VIII.- FLUJO VISCOSO INCOMPRESIBLE

pfernandezdiez.es

VIII.1.- FLUJO LAMINAR EN CONDUCTOS CIRCULARES

En un flujo laminar la corriente es relativamente lenta y no es perturbada por las posibles protuberancias del contorno, mientras que la viscosidad es relativamente grande, de forma que si por cualquier circunstancia se inicia un fenómeno de turbulencia, la viscosidad lo destruye.

En consecuencia la formulación que se va a desarrollar sirve, tanto para tuberías lisas como para tuberías rugosas, suponiendo que las partículas de fluido, en un flujo laminar a lo largo de un tubo, se mueven en capas cilíndricas coaxiales; en el eje del tubo, el desplazamiento se realiza a mayor velocidad, mientras que en las paredes permanece en reposo.

La distribución de velocidades en una sección transversal cualquiera del tubo obedece a las fuerzas de rozamiento transmitidas de capa en capa. Si se considera un tubo por el que circula un fluido, Fig VIII.1, de diámetro $2R$ y coaxialmente se toma un cilindro de fluido de diámetro $2r$ y longitud Δl, que se puede aislar imponiéndole unas condiciones de contorno, aplicando en su base frontal una presión p y en la posterior $(p - \Delta p)$, así como el coeficiente τ de cortadura.

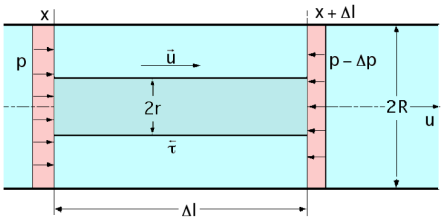


Fig VIII.1.- Tubo de fluido para la ecuación de Poiseuille

Sobre el cilindro actúa un *empuje longitudinal* de la forma:

$$F_{emp} = \pi\ r^2 \Delta p$$

La *fuerza de rozamiento:*

$$F_{roz} = \eta\ S\ \frac{du}{dr} = \left| S = 2\ \pi\ r\ \Delta l \right| = 2\ \pi\ \eta\ r\ \Delta l\ \frac{du}{dr},$$

es igual a la de empuje, por lo que:

$$2\,\pi\,\eta\,r\,\Delta l\,\frac{du}{dr} = \pi\,r^2\Delta p \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dr} = \frac{r\,\Delta p}{2\,\eta\,\Delta l} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\Delta p}{2\,\eta\,\Delta l}\int_r^R r\,dr = \frac{\Delta p}{4\,\eta\,\Delta l}\,(R^2 - r^2)$$

que es una distribución del campo de velocidades de tipo paraboloide de revolución.

La expresión del caudal es:

$$Q = \int_0^R u\,d\Omega = \int_0^R u\,2\,\pi\,r\,dr = \frac{\Delta p}{4\,\eta\,\Delta l}\int_0^R (R^2 - r^2)\,2\,\pi\,r\,dr = \frac{\pi\,R^4\Delta p}{8\,\eta\,\Delta l}$$

que es directamente proporcional a la variación de presión entre las secciones A y B, a la cuarta potencia del radio de la conducción, e inversamente proporcional al tramo de tubería considerada de longitud Δl y a la viscosidad dinámica η.

El caudal es $Q = \Omega\,u_F$, siendo u_F la velocidad media, que se puede poner en la forma:

$$u_F = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\frac{\pi\,R^4\Delta p}{8\,\eta\,L}}{\pi\,R^2} = \frac{R^2}{8\,\eta}\,\frac{\Delta p}{L}$$

y Δp la caída de presión en toda la tubería de longitud L.

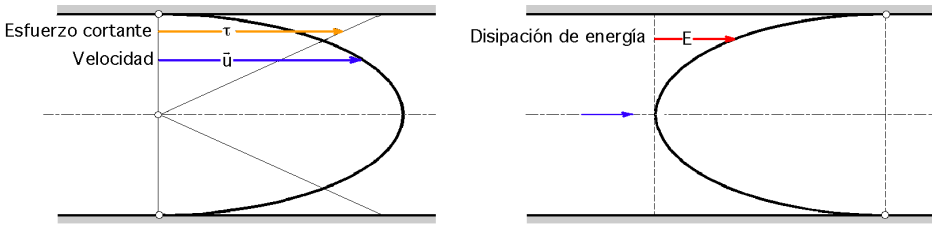


Fig VIII.3.- Distribución del coeficiente de cortadura, y disipación de energía

La *velocidad máxima* se tiene para $r = 0$, de la forma:

$$u_{máx} = \frac{R^2}{4\,\eta}\,\frac{\Delta p}{L}$$

La relación entre la velocidad máxima y la velocidad media es:

$$u_{máx} = 2\,u_F$$

Despejando de la expresión de la velocidad media el valor de Δp, se obtiene la ecuación de ***Poiseuille***, de la forma:

$$\Delta p = \frac{8\,\eta\,L\,u_F}{R^2} = \frac{32\,\eta\,L\,u_F}{d^2}$$

La pérdida de carga total Δp correspondiente a la longitud de tubería L se puede poner en fun-

ción de la pérdida de carga por unidad de longitud de tubería J, en la forma:

$$\Delta p = J\ L$$

expresión que se puede poner en función del nº de Re y el coeficiente λ de rozamiento, en la forma:

$$J = \frac{\Delta p}{L} = \frac{32\ \eta\ u_F}{d^2} = \frac{32\ \eta\ u_F}{d^2}\ \frac{u_F\ \rho}{u_F\ \rho} = \left| \ Re = \frac{u_F\ d}{\eta/\rho}\ \right| = \frac{32\ u_F^2\ \rho}{d\ Re} = \rho\ \frac{\lambda\ u_F^2}{2\ d} = \gamma\ \frac{\lambda\ u_F^2}{2\ g\ d} \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{64}{Re}$$

que es el valor del coeficiente λ de rozamiento para el flujo de un fluido por un conducto en régimen laminar.

El valor de Δp para el agua, en función de γ es: $\begin{cases} \gamma = 1\ ;\ \Delta e\ en\ (m) \\ \gamma = 1000\ (kg/m^3)\ ;\ \Delta e\ en\ (kg/m^2) \end{cases}$

La ecuación de Poiseuille indica que la pérdida de carga en régimen laminar, para tuberías lisas o rugosas, es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

En la Fig VIII.2 se indican otras distribuciones correspondientes al coeficiente τ de cortadura, velocidad $\vec{u}$ y disipación de energía por rozamiento.

