VII.- TEORÍA ELEMENTAL DE LA CAPA LIMITE BIDIMENSIONAL

pfernandezdiez.es

VII.1.- CAPA LIMITE LAMINAR Y TURBULENTA EN FLUJO SOBRE PLACA PLANA

En el movimiento de fluidos sobre una placa plana, la Hidrodinámica clásica se limita a imponer, como condición de contorno, la tangencia del vector velocidad, mientras que la Mecánica de Fluidos viscosos exige la condición adicional de adherencia al contorno de la placa, que es mucho más restrictiva que la de tangencia. En los fluidos poco viscosos, los esfuerzos tangenciales son, con frecuencia, muy inferiores a los de inercia o a los de gravedad, pero ésto no autoriza a prescindir de los esfuerzos viscosos que pueden llegar a ejercer una influencia considerable sobre la configuración del movimiento.

Prandtl, en 1904, propuso que el estudio del movimiento de un fluido de viscosidad pequeña se podía asimilar al de un fluido perfecto, salvo en una capa próxima al contorno, de espesor δ, en la que se concentraban los fenómenos de fricción, a la que llamó *capa límite*; en el exterior de dicha capa, las tensiones tangenciales son despreciables predominando las fuerzas de inercia sobre las fuerzas de viscosidad, mientras que en el interior de la capa límite, la proximidad del contorno hace que el gradiente de velocidades sea muy grande y, por lo tanto, que la tensión tangencial $\tau = \eta \dfrac{du}{dy}$ sea también muy grande; en esta situación, las fuerzas de fricción son del mismo orden de magnitud que las fuerzas de inercia.

***El** espesor δ de la capa límite* puede estar comprendido entre unas pocas moléculas y algunos milímetros, según los casos; fuera de la capa límite se pueden utilizar las ecuaciones de Euler o métodos experimentales basados en las líneas y redes de corriente, que una vez configuradas alrededor del perfil deseado, permiten obtener el campo de velocidades y la distribución de presiones correspondiente.

En el estudio de la capa límite hay que tener presentes las siguientes consideraciones:

- Aunque la perturbación producida por la fricción se propaga a todo el fluido, se admite que la propagación queda limitada a una zona del mismo de espesor finito δ *en sentido normal al contorno*

- La forma de la curva de distribución de velocidades en las distintas secciones a lo largo de la capa límite, se puede expresar, en general, mediante las siguientes ecuaciones, Fig VII.1:

Régimen laminar: $\frac{u}{V_0} = C + C_1 (\frac{y}{\delta}) + C_2 (\frac{y}{\delta})^2 + C_3 (\frac{y}{\delta})^3 + \ldots$

Régimen turbulento: $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$, en la que $\vec{V}_0$ es la velocidad uniforme del fluido no perturbado; la capa límite en su desarrollo longitudinal, Fig VII 1.b, muestra una tendencia progresiva al ensanchamiento.

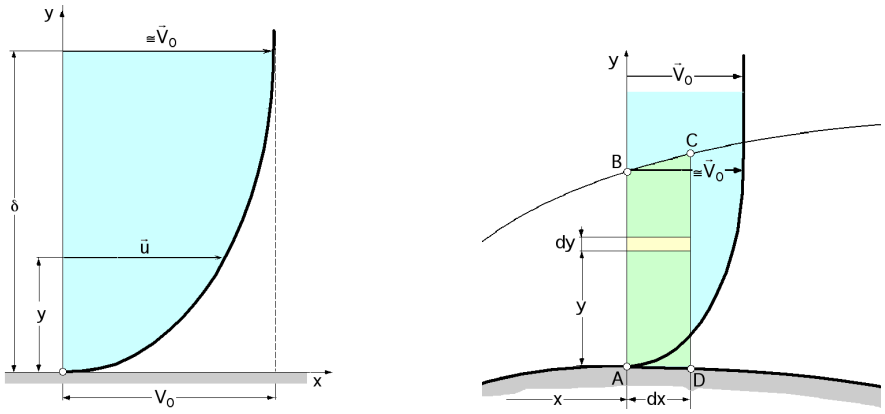


Fig VII.1.a.b.- Capa límite

Polinomio de segundo grado.- La distribución de velocidades es de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1(\frac{y}{\delta}) + C_2(\frac{y}{\delta})^2$$

con las condiciones que se indican, para: $\begin{cases} y = 0\,,\ u = 0 \Rightarrow C = 0 \\ y = \delta\,,\ u = V_0 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=\delta} = 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{V_0}\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=\delta} = (\frac{C_1}{\delta} + \frac{2\,C_2\,y}{\delta^2})_{y=\delta} = \frac{C_1}{\delta} + \frac{2\,C_2}{\delta} = 0 \Rightarrow C_1 + 2\,C_2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2\,C_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_1 = 2 \ ; \ C_2 = -1$$

el perfil de la distribución de velocidades de la capa límite en régimen laminar, es:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2\,y}{\delta} - (\frac{y}{\delta})^2$$

Polinomio de tercer grado.- La distribución de velocidades es de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1(\frac{y}{\delta}) + C_2(\frac{y}{\delta})^2 + C_3(\frac{y}{\delta})^3$$

con las condiciones, para: $\begin{cases} y = 0,\ u = 0 \Rightarrow C = 0 \\ y = \delta,\ u = V_0 \Rightarrow 1 = C_1 + C_2 + C_3 \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=\delta} = 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{V_0}\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=\delta} = \{\frac{C_1}{\delta} + \frac{2\,C_2}{\delta}(\frac{y}{\delta}) + \frac{3\,C_3 y}{\delta}(\frac{y}{\delta})^2\}_{y=\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + 2\,C_2 + 3\,C_3 = 0$$

$$Para:\ y = 0\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rangle_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V_0}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rangle_{y=0} = \{0 + \frac{2\,C_2}{\delta^2} + \frac{6\,C_3}{\delta^2}(\frac{y}{\delta})\}_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ C_1 + 2\,C_2 + 3\,C_3 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{3}{2} \ ; \ C_2 = 0 \ ; \ C_3 = -\frac{1}{2}$$

el perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, es:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3\,y}{2\,\delta} - \frac{1}{2}(\frac{y}{\delta})^2$$

Experimentalmente se ha comprobado, para placa plana, que el movimiento laminar en la capa límite llega a hacerse inestable cuando se sobrepasa un valor crítico del nº de Reynolds: $Re_c = \frac{V_0\ x_C}{\nu}$ siendo x_C la distancia a partir del borde de ataque de la placa.

