frac{y}{2\,\eta}\ \frac{dp}{dx}\ (y - h) + V\ \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de control así definido se puede obtener una nueva ecuación que permite calcular el valor de $\frac{\partial p}{\partial x}$ en función de h; como se desprecian las pérdidas laterales de caudal, el caudal q_v de lubricante por unidad de anchura del patín, tiene que ser el mismo en todas las secciones transversales, por lo que suponiendo $\frac{\partial p}{\partial x} = Cte$, se tiene:

$$q_v = \int_0^h u\ dy = \int_0^h \left\{\frac{1}{\eta}\ \frac{y^2}{2}\ \frac{dp}{dx} - \left(\frac{V}{h} + \frac{1}{\eta}\ \frac{h}{2}\ \frac{dp}{dx}\right) y + V\right\}\ dy = -\ \frac{h^3}{12\,\eta}\ \frac{dp}{dx} + \frac{V\,h}{2}$$

Dado que q_v no puede variar con x, se puede expresar h en función de x en la forma:

$$h = e_2 - \alpha\ x \quad \Rightarrow \quad dh = -\ \alpha\ dx$$

y despejando $\frac{\partial p}{\partial x}$ resulta:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\ V\,\eta}{h^2} - \frac{12\ \eta\ q_v}{h^3} \quad ; \quad -\ \frac{dp}{\frac{dh}{\alpha}} = -\ \alpha\ \frac{dp}{dh} = \frac{6\ V\,\eta}{h^2} - \frac{12\ \eta\ q_v}{h^3} \quad \Rightarrow \quad \alpha\ p = \frac{6\,\eta}{h}\ \left(V - \frac{q_v}{h}\right) + C_3$$

en la que q_v y C_3 son constantes que se determinan por las condiciones en los límites; como la presión en los extremos del patín $\begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases}$ debe ser la misma, por ejemplo, $p = p_0 = 0$, para $\begin{cases} h = e_1 \\ h = e_2 \end{cases}$ se tiene:

$$0 = \frac{6\,\eta}{h}\ \left(V - \frac{q_v}{h}\right) + C_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{6\,\eta}{e_1}\ \left(V - \frac{q_v}{e_1}\right) + C_3 = 0 \\ \frac{6\,\eta}{e_2}\ \left(V - \frac{q_v}{e_2}\right) + C_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_v = V\ \frac{e_1\ e_2}{e_1 + e_2} \\ C_3 = -\ \frac{6\ V\,\eta}{e_1 + e_2} \end{cases}$$

por lo que:

$$\alpha\, p = 6\,\eta\, V\,(\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2}\,\frac{e_1\, e_2}{e_1+e_2} - \frac{1}{e_1+e_2}) = p(h)$$

La presión se anula en los extremos del patín; pasa por un máximo cuando se tenga $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ lo cual, sustituido en la ecuación:

$$u_{(\frac{dp}{dx}=0)} = \frac{y}{2\,\eta}\,\frac{dp}{dx}\,(y - h) + V\,(1 - \frac{y}{h}) = \left|\, \frac{dp}{dx} = 0 \,\right| = V\,(1 - \frac{y}{h})$$

dice que en este máximo el reparto de velocidades es lineal.

En cualquier otro punto se cumple que $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$, (positivo para la cota e_2 y negativo para la cota e_1), y la distribución de velocidades es parabólica, estando la concavidad situada hacia la derecha o hacia la izquierda, según el signo de $\frac{\partial p}{\partial x}$.

En particular se observa que se puede formar a partir de la cota de e_2 un movimiento de lubricante en sentido inverso al del movimiento estudiado, Fig V.20.

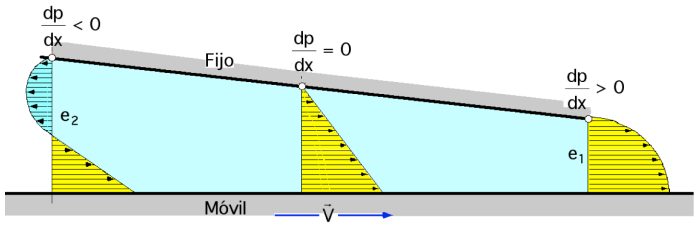


Fig V.20

La variación de la presión p se puede obtener también en función de x sustituyendo en la ecuación anterior $(h = e_2 - \alpha\, x)$, en la forma:

$$p = \frac{1}{\alpha}\,\{\frac{6\,\eta}{h}\,(V - \frac{q_v}{h}) + C_3\} = \frac{1}{\alpha}\,\{\frac{6\,\eta\, V}{e_2 - \alpha\, x} - \frac{6\,\eta\, V}{(e_2 - \alpha\, x)^2}\,\frac{e_1\, e_2}{e_1+e_2} - \frac{6\,\eta\, V}{e_1+e_2}\} =$$

$$= \frac{6\,\eta\, V(e_2 - \alpha\, x)\,(e_1+e_2) - 6\,\eta\, V\, e_1\, e_2 - 6\,\eta\, V\,(e_2 - \alpha\, x)^2}{\alpha\,(e_2 - \alpha\, x)^2\,(e_1+e_2)} = \frac{6\,\eta\, V\,(x\, e_2 - x\, e_1 - \alpha\, x^2)}{(e_2 - \alpha\, x)^2\,(e_1+e_2)} =$$

$$= \frac{6\,\eta\, V\, x\,(e_2 - e_1 - \alpha\, x)}{(e_2 - \alpha\, x)^2\,(e_1+e_2)} = \left|\begin{array}{l} \alpha\, x = e_2 - h \\ e_2 - e_1 = \alpha\, L \end{array}\right| = \frac{6\,\eta\, V\, x}{h^2\,(e_1+e_2)}\,(h - e_1) = f(x)$$

Esta ecuación indica que p es positiva en el intervalo $(0 \le x \le L)$, siempre que, $h > e_1$.

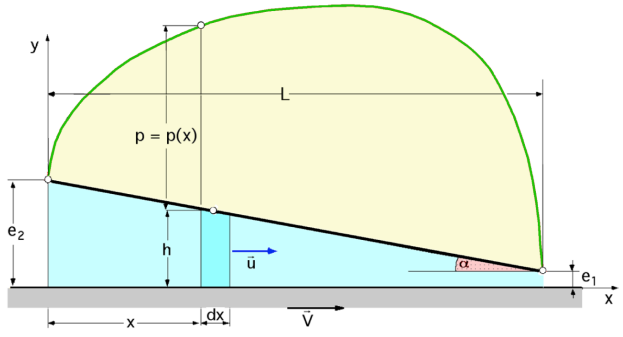


Fig V.21

Con este método se desprecia la muy ligera posibilidad de que existan cambios de presión a lo largo de la vertical de x = Cte.

El reparto de presiones a lo largo de la superficie del patín se obtiene teniendo en cuenta que:

$$p = \frac{6\,\eta\, V}{\alpha\, h^2}\,\frac{h\,(e_1+e_2) - e_1\, e_2 - h^2}{e_1+e_2}$$

y ser el reparto de presiones a lo largo de la superficie del patín de la forma $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial h}\ \frac{\partial h}{\partial x}$, resulta:

$$\frac{dp}{dh} = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ (e_1 + e_2)}\ \frac{(e_1 + e_2\ -\ 2\ h)\ h^2\ -\{h\ (e_1 + e_2) - e_1\ e_2\ -\ h^2\}\ 2\ h}{h^4} =$$

$$= \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ (e_1 + e_2)}\ \frac{-\ h\ (e_1 + e_2) + 2\ e_1\ e_2}{h^3} = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ h^2}\ (\frac{2\ e_1\ e_2}{h\ (e_1 + e_2)}\ -\ 1)$$

$$\frac{dh}{dx} = -\ \alpha\ \ ;\ \ \frac{dp}{dx} = \frac{6\ \eta\ V}{h^2}\ (\frac{2\ e_1\ e_2}{h\ (e_1 + e_2)}\ -\ 1)$$

$$\frac{dp}{dh} = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ h^2}\ (\frac{2\ e_1\ e_2}{h\ (e_1 + e_2)}\ -\ 1) = \left| \begin{array}{c} h = \theta\ e_2 \\ \varepsilon = \frac{e_1}{e_2} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{e_2\ d\theta} = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ h^2}\ (\frac{2\ e_1\ e_2}{h\ (e_1 + e_2)}\ -\ 1)$$

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ h^2}\ e_2 (\frac{2\ e_1\ e_2}{h\ (e_1 + e_2)}\ -\ 1) = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ e_2}\ (\frac{2\ e_1\ e_2^3}{h^3\ (e_1 + e_2)}\ -\ \frac{e_2^2}{h^2}) = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ e_2}\ (\frac{2\ e_1}{\theta^3\ (e_1 + e_2)}\ -\ \frac{1}{\theta^2}) =$$

$$= \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ e_2}\ (\frac{2}{\frac{e_1 + e_2}{e_1}\ \theta^3}\ -\ \frac{1}{\theta^2}) = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha\ e_2}\ (\frac{2\ \varepsilon}{\theta^3\ (1 + \varepsilon)}\ -\ \frac{1}{\theta^2})$$

que se anula para $\frac{2\ \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \theta$