VIII.2.- MOVIMIENTO TURBULENTO

Todos los estudios realizados para determinar las pérdidas de carga en el movimiento turbulento, se pueden representar por la expresión:

$$J = \frac{\rho\ \lambda\ u^2}{2\ d} = \frac{16\ \rho\ \lambda\ Q^2}{2\ \pi^2 d^5} = k\ Q^2$$

en la que: $\lambda = f(u, d, \rho, \eta, \frac{\varepsilon}{d}) = f(Re, \frac{\varepsilon}{d})$, *siendo* ε *la rugosidad absoluta*

Para ***tuberías lisas*** $\frac{\varepsilon}{d} = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = f(Re)$

a) $2000 < Re < 10^5$, $\lambda = 0{,}3164\ Re^{-0{,}25}$ *(Blasius)*

b) $Re > 10^5$; $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ lg_{10}\frac{Re\sqrt{\lambda}}{2{,}51}$ *(Primera ecuación de Kàrmàn-Prandtl)*

Para ***tuberías rugosas*** se pueden dar tres casos según el valor del número de Reynolds.

- Si el nº de Re es elevado:

$$\lambda = f(\frac{\varepsilon}{d}) \ \Rightarrow\ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ lg_{10}\frac{d}{2\ \varepsilon} + 1{,}74\ \ (2^a\ ecuac.\ de\ Kàrmàn\ Prandtl) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ lg_{10}\frac{d}{\varepsilon} + 1{,}14\ \ (Nikuradse) \end{cases}$$

- Si el número de Reynolds tiene un valor intermedio:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ lg_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{d}}{3,71} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right),\ para:\ \lambda = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right)\ (Colebrook\text{-}White)$$

- Para números de Reynolds bajos: $\lambda = f(Re)$

$$70.000 < Re < 1.500.000\ \ ;\ \ \lambda = 0,0054 + 0,369\ Re^{-0,3}\ \ (Herman)$$

Nikuradse experimentó con tuberías de rugosidad artificial, obtenida con granos de arena esféricos de diámetro e, con los que cubría el interior de las tuberías.

Como una protuberancia pequeña podía ser insignificante en una tubería de gran diámetro, la variable representativa del fenómeno no era la rugosidad absoluta ε sino la relativa $\frac{\varepsilon}{d}$ oscilando sus valores, para tuberías comerciales, entre los límites: $0,033 < \frac{\varepsilon}{d} < 0,000985$.

La rugosidad natural de las tuberías comerciales (hierro fundido, hormigón, etc), es irregular.

La rugosidad absoluta puede venir caracterizada por un valor de ε igual al diámetro de los granos de arena de una tubería de rugosidad artificial que diera el mismo valor de λ para un número de Re lo suficientemente elevado que cumpliese la ecuación: $\lambda = f\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$.

La ecuación de Colebrook-White se utiliza para hallar la pérdida de carga en los conductos industriales encontrándose los problemas prácticos más interesantes, dentro de su campo de aplicación.

Diagrama de Moody.- Las ecuaciones de Poiseuille, Blasius, Colebrook-White, Nikuradse, Kàrmàn-Prandtl, etc, permiten determinar todos los valores de λ que se presentan en la práctica; la ecuación de Colebrook-White, de cálculo muy laborioso, es la más universal y en la práctica se recurre a un ábaco, conocido como diagrama de Moody, Fig VIII.3, que:

a) Está construido en papel doblemente logarítmico; las variables que utiliza son λ, Re, en un diagrama, $(\ln\lambda, \ln Re)$

b) Es la representación gráfica de dos ecuaciones:

- La ecuación de Poiseuille, que en papel logarítmico es una recta; la prolongación dibujada a trazos es la zona crítica, en la que la corriente puede seguir siendo laminar a pesar de ser $Re > 2000$. De no ser así, λ podría caer en cualquier punto de la zona sombreada; la zona crítica es una zona de transición, en la que el flujo puede ser laminar, aunque en general es turbulento.

- La ecuación de Colebrook-White es una familia de curvas, una para cada valor del parámetro $\frac{\varepsilon}{d}$ que para números de Reynolds bajos, coinciden con las de Blasius y con la primera ecuación de Kàrmàn-Prandtl, es decir, son asintóticas a una u otra ecuación, y se van separando de ellas para valores crecientes del número de Reynolds.