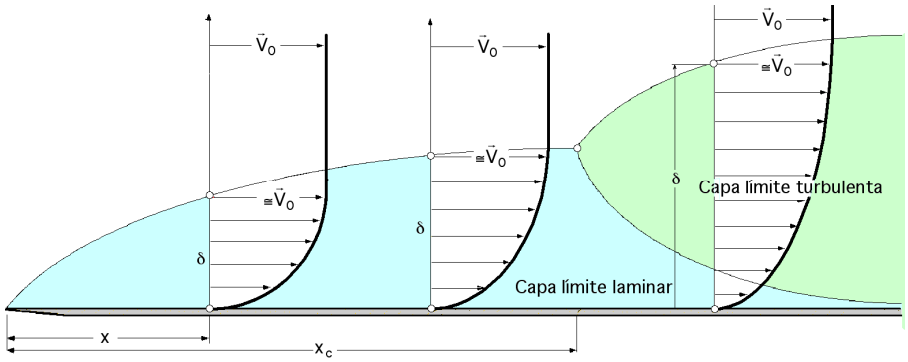


Fig VII.2.- Desarrollo de la capa límite laminar

La capa límite continua su desarrollo, como se muestra en la Fig VII.2; a partir de x_C, se origina la capa límite turbulenta, que se divide en dos subcapas, una de las cuales, en las proximidades de la placa, permite definir una delgada subcapa marcadamente laminar.

Los valores críticos del número de Reynolds que definen la transición, para *placa plana*, son:

$$Re_{laminar} < 5.10^5 \quad ; \quad Re_{turbulento} > 3.10^6$$

Para fluidos que circulan entre dos paredes próximas, el ensanchamiento progresivo de la capa

límite de cada contorno determina que éstas se unan, a una cierta distancia de la entrada, desapareciendo la zona en que el movimiento podía ser asimilable a un fluido perfecto, para realizarse todo él bien en régimen laminar, o bien en régimen turbulento, según el valor del número de Reynolds.

En tuberías sólo se puede considerar el movimiento como irrotacional en las proximidades de la embocadura; con flujo totalmente desarrollado, no.

VII.2.- ESPESORES Y CAUDALES DE LA CAPA LIMITE

Mediante el concepto de capa límite es posible concentrar en un espesor δ los fenómenos de fricción; ello implica el que se tengan que cumplir las siguientes condiciones:

- El valor de la velocidad $\vec{u}$ correspondiente a ($y = \delta$) tiene que estar muy próximo a $\vec{V}_0$, pues entonces el gradiente de velocidades es despreciable; suele tomarse, $u = 0{,}99\ V_0$.

- El esfuerzo de fricción evaluado en la zona de espesor δ , (a lo largo del contorno), mediante la ecuación de la cantidad de movimiento, tiene que coincidir con el obtenido analíticamente para la capa límite laminar, o con el deducido experimentalmente en la capa límite turbulenta.

En ambas situaciones la distribución de velocidades viene dada, para el régimen:

- Laminar, por polinomios de grado m (en general parábolas de segundo o tercer grado)

- Turbulento por polinomios de grado (1/m)

Espesor de desplazamiento de la capa límite.- El espesor de desplazamiento de la capa límite δ_1 está basado en la conservación del caudal a lo largo de la normal al contorno, mediante la equivalencia de las áreas rayadas, como se indica en la Fig VII.3.

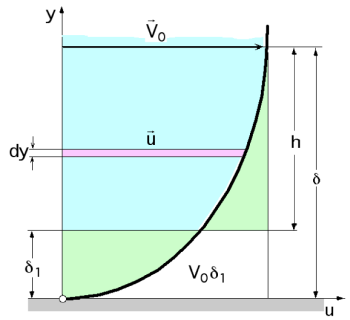


Fig VII.3
Espesor de desplazamiento de la capa límite

Si se admite que la ley de velocidades es asintótica a $\vec{V}_0$:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^{\infty} (V_0 - u)\ dy$$

y si la ley de distribución de velocidades alcanza el valor $\vec{V}_0$, para el espesor δ, se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^{\delta} (V_0 - u)\ dy = \frac{1}{V_0} \int_0^{\delta} (1 - \frac{u}{V_0})\ dy = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0}\ dy = \delta - \frac{q}{V_0}$$

que se puede interpretar como la diferencia entre el espesor δ y el espesor δ_1 de una corriente que tuviese la misma velocidad $\vec{V}_0$ que la corriente exterior y transportase la misma masa de fluido que la capa límite real (caudal q).

Considerando capa límite turbulenta: $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$ *, se tiene:*

$$\delta_1 = \delta - \int_0^\delta \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}\, dy = \delta - \frac{1}{\sqrt[m]{\delta}} \int_0^\delta \sqrt[m]{y}\, dy = \frac{\delta}{m+1}$$

Espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 se define en la forma:

$$\delta_2 = \frac{1}{V_0^2} \int_0^\delta u\,(V_0 - u)\, dy = \int_0^\delta \frac{u}{V_0}\,(1 - \frac{u}{V_0})\, dy$$

y se corresponde con el espesor de una corriente fluida que tenga la misma:

- *Velocidad* $\vec{V}_0$ *que la corriente exterior*
- *Variación de la cantidad de movimiento que la debida a la fuerza de arrastre de la capa límite real*

Considerando capa límite turbulenta: $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$ *se tiene:*

$$\delta_2 = \int_0^\delta \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \{1 - \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}\}\, dy = \frac{1}{\sqrt[m]{\delta^2}} \int_0^\delta \sqrt[m]{y}\,(\sqrt[m]{\delta} - \sqrt[m]{y})\, dy = \delta\, \frac{m}{(m+1)(m+2)}$$

La relación entre el espesor de desplazamiento δ_1 y el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2, (δ_1/δ_2), se denomina *Factor de forma* F del perfil; para una placa plana, en función de m se tiene:

$$F = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\delta\, \frac{1}{(m+1)}}{\delta\, \frac{m}{(m+1)(m+2)}} = \frac{m+2}{m}$$

Un valor elevado del factor de forma del perfil implica que está próximo a producirse el desprendimiento de la capa límite.

Espesor de energía de la capa límite.- El espesor de energía de la capa límite δ_3 se define en la forma:

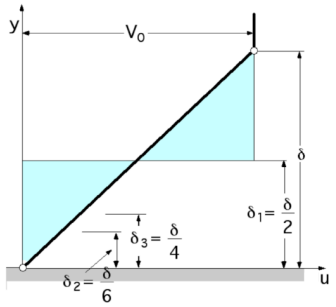


Fig VII.4.- Espesores de la capa límite en distribución triangular

$$\delta_3 = \frac{1}{V_0^3} \int_0^\delta u\,(V_0^2 - u^2)\, dy = \int_0^\delta \frac{u}{V_0}\,(1 - \frac{u^2}{V_0^2})\, dy =$$

$$= \left| \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \right| = \int_0^\delta \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}\, \{1 - \sqrt[m]{(\frac{y}{\delta})^2}\}\, dy = \delta\, \frac{2m}{(m+1)(m+2)}$$

Para hacernos una idea del orden de magnitud y significado de los diversos espesores de la capa límite así definidos, indicamos en la Fig VII.4, para el caso particular de una distribución de velocida-

des triangular *(m = 1)*, sus valores: $\delta_1 = \frac{\delta}{2}$; $\delta_2 = \frac{\delta}{6}$; $\delta_3 = \frac{\delta}{4}$

Caudal de la capa límite.- El caudal a través de la capa límite se ha definido como:

$$q = \int_0^{\delta} u \; dy$$

Teniendo en cuenta el espesor de desplazamiento:

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} dy - \int_0^{\delta} \frac{u \; dy}{V_0} = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u \; dy}{V_0}$$

resulta:

$$\delta - \delta_1 = \int_0^{\delta} \frac{u \; dy}{V_0} = \frac{q}{V_0} \quad \Rightarrow \quad q = V_0 \, (\delta - \delta_1) = V_0 \; \delta \; \frac{m}{m+1}$$

Caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite q_M se define en la forma:

$$q_M = m \; u = V \; \rho \; u = q \; \rho \; u = \int_0^{\delta} \rho \; u^2 \; dy$$

Teniendo en cuenta la expresión del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 se obtiene:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left\{1 - \frac{u}{V_0}\right\} dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \, dy - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} \, dy = \delta - \delta_1 - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} \, dy$$

$$\int_0^{\delta} u^2 \, dy = (\delta - \delta_1 - \delta_2) \; V_0^2$$

quedando la expresión del caudal de la cantidad de movimiento, en la forma:

$$q_M = \int_0^{\delta} \rho \; u^2 \, dy = \rho \; (\delta - \delta_1 - \delta_2) \; V_0^2 = \rho \; \delta \; V_0^2 \; \frac{m}{m+2}$$

función del espesor δ de la capa límite, del espesor de desplazamiento δ_1 y del espesor de la cantidad de movimiento δ_2.

VII.3.- ECUACIÓN INTEGRAL DEL IMPULSO DE LA CAPA LIMITE

Caudal de la cantidad de movimiento.- Como consecuencia de la viscosidad del fluido y de su deformación, aparece un esfuerzo tangencial sobre el contorno de la placa que determina lo que se conoce como *Resistencia de Superficie o de Forma.* Para calcular este esfuerzo se aplica el Teorema de la Cantidad de movimiento al volumen de fluido comprendido en el interior de la capa límite entre las secciones

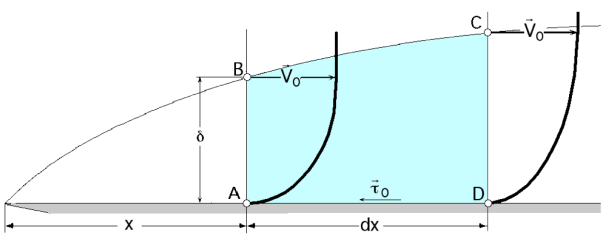


Fig VII.5.- Volumen de fluido en la capa límite

(AB) y (DC) de la Fig VII.5. Como el movimiento irrotacional exterior a la capa límite es uniforme, no existe gradiente de presiones y, al expresar el equilibrio, la única fuerza actuante es la de arrastre sobre la placa, de la forma, $\tau_0\ dx$.

Para una anchura de placa unidad, el caudal de la cantidad de movimiento se evalúa como sigue:

- Sobre la sección (AB), el caudal de la cantidad de movimiento entrante es:

$$q_{M(AB)} = m\ u = V\ \rho\ u = q\ \rho\ u = \int_0^\delta \rho\ u^2\ dy = q_M$$

- Sobre la sección (CD), el caudal de la cantidad de movimiento saliente es:

$$q_{M(CD)} = q_M + \frac{\partial q_M}{\partial x}\ dx = q_M + \rho\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\int_0^\delta u^2\ dy)\ dx$$

-En el volumen (ABCD) existe una variación del caudal de la cantidad de movimiento: $q_{M(AB)} - q_{M(CD)}$ *en la forma:*

$$\frac{\partial q_M}{\partial x}\ dx = \rho\ \frac{\partial}{\partial x}(\int_0^\delta u^2\ dy)\ dx$$

- Sobre el contorno (BC) no existe ningún tipo de esfuerzo cortante porque está fuera de la capa límite $\frac{du}{dy} = 0$*; teniendo en cuenta que sobre este contorno la velocidad es* $\vec{V}_0$*, el caudal de la cantidad de movimiento entrante por (BC) se obtiene en la forma:*

$$q_{M(B)} = m\ V_0 = q\ \rho\ V_0 = \rho\ V_0 \int_0^\delta u\ dy$$

$$q_{M(C)} = q_{M(B)} + \frac{\partial q_{M(B)}}{\partial x}\ dx = q_{M(B)} + \rho\ V_0\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\int_0^\delta u\ dy)\ dx$$

por lo que:

$$q_{M(BC)} = \rho\ V_0\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\int_0^\delta u\ dy)\ dx$$

-Sobre el contorno (AD) de contacto con la placa no hay caudal saliente de la cantidad de movimiento

Fuerza de arrastre.- Igualando el caudal de la cantidad de movimiento con la fuerza de arrastre $\vec{F}_a$ sobre la placa en dx, y aplicando el Teorema del Impulso se obtiene:

$$\tau_0\ dx = -\ \rho\ \frac{\partial}{\partial x}\ \int_0^\delta (u^2\ dy)\ dx + V_0\ \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (u\ dy)\ dx = \rho\ \frac{\partial}{\partial x}\ \{\int_0^\delta u\ (V_0 - u)\ dy\}\ dx$$

$$F_a = \int \tau_0\ dx = \rho \int_0^\delta u\ (V_0 - u)\ dy = \rho\ V_0^2\ \delta_2 = \frac{C_w x\ \rho\ V_0^2}{2}\ ,\quad con,\ \tau_0 = \frac{C_w \rho\ V_0^2}{2}$$

$$\tau_0 = \eta\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = \rho\ \frac{\partial}{\partial x}\ \{\int_0^\delta u\ (V_0 - u)\ dy\}\ ;\ \nu\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x}\ \{\int_0^\delta u\ (V_0 - u)\ dy\}$$

en la que $\delta_2 = \frac{C_w x}{2}$ se deduce comparándola con la obtenida por análisis dimensional; los valores de

C_w se obtienen mediante formulación, ábacos y tablas.

a) Para una distribución de velocidades de la capa límite laminar de la forma $\frac{u}{V_0} = \frac{2\,y}{\delta} - (\frac{y}{\delta})^2$, *resulta:*

$$\frac{1}{V_0}\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = \frac{2}{\delta} \ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = \frac{2\,V_0}{\delta}$$

con:

$$\tau_0 = \eta\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = \rho\ \frac{\partial}{\partial x}\{\int_0^{\delta} u\,(V_0 - u)\,dy\} = \rho\ V_0^2\ \frac{\partial}{\partial x}\{\int_0^{\delta}\ \frac{u}{V_0}\,(1 - \frac{u}{V_0})\,dy\}$$

obteniéndose:

$$\nu\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\{\int_0^{\delta}\ \frac{u}{V_0}\,(1 - \frac{u}{V_0})\,dy\}$$

$$\frac{2\,V_0\ \nu}{\delta} = V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta}\ \frac{u}{V_0}\,(1 - \frac{u}{V_0})\,dy\} = V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\{\int_0^{\delta}\ \{\frac{2\,y}{d} - (\frac{y}{d})^2\}\{1 - \frac{2\,y}{d} + (\frac{y}{d})^2\}\,dy =$$

$$= V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,(2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{5})\,\delta = \frac{2}{15}\ V_0^2\ \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

$$C_w = \frac{1}{L}\int_0^{L} C_x\,dx = 2\,C_x\rangle_{x=L} = \frac{1{,}4606}{\sqrt{Re_L}}$$

$$\frac{15\,\nu}{V_0}\,dx = \delta\,d\delta \ \Rightarrow\ \frac{15\,\nu}{V_0}\,x = \frac{\delta^2}{2} + C \ \Rightarrow\ \delta^2 = \frac{30\,x^2}{Re_x} \ \Rightarrow\ \frac{\delta}{x} = \frac{5{,}477}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha tenido en cuenta que para: $\begin{cases}\delta = 0\\ x = 0\end{cases} \ \Rightarrow\ C = 0$