V.12.- CALCULO DE LA FUERZA TOTAL QUE SOPORTA UN PATINETE

La fuerza total F por unidad de anchura que soporta el patinete es:

$$F = \int p\ dx\ = \int_0^L \frac{6\ \eta\ V\ x}{h^2\ (e_1 + e_2)}\ (h\ -\ e_1)\ dx = \left| \begin{array}{l} x = 0\ \ ;\ h = e_2 \\ x = L\ \ ;\ h = e_2 - \alpha\ L = e_1 \\ e_2 - h = \alpha\ x\ \ ;\ dx = -\ \frac{dh}{\alpha} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{e_2}^{e_1} \frac{6\ \eta\ V (e_2 - h)}{h^2\ (e_1 + e_2)\ \alpha}\ (h\ -\ e_1)\ (-\ \frac{dh}{\alpha}) = \frac{6\ \eta\ V}{\alpha^2\ (e_1 + e_2)}\ \{(e_1 + e_2)\ ln\ h\ +\ \frac{e_1\ e_2}{h}\ -\ h\}_{e_1}^{e_2} =$$

$$= \frac{6\ \eta\ V}{a^2\ (e_1 + e_2)}\ \{(e_1 + e_2)\ ln \frac{e_2}{e_1} + (e_1 - e_2) - (e_2 - e_1)\} =$$

$$= \frac{6\ \eta\ V}{\alpha^2\ (e_1 + e_2)}\ \{(e_1 + e_2)\ ln \frac{e_2}{e_1}\ +\ 2\ (e_1 - e_2)\} = \left| e_2 - \alpha\ L = e_1 \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{e_2 - e_1}{L} \right| =$$

$$= \frac{6\ \eta\ V L^2}{(e_1 + e_2)\ (e_2 - e_1)^2}\ \{(e_1 + e_2)\ ln\ \frac{e_2}{e_1}\ +\ 2\ (e_1 - e_2)\} = \frac{6\ \eta\ V L^2}{(e_2 - e_1)^2}\ (ln\ \frac{e_2}{e_1}\ -\ 2\ \frac{e_2 - e_1}{e_1 + e_2}) =$$

$$= \left| \varepsilon = \frac{e_1}{e_2} \right| = - \frac{6\,\eta\,V\,L^2}{e_2\,(1-\varepsilon)} \left(\frac{\ln \varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{2}{1+\varepsilon} \right)$$

Posición de la resultante de las fuerzas de presión que se ejercen sobre el patín.- Si la fuerza $\vec{F}$ está aplicada en el punto de abscisa X se tiene:

$$F\,X = \int_0^L p\,x\,dx$$

en la que:

$$p = \frac{6\,\eta\,V}{\alpha} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \frac{e_1\,e_2}{e_1+e_2} - \frac{1}{e_1+e_2} \right) = \frac{6\,\eta\,V}{\alpha\,e_2} \left(\frac{e_2}{h} - \frac{e_2^2}{h^2} \frac{1}{1+\frac{e_2}{e_1}} - \frac{1}{1+\frac{e_1}{e_2}} \right) =$$

$$= \left| \varepsilon = \frac{e_1}{e_2} \right| = \frac{6\,\eta\,V}{\alpha\,e_2} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon} \right)$$

$$F\,X = \int_0^L p\,x\,dx = \int_0^L \frac{6\,\eta\,V}{\alpha\,e_2} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon} \right) x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \theta = \dfrac{h}{e_2} = 1 - \alpha \dfrac{x}{e_2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{e_2}{\alpha}(1-\theta) \quad \Rightarrow \quad d\theta = -\alpha \dfrac{dx}{e_2} \\ \text{Límites:} \begin{cases} x = 0 \;;\; \theta = 1 \\ x = L \;;\; \theta = 1 - \dfrac{\alpha L}{e_2} = 1 - \dfrac{e_2 - e_1}{e_2} = \dfrac{e_1}{e_2} = \varepsilon \end{cases} \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^{\varepsilon} \frac{6\,\eta\,V}{\alpha\,e_2} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon} \right) \frac{e_2}{\alpha} (1-\theta) \left(-\frac{e_2}{\alpha} \right) d\theta =$$

$$= \frac{6\,\eta\,V\,e_2}{\alpha^3} \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon} \right) (1-\theta)\,d\theta = \frac{6\,\eta\,V\,e_2}{(1+\varepsilon)\,\alpha^3} \left\{ \frac{(5+\varepsilon)(1-\varepsilon)}{2} + (1+2\,\varepsilon)\,\ln \varepsilon \right\}$$