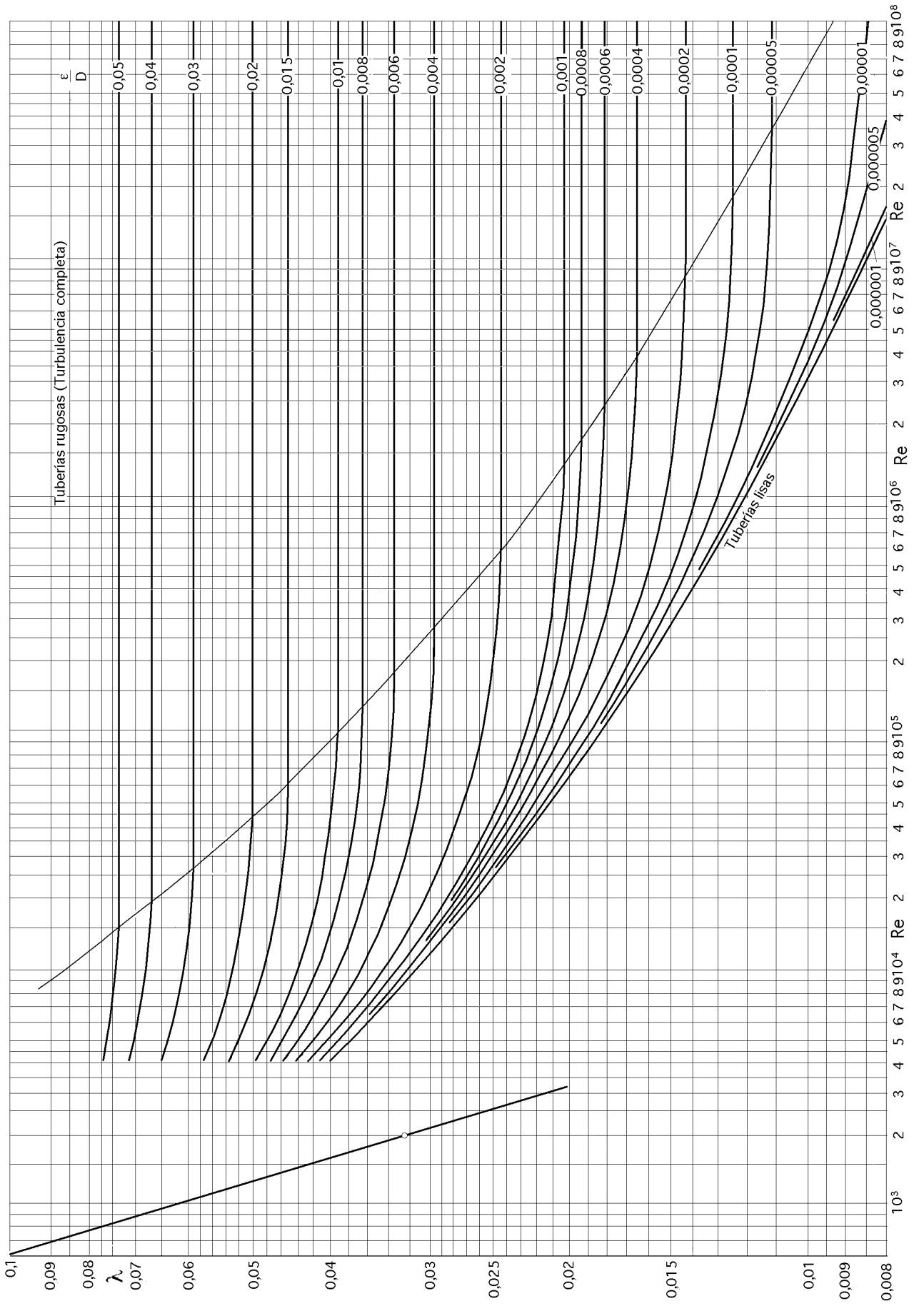


Fig VIII.3.- Diagrama de Moody

En algunos casos se puede hacer una primera aproximación tomando un valor de l comprendido entre los límites *(0,02 < λ < 0,03)*. Algunos de los valores de ε que se necesitan para entrar en este diagrama se pueden tomar de la Tabla VIII.1.

Tabla VIII.1.- Valores de la rugosidad de algunos materiales utilizados en la construcción de tuberías

Tipo de tubería	*Rugosidad ε (mm)*
Vidrio, cobre o latón estirado	*0,001 (ó lisas)*
Latón industrial	*0,025*
Acero laminado nuevo	*0,05*
Acero laminado oxidado	*0,15 a 0,25*
Acero laminado con incrustaciones	*1,5 a 3*
Acero asfaltado	*0,01*
Acero soldado nuevo	*0,03 a 0,1*
Acero soldado oxidado	*0,4*
Hierro galvanizado	*0,15 a 0,20*
Fundición corriente nueva	*0,25*
Fundición corriente oxidada	*1 a 1,5*
Fundición asfaltada	*0,1*
Cemento alisado	*0,3 a 0,8*
Cemento bruto	*Hasta 3*

VIII.3.- CALCULO DEL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO MEDIANTE ALGUNAS FORMULAS PRACTICAS

El valor de λ ha sido estudiado y determinado por muchos autores, pudiéndose considerar en algunos casos constante, y en otros, función de alguna variable; así se presentan una serie de grupos de fórmulas, debidas a determinados autores:

$$\begin{cases} \textit{Grupo 1: } \lambda = Cte & \textit{Dupuit, Chezy,...} \\ \textit{Grupo 2: } \lambda = f(d) & \textit{Darcy, Sonne, Levy, Bazin, Kutter, ...} \\ \textit{Grupo 3: } \lambda = f(u) & \textit{Weisbach, Saint – Venant, Prony, Zeuner, ...} \\ \textit{Grupo 4: } \lambda = f(d,u) = f(Re) & \textit{Flamant, ...} \\ \textit{Grupo 5: } \lambda = f(Re, \varepsilon/d) & \textit{Lang, Mises, ...} \end{cases}$$

2° Grupo.- ***Ecuación de Darcy.-*** En esta ecuación: $J = \dfrac{8\,\lambda}{g\,\pi^2 d^5}\,Q^2 = k\,Q^2$

el valor de λ se puede poner en la forma $\lambda = \alpha + \dfrac{\beta}{d}$ en la que los valores de α y β dependen de las características de la tubería.

Para tuberías lisas y nuevas: $\begin{cases} \alpha = 0{,}01989 \\ \beta = 0{,}0005078 \end{cases}$

Para tuberías usadas, los valores son dobles, es decir: $\begin{cases} \alpha = 0{,}03978 \\ \beta = 0{,}0010106 \end{cases}$

Campo de validez: $\begin{cases} 0{,}004 < d < 0{,}5\ m. \\ 0{,}25 < u < 2{,}5\ m/seg \end{cases}$

Para *conducciones nuevas*, los valores de k son los siguientes:

- La mitad de lo que diga la Tabla VIII.2, si se trata de fundición

- La tercera parte de lo que diga la Tabla VIII.2, si se trata de conducciones de chapa alquitranada.

Tabla VIII.2.- Valores de J/Q^2 de la fórmula de Darcy, (tubería usada)

Diámetro (m)	J / Q^2	*Diámetro (m)*	J / Q^2	*Diámetro (m)*	J / Q^2	*Diámetro (m)*	J / Q^2
0,005	---	0,15	50,639	0,31	1,24120	0,47	0,15099
0,01	116.790.000	0,16	36,301	0,32	1,05710	0,48	0,13565
0,02	2.338.500	0,17	26,626	0,33	0,90700	0,49	0,12236
0,027	445.600	0,18	19,836	0,34	0,77783	0,50	0,11039
0,03	250.310	0,19	15,059	0,35	0,67042	0,55	0,06828
0,04	52.561	0,20	11,571	0,36	0,58126	0,60	0,044031
0,05	15.874	0,21	9,0185	0,37	0,50591	0,65	0,029397
0,06	6020,9	0,22	7,1092	0,38	0,44275	0,70	0,020256
0,07	2666,1	0,23	5,6722	0,39	0,38811	0,75	0,014319
0,08	1321,9	0,24	4,5610	0,40	0,34134	0,80	0,010350
0,09	713,81	0,25	3,7052	0,41	0,30112	0,85	0,007620
0,10	412,42	0,26	3,0345	0,42	0,26640	0,90	0,005720
0,11	251,25	0,27	2,5036	0,43	0,23687	0,95	0,003460
0,12	160,01	0,28	2,0836	0,44	0,21076	1,00	0,003360
0,13	105,84	0,29	1,7420	0,45	0,18801	1,10	0,002090
0,14	72,222	0,30	1,4677	0,46	0,16844	1,20	0,001350