Como: $\tau_0 = \eta\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = C_x\,\rho\,\frac{V_0^2}{2} = \eta\ \frac{2\,V_0}{\delta}$, los valores de los coeficientes C_x (local) y C_w (medio), son:

$$C_x = \frac{4\,\nu}{\delta\,V_0} = \frac{4\,x}{\delta Re_x} = \frac{4}{\frac{\delta}{x}\,Re_x} = \frac{4}{5{,}477\sqrt{Re_x}} = \frac{0{,}7303}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_w = \frac{1}{L}\int_0^{L} C_x\ dx = 2\,C_x\rangle_{x=L} = \frac{1{,}4606}{\sqrt{Re_L}}$$

b) Para una distribución de velocidades de la capa límite de la forma $\frac{u}{V_0} = \frac{3\,y}{2\,\delta} - \frac{1}{2}\,(\frac{y}{\delta})^3$, *resulta:*

$$\tau_0 = \eta\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = \eta\ \frac{3\,V_0}{2\,\delta}$$

$$\tau_0 = \rho\ V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\{\int_0^{\delta}\ \frac{u}{V_0}\,(1 - \frac{u}{V_0})\,dy\} = \rho\ V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\{\int_0^{\delta}\ \{\frac{3\,y}{2\,\delta} - \frac{1}{2}\,(\frac{y}{\delta})^3\}\{1 - \frac{3\,y}{2\,\delta} + \frac{1}{2}\,(\frac{y}{\delta})^3\}\,dy =$$

$$= 0{,}139\ \rho\ V_0^2\ \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{3\ \eta\ V_0}{2\ \delta}$$

Igualándolas:

$$\delta\, d\delta = 10{,}79\,\frac{\nu\, dx}{V_0} \;\Rightarrow\; \frac{\delta^2}{2} = 10{,}79\,\frac{\nu}{V_0}\,x + Cte = \left| Para:\ \begin{cases}\delta = 0\\ x = 0\end{cases} \Rightarrow\ Cte = 0 \right| = 10{,}79\,\frac{\nu}{V_0}\,x$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_0 = \frac{3\,\eta\, V_0}{2\,A} = \frac{3\,\eta\, V_0\sqrt{Re_x}}{2_x 4{,}64\,x} = \frac{0{,}323\,\eta\, V_0\sqrt{Re_x}}{x} = 0{,}323\,\sqrt{\frac{\eta\,\rho\, V_0^3}{x}} = \frac{\rho\, V_0^2\, C_x}{2}$$

$$C_x = \frac{0{,}646\,\nu\,\sqrt{Re_x}}{x\, V_0} = \frac{0{,}646}{\sqrt{Re_x}} \quad ;\quad C_w = \frac{1}{L}\int_0^L C_x\, dx = 2\, C_x\rangle_{x=L} = \frac{1{,}292}{\sqrt{Re_L}}$$

El valor de C_w obtenido para placa plana, está muy próximo al valor exacto (Blasius), de la forma:

$$C_x = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}} \quad ;\quad C_w = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re}} \quad ;\quad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

siendo la fuerza de arrastre $\vec{F}_a$ sobre cada cara de la placa de longitud L y anchura unidad:

$$F_a = \int_0^L \tau_0\ dx = \int_0^L 0{,}323\,\sqrt{\frac{\rho\,\eta\, V_0^3}{x}}\ dx = 0{,}646\,\sqrt{\rho\,\eta\, V_0^3\, L}$$

VII.4.- ECUACIONES DE PRANDTL DE LA CAPA LIMITE

Si se supone un fluido incompresible, en movimiento laminar permanente, en flujo bidimensional sobre una pared cualquiera en la que el radio de curvatura es muy superior al espesor de la capa límite, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican, quedando en la siguiente forma:

$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \nu\,\nabla u$, en la que: $\frac{du}{dt} = u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}$; $X = 0$, en la dirección del movimiento

La ecuación de continuidad es $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, y como: $v = 0$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\end{cases}$, la ecuación de Navier-Stokes queda en la forma:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = -\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial y} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En el borde de la capa límite se tiene la velocidad $\vec{V}_0$ del movimiento irrotacional exterior; aplicando la ecuación de Bernoulli se puede hallar la variación longitudinal de la presión, resultando:

$$\frac{1}{2}\,\frac{dV_0^2}{dx} = -\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\,\frac{dV_0^2}{dx} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

Si se introduce la función línea de corriente ψ, $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$; $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente; sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\ \partial y}\ \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

de aplicación a la obtención de la capa límite laminar sobre un contorno plano.

Ecuación clásica de Kàrmàn.- Los caudales de la cantidad de movimiento, en proyección paralela a la pared, manteniendo la anchura de la capa límite igual a la unidad, son los siguientes:

$y = \delta_T$

Sobre (CD): $q_{M(CD)} = q_M + \frac{\partial q_M}{\partial x}\ dx$ *, (saliente)*

Sobre (BC): $\frac{\partial q}{\partial x}\ dx\ V_0$ *, (entrante)*

La variación de la cantidad de movimiento es:

$$-q_M + (q_M + \frac{\partial q_M}{\partial x}\ dx) - \frac{\partial q}{\partial x}\ dx\ V_0 = \frac{\partial q_M}{\partial x}\ dx - \frac{\partial q}{\partial x}\ dx\ V_0$$

El impulso mecánico es:

$$p\ \delta - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\ dx)\ (\delta + \frac{\partial \delta}{\partial x}\ dx) - \tau_0\ dx = -(\tau_0 + \frac{\partial p}{\partial x}\ \delta)\ dx$$