$$X = \frac{\dfrac{-6\,\eta\,V\,e_2}{(1+\varepsilon)\,\alpha^3} \left\{ \dfrac{(5+\varepsilon)(1-\varepsilon)}{2} + (1+2\,\varepsilon)\,\ln \varepsilon \right\}}{\dfrac{-6\,\eta\,V\,L^2}{(1-\varepsilon)\,e_2} \left(\dfrac{\ln \varepsilon}{1-\varepsilon} - \dfrac{2}{1+\varepsilon} \right)} = \frac{e_2^2\,(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\,\alpha^3 L^2} \frac{\dfrac{(5+\varepsilon)(1-\varepsilon)}{2} + (1+2\,\varepsilon)\,\ln \varepsilon}{\dfrac{\ln \varepsilon}{1-\varepsilon} - \dfrac{2}{1+\varepsilon}}$$

V.13.- FUERZA DE ARRASTRE

Si el movimiento de la cuña de lubricante se supone bidimensional, y no existen flujos laterales de aceite, se puede calcular la fuerza de arrastre $\vec{F}_a$necesaria para mover la superficie inferior a una velocidad $\vec{v}$, en la forma siguiente:

$$F_a = \left(-\int_0^L \tau \right)_{y=0} dx = \left(-\int_0^L \eta \frac{du}{dy} \right)_{y=0} dx = \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{y}{2\eta} \dfrac{dp}{dx}(y-h) + V\left(1 - \dfrac{y}{h}\right) \\ \left(\dfrac{du}{dy}\right)_{y=0} = \left\{ \dfrac{1}{2\eta} \dfrac{dp}{dx}(y-h) + \dfrac{y}{2\eta} \dfrac{dp}{dx} - \dfrac{V}{h} \right\}_{y=0} = \dfrac{h}{2\eta} \dfrac{dp}{dx} + \dfrac{V}{h} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^L \eta \left(\frac{h}{2\eta} \frac{dp}{dx} + \frac{V}{h} \right) dx = \int_{e_2}^{e_1} \eta \left(\frac{h}{2\eta} \frac{6\eta V}{\alpha (e_1 + e_2)} \frac{-h(e_1+e_2) + 2e_1e_2}{h^3} (-\alpha) + \frac{V}{h} \right) \left(-\frac{dh}{\alpha} \right) =$$

$$= \frac{\eta V}{\alpha} \int_{e_1}^{e_2} \left(\frac{3h(e_1+e_2) - 6e_1e_2}{h^2(e_1+e_2)} + \frac{1}{h} \right) dh = \frac{\eta V}{\alpha} \left(3 \ln h + 6 \frac{e_1 e_2}{h(e_1+e_2)} + \ln h \right)_{e_1}^{e_2} =$$

$$= \frac{\eta V}{\alpha} \left\{ 4 \ln \frac{e_2}{e_1} + 6 \frac{e_1 e_2}{e_1+e_2} \left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1} \right) \right\} = \frac{\eta V}{\alpha} \left(4 \ln \frac{e_2}{e_1} + 6 \frac{e_1 - e_2}{e_1+e_2} \right) = \left| \begin{array}{c} \alpha L = e_2 - e_1 \\ \alpha = \frac{e_2 - e_1}{L} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2\eta V L}{e_2 - e_1} \left(2 \ln \frac{e_2}{e_1} - 3 \frac{e_2 - e_1}{e_1 + e_2} \right) = \left| \varepsilon = \frac{e_1}{e_2} \right| = \frac{-2\eta V L}{e_2 (1-\varepsilon)} \left(2 \ln \varepsilon + 3 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)$$

que es la fuerza de arrastre F_a necesaria para mover la superficie inferior a una velocidad $\vec{v}$.

V.14.- COEFICIENTE DE ROZAMIENTO Y POTENCIA DISIPADA POR ROZAMIENTO

La componente horizontal de la fuerza $\vec{F}$ que soporta el cojinete αF, se deberá ajustar a la fuerza de rozamiento, casi horizontal; el coeficiente de rozamiento f del patín viene dado por:

$$f = \frac{F_a + \alpha F}{F} = \frac{F_a}{F} + \alpha$$

siendo la potencia N absorbida por el desplazamiento horizontal del patín, que es la potencia disipada por rozamiento $N = f F V$. En todas estas consideraciones se ha tenido en cuenta que el movimiento de la cuña de aceite es bidimensional y que no existen fugas laterales de aceite.