2° Grupo.- ***Ecuación de Levy***

- Para tuberías usadas: $\lambda = \dfrac{k}{1 + 3\sqrt{r}}$, *con:* $\begin{cases} r\text{, radio de la tubería} \\ k = 0{,}09301 \end{cases}$

- Para tuberías nuevas: $\lambda = \dfrac{0{,}02952}{1 + \sqrt{r}}$

Estas ecuaciones dan buenos resultados para: velocidades medias de hasta 2,5 m/seg, d > 1 m

2° Grupo.- ***Ecuación de Kutter***.- Es de aplicación al cálculo de sifones; el valor de λ con el que funciona es:

$$\lambda = \frac{8\,g}{\dfrac{50\sqrt{d}}{m + 0{,}5\sqrt{d}}} \text{ , en la que } \begin{cases} 0{,}25 \text{ para tuberías con incrustaciones ordinarias} \\ 0{,}30 \text{ para tuberías con incrustaciones medias} \\ 0{,}35 \text{ para tuberías con incrustaciones importantes} \\ 0{,}40 \text{ para tuberías con incrustaciones formadas rápidamente} \end{cases}$$

4° Grupo.- ***Ecuación de Flamant.-*** En este grupo: $\lambda = \dfrac{a}{\sqrt[4]{Re}}$

Para el caso particular del agua, considerando ν = Cte, se tiene: $\lambda = \dfrac{a^*}{\sqrt[4]{u\,d}}$

El valor de k de la expresión $J = k\,Q^2$, toma la forma: $k = \alpha\ \dfrac{16}{\pi^2 d^5}\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{u\,d}}$, en la que los valores de α dependen de la rugosidad.

Campo de aplicación: $\begin{cases} 1\ m < d < 3\ m \\ 2000 < Re < 10^5 \end{cases}$

Según sea el material de la tubería:
$$\begin{cases} \text{Fundición nueva: } \alpha = 0{,}00092 \\ \text{Fundición usada: } \alpha = 0{,}00074 \\ \text{Chapa: } \alpha = 0{,}00062 \\ \text{Plomo: } \alpha = 0{,}00052 \end{cases}$$

Tabla VIII.3.- Tabla de valores de λ de la fórmula de Flamant

Diámetro (m)	λ	Diámetro (m)	λ	Diámetro (m)	λ
0,01	4427000	0,22	1,86	0,45	0,062
0,015	645000	0,23	1,51	0,46	0,056
0,02	164500	0,24	1,23	0,47	0,051
0,025	57000	0,25	1,01	0,48	0,046
0,03	24000	0,26	0,84	0,49	0,041
0,04	6100	0,27	0,70	0,50	0,0377
0,05	2100	0,28	0,55	0,52	0,0313
0,06	890	0,29	0,50	0,55	0,0240
0,07	430	0,30	0,43	0,60	0,0158
0,08	227	0,31	0,36	0,65	0,0108
0,09	130	0,32	0,314	0,70	0,0076
0,10	79	0,33	0,271	0,75	0,0055
0,11	50	0,34	0,235	0,80	0,0040
0,12	33	0,35	0,205	0,85	0,0030
0,13	22,6	0,36	0,179	0,90	0,0023
0,14	15,6	0,37	0,157	0,95	0,0018
0,15	11,5	0,38	0,139	1,00	0,0014
0,16	8,4	0,39	0,123	1,05	0,0011
0,17	6,3	0,40	0,107	1,1	0,00089
0,18	4,8	0,41	0,097	1,2	0,00059
0,19	3,8	0,42	0,087	1,3	0,00040
0,20	2,3	0,43	0,077	1,4	0,00028
0,21	2,2	0,44	0,066	1,5	0,00020

5° *Grupo.-* ***Ecuación de Mises***.- El valor de λ es:

$$\lambda = 0{,}0096 + 5{,}7\sqrt{\frac{k}{d}} + \frac{1{,}7}{\sqrt{Re}}$$

en la que k depende del estado y clase de las superficies de contacto de las tuberías, y del líquido que por ellas circula; sus valores se exponen en la Tabla VIII.4.

Tabla VIII.4.- Valores de k en función del material de la tubería en la fórmula de Mises

Material	$10^6\,k$ (en metros)
Vidrio	0,064 a 0,256
Latón, cobre, plomo	0,064 a 0,320
Cemento pulido	2,40 a 4,80
Cemento tosco, sin pulir	6,40 a 16,00
Chapa con asfalto	9,60 a 19,20
Fundición lisa	32 a 64
Fundición oxidada	80 a 160
Chapa remachada	64 a 160
Fundición en servicio, con unión de brida sin resalto	80
Fundición en servicio, con unión de enchufe y cordón	100
Fundición en servicio, para agua sucia con incrustaciones	160