Igualándolas se obtiene:

$$\frac{\partial q_M}{\partial x} - V_0\ \frac{\partial q}{\partial x} = -\tau_0 - \frac{\partial p}{\partial x}\ \delta$$

$$\frac{\partial q_M}{\partial x} - V_0\ \frac{\partial q}{\partial x} = \left| \begin{array}{l} q_M = (\delta - \delta_1 - \delta_2)\ V_0^2 \rho \quad ; \quad q = (V_0 \delta - \delta_1)\ \rho \quad ; \quad \delta - \delta_1 = Cte \\ \frac{\partial q_M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\{(\delta - \delta_1 - \delta_2)\ V_0^2 \rho\} = -\frac{\partial \delta_2}{\partial x}\ V_0^2 \rho + (\delta - \delta_1 - \delta_2)\ 2\ V_0\ \frac{\partial V_0}{\partial x}\ \rho \\ \frac{\partial q}{\partial x} = \rho\ (\delta - \delta_1)\ \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\partial \delta_2}{\partial x}\ V_0^2\ \rho + (\delta - \delta_1 - \delta_2)\ 2\ V_0\ \frac{\partial V_0}{\partial x}\ \rho - \rho\ (\delta - \delta_1)\ V_0\ \frac{\partial V_0}{\partial x} = -\tau_0 - \frac{\partial p}{\partial x}\ \delta =$$

$$= \left| p + \rho\ \frac{V_0^2}{2} = Cte\ ;\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\ V_0\ \frac{\partial V_0}{\partial x} \right| = -\tau_0 + \rho\ V_0\ \frac{\partial V_0}{\partial x}\ \delta$$

que simplificada queda en la forma:

$$\tau_0 = \frac{\partial \delta_2}{\partial x}\ V_0^2\ \rho + V_0\ \frac{\partial V_0}{\partial x}\ \rho\ (\delta_1 + 2\ \delta_2)$$

ecuación que se conoce como ecuación de Kàrmàn, en la que las variables V_0, δ_1 y δ_2 sólo dependen de x.

VII.5.- ECUACIÓN INTEGRAL DE LA ENERGÍA DE LA CAPA LÍMITE

El Primer Principio de la Termodinámica aplicado a un sistema abierto en régimen estacionario, permite calcular el calor Q puesto en juego en una transformación, en la forma:

$$Q = \Delta i + T + \Delta E_{cinética} + \Delta E_{potencial}$$

e indica que la energía se puede considerar en forma de entalpía, calor o energía cinética, con las unidades que el trabajo de cizalladura o de corte.

A pequeñas velocidades, los términos asociados a la energía cinética y potencial y al trabajo de cortadura son pequeños en comparación con las demás magnitudes, y se pueden despreciar.

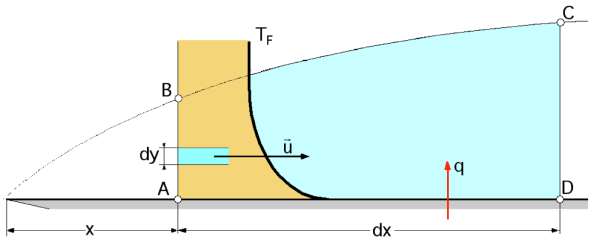


Fig VII.6.- Capa límite térmica

La velocidad a la que la entalpía entra a través de la sección (AB) de la capa límite representada en la Fig VII.6 viene dada por:

$$i_{AB} = m\, c_p T = c_p\, \rho \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy$$

mientras que la velocidad del flujo de entalpía a través de la sección (CD) es:

$$i_{CD} = i_{AB} + \frac{\partial i_{AB}}{\partial x}\, dx = i_{AB} + c_p\, \rho\, \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy \}\, dx$$

por lo que dentro de la capa límite quedará:

$$i_{AB} - i_{CD} = - c_p\, \rho\, \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy \}\, dx$$

La entalpía transportada al interior del volumen de control a través de la superficie (BC), es:

$$\Delta i_{BC} = c_p \rho\, T_F\, \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, dy \}\, dx$$

El calor conducido a través de la capa límite es:

$$q_k = - k\, dx \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Sumando todas las contribuciones energéticas, se obtiene la ecuación integral para la conservación de la energía:

$$c_p\, \rho\, T_F\, \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, dy \}\, dx - c_p\, \rho\, \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy \}\, dx - k\, dx \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Como fuera de la capa límite térmica la temperatura es T_F, sólo se integrará hasta el límite $y = \delta_T$ de la misma; por lo tanto:

$$c_p\ \rho\ T_F\ \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_T} u\ dy - c_p\ \rho\ \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_T} u\ T\ dy - k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_T} (T_F - T)\ u\ dy = \frac{k}{\rho\ c_p}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \alpha\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

que es la ecuación integral de la energía de la capa límite laminar para el caso de un flujo de baja velocidad, en la que dx se comporta como un intervalo y es independiente de dy.

Si se utiliza un perfil de velocidades de tercer grado, de la forma $\frac{u}{V_0} = \frac{3\,y}{2\,\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$, *y distribución de temperaturas:*

$$\frac{T - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F + T_F - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F}{T_F - T_{pF}} + 1 = \frac{3}{2}\ \frac{y}{\delta_T(x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_T(x)}\right)^2$$

en la que sustituyendo las condiciones: $\begin{cases} y = 0\ ;\ T = T_{pF}\ ;\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\ y = \delta_T\ ;\ T = T_F\ ;\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$, se obtiene:

$$\alpha\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_{pF} - T_F)\ V_0\ \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_T}\left\{1 - \frac{3}{2}\ \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3\right\}\left\{\frac{3}{2}\ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right\} dy =$$

$$= (T_F - T_{pF})\ V_0\ \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{20}\ \frac{\delta_T^2}{\delta} - \frac{3}{280}\ \frac{\delta_T^4}{\delta^3}\right)$$

Teniendo en cuenta que: $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_F - T_{pF})\ \frac{3\,k}{2\,\delta_T}$, resulta:

$$\frac{3\,\alpha}{2} = V_0\ \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{20}\ \frac{\delta_T^2}{\delta} - \frac{3}{280}\ \frac{\delta_T^4}{\delta^3}\right) d_T = \left| x = \frac{\delta_T}{\delta} \right| = V_0\ \frac{d}{dx}\left\{\delta\left(\frac{3}{20}\ x^2 - \frac{3}{280}\ x^4\right)\right\} x\ \delta$$

En la ecuación de Pohlhausen se demuestra que:

$$\xi = \frac{\delta_T}{\delta} = (Pr)^{-1/3}$$

El valor de Pr es del orden de la unidad para la mayor parte de los gases *(0,6 < Pr < 1)* mientras que para la mayor parte de los líquidos varía en un campo muy grande, con valores elevados para los aceites muy viscosos y bajas temperaturas, y valores muy bajos para los metales líquidos; en consecuencia, cuando:

$$\frac{\delta_T}{\delta} << 1\ \ ;\ \ \xi << 1\ \ \Rightarrow\ \ \xi^4 << \xi^2$$

resultando:

$$\frac{3\,\alpha}{2} = V_0\,\frac{d}{dx}\left(\delta\ \frac{3}{20}\ \xi^2\right)\xi\ \delta = \frac{3\,V_0}{20}\left(\xi^2\,\frac{d\delta}{dx} + 2\,\xi\ \delta\ \frac{d\xi}{dx}\right)\xi\ \delta\ \ \Rightarrow\ \ \frac{10\,\alpha}{V_0}\,dx = \xi^3\ \delta\ d\delta + 2\,\xi^2\ \delta^2\ d\xi$$