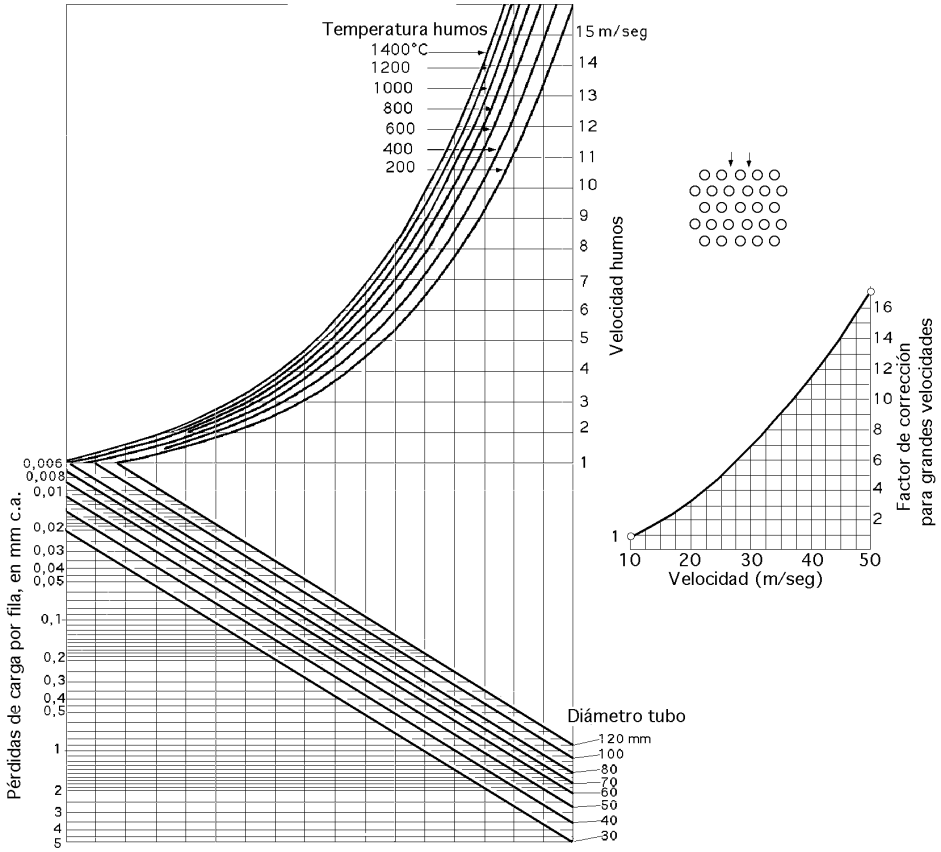


Fig VIII.4.a.- Pérdida de carga en mm, por fila de tubos en quincunce, con humos perpendicular a los tubos.
Los resultados obtenidos de la gráfica se tienen que corregir multiplicándolos por d/0,04, siendo d el diámetro de los tubos en m

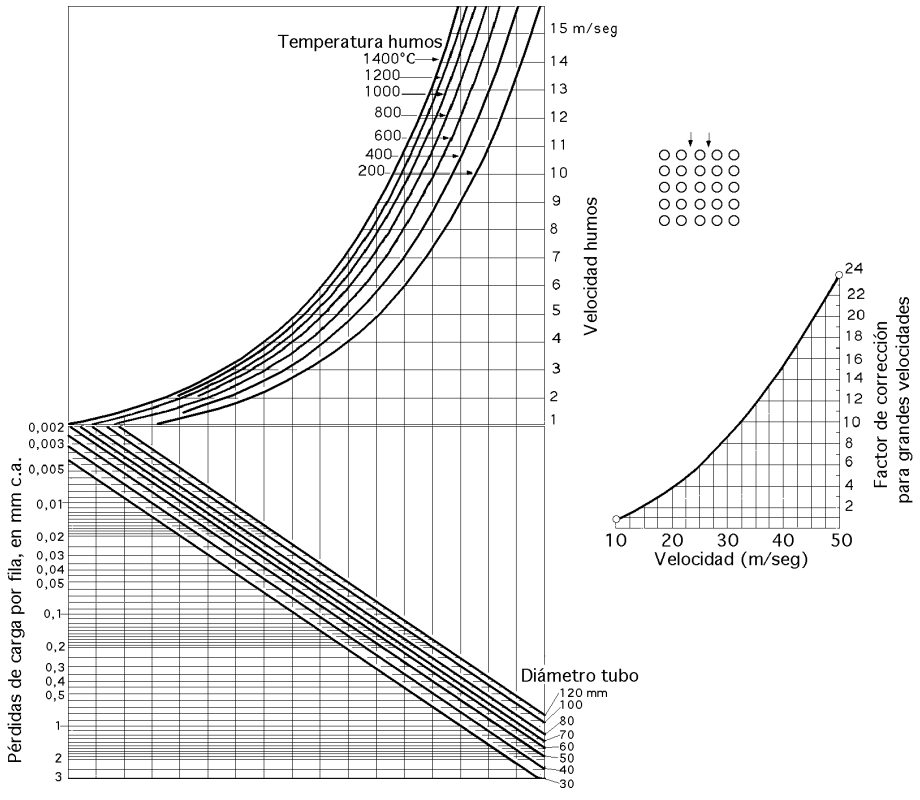


Fig VIII.4.b.- Pérdida de carga en mm, por fila de tubos en línea, con humos perpendicular a los tubos.
Los resultados obtenidos de la gráfica se tienen que corregir multiplicándolos por d/0,04, siendo d el diámetro de los tubos en m

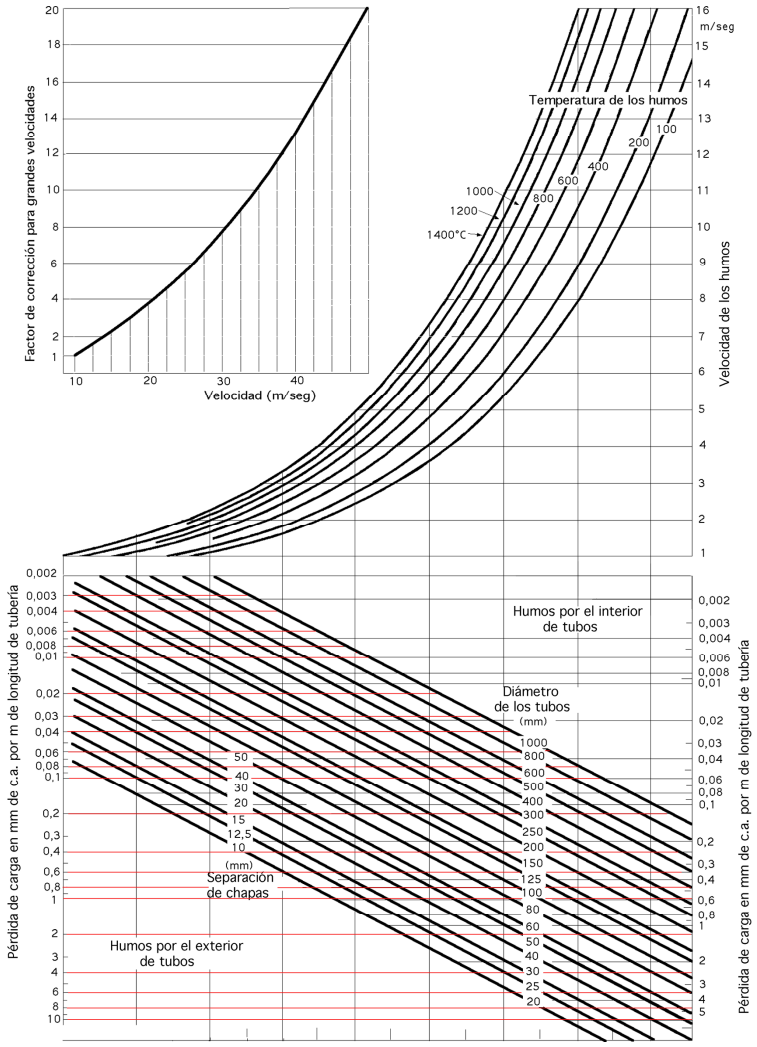


Fig VIII.4.c.- Pérdida de carga en mm, por metro lineal de tubo (o de chapa), con corriente paralela a las generatrices

VIII.4.- CALCULO GRÁFICO DEL VALOR DE *J* EN BATERIAS DE TUBOS

En las Fig VIII.4.a.b.c, se indica un método gráfico que permite determinar el coeficiente J en los siguientes casos de disposición de tubos y chapas:

- Corriente de humos perpendicular a los tubos en quincunce

- Corriente de humos perpendicular a los tubos en línea (disposición regular)

- Corriente de humos paralela a los tubos o a las placas, de forma que la distancia entre chapas sea igual a la mitad del diámetro de los tubos

Para grandes velocidades, el valor de *J* se calcula para u = 10 m/seg, se halla el factor de corrección para la velocidad deseada y se multiplica el valor de *J* a 10 m/seg por el factor de corrección, obteniéndose el valor de *J* a la velocidad en cuestión.

VIII.5.- FLUJO EN CONDUCTOS NO CIRCULARES

Flujo laminar, incompresible y permanente, entre dos placas paralelas.- En primer lugar

se puede suponer que las placas están inclinadas formando un ángulo θ respecto a la horizontal, teniendo la placa superior una velocidad constante u_0 ; el flujo entre las dos placas fijas es un caso particular, al hacer la velocidad de la placa móvil $u_0 = 0$.

La placa superior se mueve paralelamente en la dirección del flujo, existiendo a lo largo del mismo, en la dirección ***x***, una variación de presión. Si se toma un elemento de fluido en forma de lámina, Fig VIII.5, de dimensiones *(dx,dy)* y anchura unidad, para un flujo permanente, la lámina se moverá con velocidad constante $\vec{u}$, siendo la ecuación del movimiento:

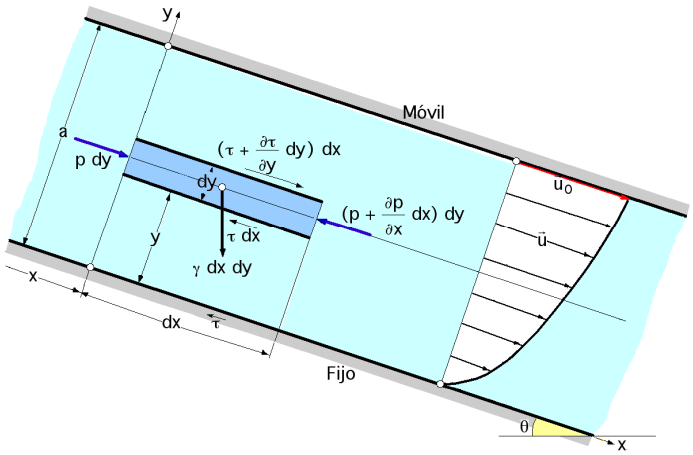


Fig VIII.5.- Flujo laminar entre placas paralelas

$$p\ dy - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\ dx)\ dy - \tau\ dx + (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\ dy)\ dx + \gamma\ dx\ dy\ sen\ \theta = 0$$

que simplificada se reduce a:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \gamma\ sen\,\theta = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \gamma\ \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\ (p + \gamma\ h)$$

en las que se ha tenido en cuenta que: $sen\ \theta = -\dfrac{\partial h}{\partial x}$

Como no existe aceleración en la dirección *y* el segundo miembro de esta ecuación no es función de *y*; integrándola se obtiene:

$$\tau = y\ \frac{\partial}{\partial x}\ (p + \gamma\ h) + C_1 = \eta\ \frac{du}{dy} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \dfrac{1}{\eta}\ y\ \dfrac{\partial}{\partial x}\ (p + \gamma\ h) + \dfrac{C_1}{\eta} \\ u = \dfrac{1}{\eta}\ \dfrac{\partial}{\partial x}\ (p + \gamma\ h)\ \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{C_1}{\eta}\ y + C_2 \end{cases}$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 utilizaremos las condiciones en los límites, de la forma:

$$Para \begin{Bmatrix} y = 0\ ,\ u = 0 \\ y = a\ ,\ u = u_0 \end{Bmatrix} \Rightarrow C_2 = 0$$

$$u_0 = \frac{1}{2\,\eta}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (p + \gamma\ h)\ a^2 + \frac{C_1}{\eta}\ a \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1}{\eta} = \frac{u_0}{a} - \frac{a}{2\,\eta}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (p + \gamma\ h)$$

$$u = \frac{1}{2\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(p + \gamma\,h)\,y^2 + \frac{u_0}{a}\,y - \frac{\partial}{\partial x}\,(p + \gamma\,h)\,\frac{a}{2\,\eta}\,y = \frac{u_0\,y}{a} - \frac{1}{2\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(p + \gamma\,h)\,(a\,y - y^2)$$

El gasto a través de una sección transversal cualquiera, es:

$$Q = \int_0^a u\;dy = \frac{u_0\,a}{2} - \frac{1}{12\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(p + \gamma\,h)\,a^3$$

siendo la velocidad media entre placas:

$$\hat{u} = \frac{Q}{a} = \frac{u_0}{2} - \frac{1}{12\,\eta}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(p + \gamma\,h)\,a^2$$

y el esfuerzo cortante en la pared:

$$\tau = \eta\,\frac{du}{dy}\tilde{n}_{y=0}^{y=a} = \{y\,\frac{\partial}{\partial x}\,(p + \gamma\,h) + \eta\,\frac{u_0}{a} - \frac{\partial}{\partial x}\,(p + \gamma\,h)\,\frac{a}{2}\}_{y=0}^{y=a} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\,\{(p + \gamma\,h)\,(y - \frac{a}{2})\}_{y=0}^{y=a} + \eta\,\frac{u_0}{a} = a\,\frac{\partial}{\partial x}\,(p + \gamma\,h) + \eta\,\frac{u_0}{a}$$

que se comprueba es constante.