Derivando la solución hidrodinámica

$$\delta^2 = 21{,}58\ \frac{\nu\ x}{V_0} \quad \Rightarrow \quad 2\ \delta\ d\delta = 21{,}58\ \frac{\nu\ dx}{V_0}$$

y sustituyendo estos valores en la anterior, se obtiene:

$$\frac{10\ \alpha}{V_0}\ dx = \xi^3\ \frac{10{,}79}{\delta}\ \frac{\nu\ dx}{V_0} + 2 \cdot 21{,}58\ \xi^2\ \frac{\nu\ x}{V_0}\ dx \qquad \Rightarrow \qquad \xi^3 + 4\ x\ \xi^2\ \frac{d\xi}{dx} = \frac{13\ \alpha}{14\ \nu} = \frac{13}{14\ (Pr)}$$

La solución general es: $\xi^3 = C\ x^{-3/4} + \frac{10}{10{,}79\ Pr} = C\ x^{-3/4} + \frac{0{,}92678}{Pr}$

La solución exacta es: $\xi^3 = C\ x^{-3/4} + \frac{13}{14\ Pr} = C\ x^{-3/4} + \frac{0{,}92857}{Pr}$

y con la condición:

$$x = x_i \quad ; \quad \xi^2 = \left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^3 \Rightarrow 0 \quad ; \quad C = -\ \frac{13}{14}\ \frac{\sqrt[3]{x_i}}{Pr}$$

resulta : $\xi = 0{,}976\ \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}$, por lo que:

$$h_{Cx} = \frac{3\ k}{2\ \delta_T} = \frac{\frac{3\ k}{2}}{0{,}976\ \delta\ \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}} = \left| \delta = \frac{4{,}64\ x}{\sqrt{Re_x}} \right| = \frac{\frac{3\ k}{2}}{0{,}976\ \frac{4{,}64\ x}{\sqrt{Re_x}}\ \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}{Pr}}} =$$

$$= \frac{3\ k}{2\ x}\ \frac{\sqrt[3]{Pr}\sqrt{Re_x}}{0{,}976 \cdot 4{,}64\ \sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}} = 0{,}332\ k\ \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}}\ \frac{\sqrt[3]{Pr}\sqrt{Re_x}}{x}$$

$$Nu_x = \frac{h_{Cx}\ x}{k} = \frac{0{,}332\ \sqrt[3]{Pr}\sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}}$$

De haber considerado de partida la ecuación de tercer grado, se hubiera obtenido:

$$Nu_x = \frac{0{,}323\ \sqrt[3]{Pr}\sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}}}$$

Para $\frac{x_i}{x} = 0$ se obtiene la *ecuación de Pohlhausen*: $Nu_x = 0{,}332\ \sqrt{Re_x}\ Pr^{1/3}$

Teniendo en cuenta que:

$$\xi = \frac{0{,}976}{\sqrt[3]{Pr}} = \frac{\delta_T}{\delta} \quad ; \quad \delta_T = \frac{0{,}976\ \delta}{\sqrt[3]{Pr}} = 4{,}534\ \frac{x}{\sqrt{Re_x}\ \sqrt[3]{Pr}}$$

el coeficiente medio de transmisión de calor por convección h_C en el intervalo $(0 \le x \le L)$ a lo largo de la superficie plana es:

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx}\, dx = 2\, h_{Cx}\rangle_{x=L} = \frac{0{,}664\, k\, \sqrt{Re_L}\; Pr^{1/3}}{L} \quad (exacto)$$

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx}\, dx = 2\, h_{Cx}\rangle_{x=L} = \frac{0{,}646\, k\, \sqrt{Re_L}\; Pr^{1/3}}{L} \quad (ecuación\ de\ tercer\ grado)$$

El calor transmitido desde la placa, de anchura unidad, al fluido, es:

$$Q = L\, h_C\, (T_{pF} - T_F)$$

Si se considera existen dos zonas longitudinales sobre la placa, perfectamente diferenciadas, una sin aporte de calor, Fig VII.7, resulta:

$$Para: \begin{cases} x < x_1 \;\; ; \;\; Q = 0 \\ x > x_1 \;\; ; \;\; Q = 0{,}323\, \dfrac{k_F}{x}\, Pr^{1/3} \sqrt{Re_x}\; \dfrac{\Delta T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}} \end{cases} \qquad con,\ \Delta T = T_{pF} - T_F$$

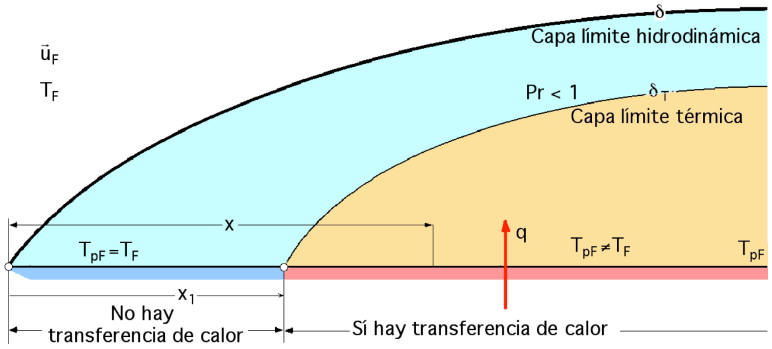


Fig VII.7- Capa límite térmica e hidrodinámica superpuestas

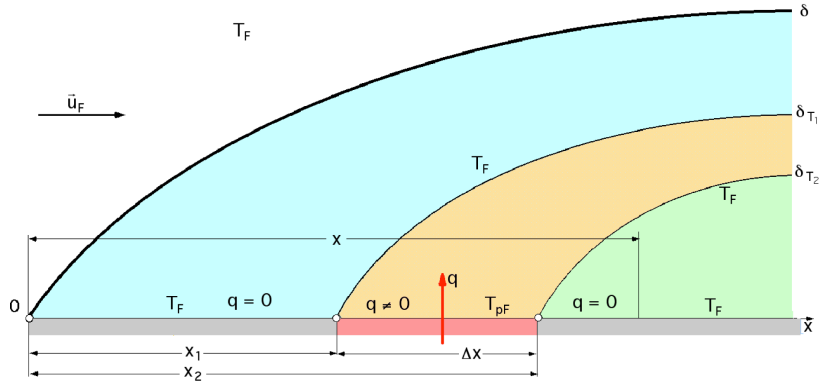


Fig VII.8 - Placa con una capa límite laminar y dos capas límite térmicas

Para una zona de la placa comprendida entre $(x_1 < x < x_2)$ a la que se aplica un flujo de calor Q, Fig VII.8, se tiene:

$$\tau_0 = \rho \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta} u\,(V_0 - u)\, dy \}$$

observándose que el flujo de calor en la región $(x_1 > x_2)$ es (-) lo cual significa que en la citada sección la pared reabsorbe parte del calor comunicado a la capa límite en la región $(x_1 < x < x_2)$.

Relación entre C_x y h_{Cx} en flujo laminar sobre placa plana.- A partir de la expresión exacta de Blasius para el coeficiente de arrastre local C_x a lo largo de una placa plana:

$$\frac{C_x}{2} = \frac{0{,}332}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha supuesto que para el espesor δ de la capa límite el gradiente de presiones es cero y las propiedades del fluido constantes, y del número de Nu local para el flujo laminar, (Pohlhausen):

$$Nu_x = 0{,}332 \sqrt{Re_x}\ Pr^{1/3}$$

Como el número de Stanton local St_x es:

$$St_x = \frac{h_{Cx}}{\rho\, c_p V_0} = \frac{Nu_x}{Pr\, Re_x} = \frac{0{,}332}{Pr^{2/3}\sqrt{Re_x}} = \frac{0{,}332\, C_x}{Pr^{2/3}\, 2_x 0{,}332} = \frac{C_x}{2\, Pr^{2/3}}\ ;\ \frac{C_x}{2} = St_x Pr^{2/3}\ ;\ Pr > 0{,}5$$

que se conoce como *analogía de Reynolds-Colburn* que relaciona el coeficiente de arrastre local C_x con el número de Stanton St_x para flujo laminar a lo largo de una placa plana.

Como es mucho más fácil hacer medidas de la fuerza de arrastre que de la transferencia de calor, para el caso de valores medios se puede poner:

$$\frac{C_w}{2} = St\, Pr^{2/3} = \frac{h_C}{\rho\, c_p\, V_0}\, Pr^{2/3}$$

en la que C_w es el coeficiente de arrastre medio y St el número de Stanton medio.

Teniendo en cuenta lo anterior, la fuerza de arrastre $\vec{F}_a$ queda en la forma:

$$F_a = \frac{\rho\,(L\,a)\, C_w\, V_0^2}{2} = \frac{\rho\,(L\,a)\, h_C\, V_0^2}{\rho\, c_p\, V_0} = (L\,a)\, \frac{h_C}{c_p}\, V_0$$

VII.6.- CAPA LIMITE TURBULENTA PARA PLACA PLANA

No existe una teoría exacta que permita estudiar la capa límite turbulenta; sin embargo sí existen modelos empíricos que han permitido la obtención de soluciones numéricas de las ecuaciones de la capa límite. El reparto de velocidades para la placa plana es aproximadamente logarítmico, habiéndose obtenido al efecto los siguientes resultados experimentales:

$$Para:\ 10^5 < Re < 10^7\ ;\ \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{d}}\ ,\ con:\ m = 7\ ,\ F = \frac{9}{7}$$

El valor de $\tau_0 = \rho\ \frac{\partial}{\partial x}\ \{\int_0^{\delta} u\ (V_0 - u)\ dy\}$ se puede aplicar también al régimen turbulento, por cuanto en su demostración no se ha fijado la forma de la distribución de velocidades en la capa límite, por lo que la distribución de velocidades $\frac{u}{V_0}$ puede ser:

$$Para\ ,\ \begin{cases} placa\ plana,\ \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{d}} \\ flujo\ turbulento\ por\ el\ interior\ de\ tuberías,\ (Nikuradse),\ \frac{u}{V_{máx}} = \sqrt[m]{\frac{y}{R}} \end{cases}$$

En estas circunstancias Blasius dedujo experimentalmente:

$$\tau_0 = 0\ ,0288\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{\delta\ \nu_0}}\ ,\ con,\ 5.10^5 < Re < 10^7$$

Siguiendo el mismo método que para el cálculo de la capa límite laminar:

$$\tau_0 = \rho\ V_0^2\ \frac{\partial}{\partial x}\ \{\int_0^{\delta}\ \frac{u}{V_0}\ (1 - \frac{u}{V_0})\ dy\} = \rho\ V_0^2\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\int_0^{\delta}\ \sqrt[7]{\frac{y}{\delta}}\ \{1 - \sqrt[7]{\frac{y}{\delta}}\}\ dy] = \frac{7}{72}\ \rho\ V_0^2\ \frac{d\delta}{dx}$$

Igualando las expresiones: $\frac{7}{72}\ \rho\ V_0^2\ \frac{d\delta}{dx} = \tau_0 = 0{,}0228\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{\delta\ V_0}}$, se obtiene:

$$\sqrt[4]{\delta}\ d\delta = 0{,}234\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0}}\ dx\ \ ;\ \ \delta^{5/4} = 0{,}292\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0}}\ x\ \ ;\ \ \frac{\delta}{x} = \frac{0{,}376}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

en donde se ha supuesto que la capa límite es turbulenta en el total de la longitud de la placa L de forma que para $(x = 0\ ,\ \delta = 0)$.

El esfuerzo cortante es:

$$\tau_0 = 0{,}0228\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[4]{\frac{\upsilon}{\delta\ V_0}} = 0{,}0228\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0\ \frac{0{,}376\ x}{\sqrt[5]{Re_x}}}} = 0{,}029\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[5]{\frac{\nu}{x\ V_0}}$$

La fuerza de arrastre F_a por unidad de anchura de la placa es:

$$F_a = \int_0^L \tau_0\ dx = 0{,}036\ \frac{\rho\ V_0^2\ L}{\sqrt[5]{Re_L}}\ \ ;\ C_x = \frac{0{,}0576}{\sqrt[5]{Re_x}}\ \ ;\ C_w = \frac{0{,}072}{\sqrt[5]{Re_L}} = \frac{P}{\frac{1}{2}\ \rho\ V_0^2\ L}$$

ecuaciones válidas en el intervalo en que lo es la ecuación de Blasius.

Para el número de Re crítico, $Re_C = 5.10^5$, resulta:

$$C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} - 0,00334\ \frac{x_C}{L} \cong \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} - \frac{1700}{Re_L}$$

Para valores de Re comprendidos en el intervalo, $5.10^5 < Re_x < 10^9$, resulta:

$$C_{wx} = \frac{0,455}{(\log_{10} Re_L)^{2,58}}$$

El coeficiente de arrastre, que es exacto para toda la placa, y que incluye las zonas laminar y turbulenta, se determina mediante las expresiones:

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_C}}\ \frac{Re_C}{Re_L} + 0,074\ Re_L^{-1/5}\ \{1 - (\frac{Re_C}{Re_L})^{4/5}\} \quad ; \quad Re_L > 10^7$$

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_C}}\ \frac{Re_C}{Re_L} + \frac{0,523}{ln^2\,(0,06\ Re_L)} - (\frac{Re_C}{Re_L})\ \frac{0,523}{ln^2\,(0,06\ Re_C)} \quad ; \quad Re_L < 10^7$$

VII.7.- DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LIMITE

Cuando el gradiente de presiones se mantiene nulo a lo largo de la placa plana, la capa límite se desarrolla a lo largo de la misma, independientemente de su longitud; pero si el gradiente de presiones es *adverso*, la presión aumenta en el sentido de la corriente, y el espesor de la capa límite crece rápidamente.