El caso particular en que las dos placas sean fijas se resuelve haciendo, $u_0 = 0$.

Flujo laminar incompresible entre tubos cilíndricos concéntricos.- Para estudiar este tipo de flujo, se puede considerar un conducto en el que se toma una sección anular de fluido de espesor infinitesimal *dr*, radio *r*, y longitud *dx*, en el que el fluido tiene una aceleración nula, y después, como caso particular, aplicarlo al flujo laminar incompresible entre tubos cilíndricos concéntricos.

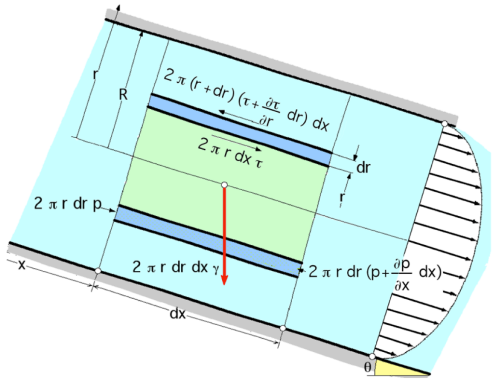


Fig VIII.6.- Flujo laminar entre tubos cilíndricos concéntricos

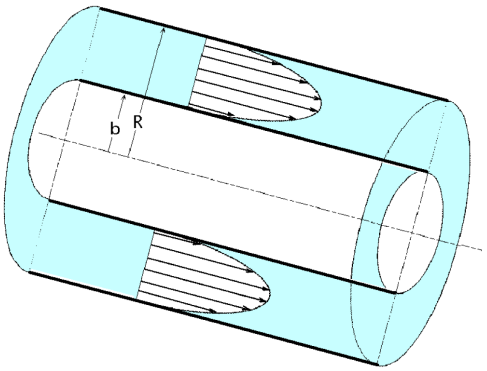


Fig VIII.7.- Isotaquia de velocidades para flujos concéntricos

De acuerdo con la Fig VIII.6, la ecuación del movimiento es:

$$2\,\pi\,r\,dr\,p - 2\,\pi\,r\,dr\,(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx) - 2\,\pi\,r\,\tau\,dx + 2\,\pi\,(r + dr)\,(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r}\,dr)\,dx + 2\,\pi\,r\,\gamma\,dr\,dx\,sen\,\theta = 0$$

Simplificando y despreciando el término $2\,\pi\,\frac{\partial \tau}{\partial r}\,dx\,dr^2$, resulta:

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} + \gamma \; sen\, \theta = \left| sen\, \theta = - \frac{\partial h}{\partial x} \right| = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial r} - \gamma \; \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) = \frac{1}{r} \; \frac{\partial (\tau \; r)}{\partial r}$$

Integrándola:

$$\frac{r^2}{2} \; \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) - r \; \tau = C_1 \quad ; \quad \frac{r^2}{2} \; \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) - \eta \; \frac{du}{dr} \; r = C_1$$

$$du = \frac{1}{2 \; \eta} \; \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) \; r \; dr - \frac{C_1}{\eta \; r} \; dr \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{4 \; \eta} \; \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) \; r^2 - \frac{C_1}{\eta} \; ln \; r + C_2$$

Para el caso de *flujo entre dos cilindros concéntricos* de radios: $\begin{cases} r = b \text{, para: } u = 0 \text{, (tubo interior)} \\ r = R \text{, para: } u = 0 \text{, (tubo exterior)} \end{cases}$

Las constantes C_1 y C_2 son: $\begin{cases} C_1 = \frac{1}{4} \; \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) (R^2 - b^2) \; \frac{1}{ln (R/b)} \\ C_2 = \frac{1}{4\eta} \; \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) \{ - R^2 + (R^2 - b^2) \; \frac{ln \; R}{ln (R/b)} \} \end{cases}$

y la velocidad y el caudal:

$$u = \frac{1}{4 \; \eta} \; \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) \{ r^2 - R^2 + (R^2 - b^2) \; \frac{ln (R/r)}{ln (R/b)} \}$$

$$Q = \int_b^R u \; 2 \; \pi \; r \; dr = \frac{\pi}{8 \; \eta} \{ - \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma \; h) \{ R^4 - b^4 - \frac{(R^2 - b^2)^2}{ln (R/b)} \}$$

pudiéndose obtener, a partir de estos resultados, los demás valores que caracterizan este flujo.

VIII.6.- DIÁMETRO HIDRÁULICO

Cuando el conducto no tiene sección circular, el análisis del flujo completamente desarrollado se puede considerar análogo al de tubos circulares; en flujo laminar, las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento se pueden resolver en forma exacta, mientras que para flujos turbulentos se puede hacer uso de perfiles logarítmicos, aunque resulta mucho más simple utilizar el *diámetro hidráulico*, que permite obtener buenas aproximaciones.

Se define el diámetro hidráulico como la relación, $d_h = 4 \; \frac{Sección \; transversal \; mojada}{Perímetro \; mojado}$, en la que el perímetro mojado viene determinado por todas las superficie sometidas a esfuerzos de fricción; la expresión de la pérdida de carga J por unidad de longitud, en función del diámetro hidráulico d_h es:

$$J = \frac{\lambda}{d_h} \; \frac{u^2}{2 \; g}$$

- *Para una conducción circular:* $d_h = 4 \; \frac{\frac{\pi \; d^2}{4}}{\pi \; d} = d$

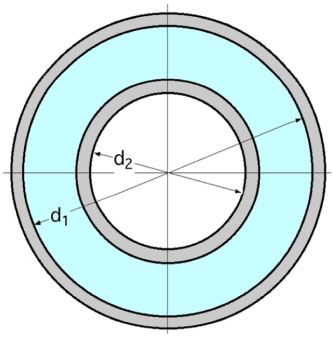


Fig VIII.8.- Dos tubos concéntricos

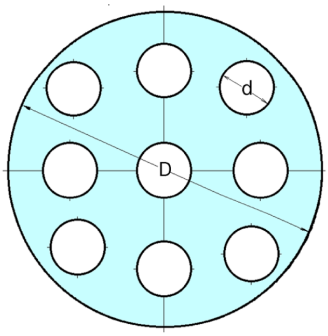


Fig VIII.9.- Tubos tipo intercambiador

- *Para una conducción cuadrada,* $d_h = a$

- *Para una conducción rectangular,* $d_h = \dfrac{2\,a\,h}{a+b}$

- *Para una conducción triangular,* $d_h = \dfrac{2\,a\,h}{a+b+c}$

- *Para dos tubos concéntricos*, Fig VIII.8, $d_h = 4\,\dfrac{\frac{\pi\,(d_2^2 - d_1^2)}{4}}{\pi\,(d_2 + d_1)} = \dfrac{(d_2 + d_1)(d_2 - d_1)}{d_2 + d_1} = d_2 - d_1$