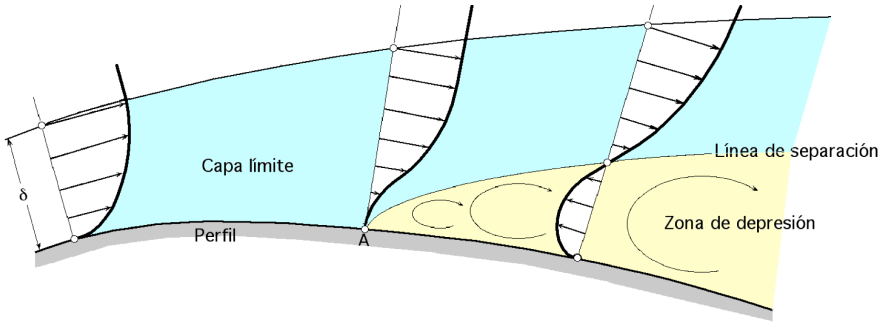


Fig VII.9.- Desprendimiento de la capa límite

Por otro lado, el gradiente de presión adverso junto con el esfuerzo cortante en la pared, hacen que disminuya la cantidad de movimiento dentro de la capa límite y, si ambos actúan a lo largo de una distancia suficiente, el fluido de la capa límite se irá frenando hasta alcanzar el reposo; en este instante, la línea de corriente que coincide con la pared se aleja de la superficie a partir del punto de separación, conociéndose este fenómeno como *desprendimiento de la capa límite*.

El fenómeno se acentúa cuando el perfil es un conducto divergente; el flujo en las proximidades del contorno se va frenando continuamente hasta alcanzar el punto A de la Fig VII.9, en el que la

velocidad se hace cero. La forma del contorno puede exigir una disminución mayor de la velocidad, cosa imposible, por lo que el fluido se separará de él, produciéndose al mismo tiempo un contraflujo originado por el gradiente de presiones adverso, es decir, aguas abajo del punto de desprendimiento se origina una zona de bajas presiones, que provocan la aparición de una fuerza depresiva dirigida en el sentido de la corriente, denominada *Resistencia de forma*, por depender hasta cierto punto de la geometría del perfil.

Tabla VII.2.- Coeficientes de arrastre C_w de algunos perfiles inmersos en una corriente fluida de velocidad $\vec{V}_0$

$$F_a = \frac{C_w \rho V_0^2 A_{Frontal}}{2}$$

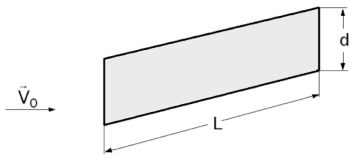
a) Placa plana paralela a la corriente



$$Régimen\ laminar: C_w = \frac{1,33}{\sqrt{Re}}$$

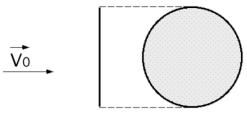
$$Re < 10^7 \Rightarrow C_w = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} \quad ; \quad Re > 10^7 \Rightarrow C_w = \frac{0,455}{(\log_{10} Re)^{2,58}}$$

b) Placa plana perpendicular a la corriente, Re > 10³



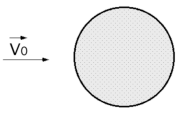
L/d	1	5	10	20	30	∞
C_w	1,18	1,2	1,3	1,5	1,6	1,95

c) Disco circular normal a la corriente



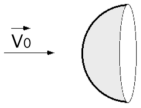
$Re > 10 \ ; \ C_w = 1,17$

d) Esfera

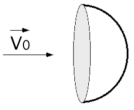


$Re < 1 \Rightarrow C_w = 24\sqrt{Re}$
$10^3 < Re < 3.10^5 \Rightarrow C_w = 0,47$
$Re > 3.10^5 \Rightarrow C_w = 0,2$

e) Hemisferio hueco

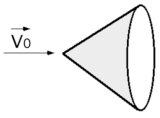


$10^4 < Re < 10^6$
$C_w = 0,34$



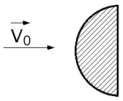
$10^4 < Re < 10^6$
$C_w = 1,42$

f) Cono de 60º

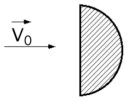


$Re = 10^5$
$C_w = 0,5$

g) Semicilindro

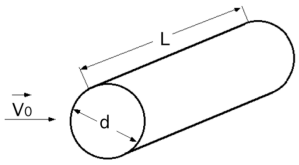


$10^4 < Re < 10^6$
$C_w = 0,42$



$10^4 < Re < 10^6$
$C_w = 1,17$

h) Cilindro normal a la corriente



$$Re<0,2 \quad ; \quad C_w = \frac{8\,\pi}{Re\,(2,2 - lg_{10}Re)}$$

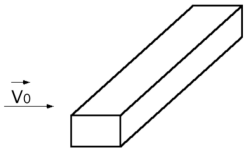
$10^3 < Re < 10^5$

L/d	1	5	10	20	30	∞
C_w	0,63	0,8	0,83	0,93	1	1,2

$Re > 5.10^5$

L/d	5	∞
C_w	0,35	1,6

i) Prisma





$Re = 3,5.10^4$

$C_w = 2$



$10^4 < Re < 10^5$

$C_w = 1,6$

j) Cubo



$Re = 10^5$

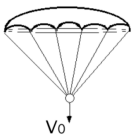
$C_w = 1,07$



$Re = 10^5$

$C_w = 0,81$

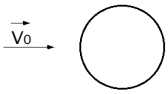
k) Paracaidas (baja porosidad)



$Re = 10^5$

$C_w = 1,2$

l) Sólidos de revolución elípticos



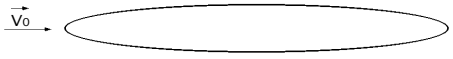
Relación 1 / 1 *Régimen laminar,* $C_w = 1,20$ *Régimen turbulento,* $C_w = 0,30$



Relación 2 / 1 *Régimen laminar,* $C_w = 0,60$ *Régimen turbulento,* $C_w = 0,20$

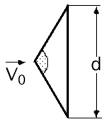


Relación 4 / 1 *Régimen laminar,* $C_w = 0,35$ *Régimen turbulento,* $C_w = 0,15$

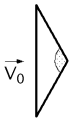


Relación 8 / 1 *Régimen laminar,* $C_w = 0,25$ *Régimen turbulento,* $C_w = 0,10$

m) Sólidos de revolución triangulares



120° ; Re > 10.000 ; $C_w = 1,72$



120° ; Re > 10.000 ; $C_w = 2$



60º ; Re > 10.000 ; C_w = 1,72



60º ; Re > 10.000 ; C_w = 1,39

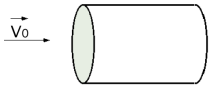


30º ; Re > 100.000 ; C_w = 1



30º ; Re > 100.000 ; C_w = 1,8

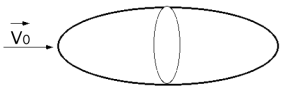
n) Cilindro de sección lenticular



Re > 10^3

L / d	*0,5*	*1*	*2*	*4*	*8*
C_w	*1,15*	*0,9*	*0,85*	*0,87*	*0,99*

o) Elipsoide



Relación L / d = 0,75 Régimen laminar, C_w = 0,50 Régimen turbulento, C_w = 0,20
Relación L / d = 1,00 Régimen laminar, C_w = 0,47 Régimen turbulento, C_w = 0,20
Relación L / d = 2,00 Régimen laminar, C_w = 0,27 Régimen turbulento, C_w = 0,13
Relación L / d = 4,00 Régimen laminar, C_w = 0,25 Régimen turbulento, C_w = 0,1
Relación L / d = 8,00 Régimen laminar, C_w = 0,20 Régimen turbulento, C_w = 0,08