- *Para varios tubos rodeados por una carcasa exterior*, Fig VIII.9, $d_h = 4\,\dfrac{\frac{\pi\,(D^2 - n\,d^2)}{4}}{\pi\,(D + n\,d)} = \dfrac{D^2 - n\,d^2}{D + n\,d}$

VIII.7.- RESISTENCIA DE FORMA

Pérdidas accidentales en conductos cerrados.- Las pérdidas accidentales tienen lugar en los cambios de sección y dirección de la corriente, en las contracciones, ensanchamientos bruscos, curvas, codos, bifurcaciones, o por accesorios instalados en ellas, como diafragmas, llaves, válvulas, etc. Todos ellos originan una perturbación de la corriente que provoca la aparición de remolinos, intensificándose de esta forma las pérdidas de carga, que en algunos casos pueden ser más importantes que las pérdidas continuas, sobre todo en conducciones relativamente cortas.

Se admite que si la conducción tiene una longitud superior a mil veces el diámetro, el error que se comete despreciando las pérdidas accidentales es menor que el que se cometería en el cálculo de ξ para las pérdidas continuas.

Las *pérdidas accidentales* se pueden expresar por la ecuación:

$$P_{acc} = \xi\ \frac{u^2}{2\,g}$$

en la que el coeficiente ξ se obtiene experimentalmente, teniendo un valor diferente para cada caso, función de las condiciones geométricas del accidente o del contorno, incluida la rugosidad ε y el número de Reynolds, aunque en la mayoría de los casos depende sólo del contorno.

El valor de la velocidad $\vec{u}$ se corresponde con el de la velocidad media del fluido si se trata de codos, válvulas, etc, mientras que es la velocidad en la sección menor cuando se trate de ensanchamientos bruscos o contracciones. Estas pérdidas se pueden calcular también utilizando la misma formulación que se emplea para las pérdidas continuas, sustituyendo en dicha expresión la longitud de la tubería L_g, por otra mayor que comprenda dichas pérdidas en metros de longitud de tubería, por lo que la longitud a utilizar en la fórmula será la longitud geométrica, más la longitud equivalente correspondiente a las pérdidas de carga accidentales $L = L_g + L_{equiv}$, siendo esta longitud equivalente de la forma:

$$L_{equiv} = \frac{\xi\ d}{\lambda}$$

Cuando $10.000 < Re < 20.000$, el valor de ξ no depende prácticamente de Re, estando comprendidos en éstos márgenes los problemas prácticos de fluidos con poca viscosidad, como el agua y el aire.

Teorema de Belanguer.- Cuando un fluido que circula por una tubería de sección Ω_1 pasa a otra sección Ω_2 de una forma brusca, Fig VIII.10, la sección Ω_1 de la vena fluida se irá ensanchando hasta alcanzar la sección Ω_2 y amoldarse a la tubería.

En el volumen de fluido (ABCD), correspondiente a la sección Ω_2 en las zonas comprendidas entre los límites de la sección Ω_1 y los codos en M y N, se forman unos remolinos, mientras que en el resto del citado volumen, se definen perfectamente las líneas de corriente, que tienden a colocarse paralelas a la conducción de sección Ω_2.

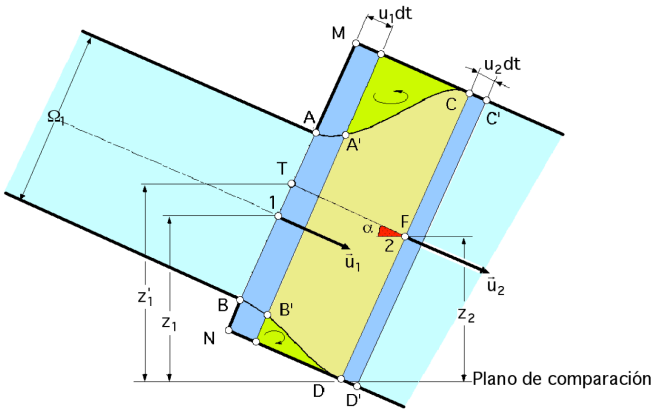


Fig VIII.10.- Ensanchamiento brusco

Se podría aplicar entre las secciones 1 y 2 la ecuación de Bernoulli, pero debido al ensanchamiento se desconocen las pérdidas de carga que se originan, las cuales se pueden determinar mediante el Teorema de la Cantidad de Movimiento, pudiéndose considerar que la cantidad de movimiento correspondiente al tramo de fluido contenido en la tubería de sección Ω_2, es decir, de (MNCD) en adelante, viene determinada por la cantidad de fluido entrante a través de la sección Ω_1 en el tiempo dt; si las zonas de remolinos permanecen prácticamente invariables, la masa fluida (ABCD) se habrá situado en el tiempo dt en la posición (A'B C'D').

La variación de la cantidad de movimiento, suponiendo flujo incompresible en régimen estacionario, será la diferencia entre las cantidades de movimiento correspondientes a los volúmenes (CDD'C') y (ABB'A'), por lo que tomando como eje de referencia el de la sección Ω_2 se tiene:

La variación de la cantidad de movimiento Δ(mu), teniendo en cuenta que: $\Omega_1 u_1 = \Omega_2 u_2$ *, es:*

$$\Delta(m\,u) = m_2 u_2 - m_1 u_1 = V_2 \rho u_2 - V_1 \rho u_1 = (u_2\, dt\, \Omega_2)\, \rho\, u_2 - (u_1\, dt\, \Omega_1)\, \rho\, u_1 = \rho\, u_2\, \Omega_2\, dt\, (u_2 - u_1)$$

El impulso mecánico $F\,dt$ resulta de multiplicar las fuerzas $\vec{F}$ que actúan sobre el fluido, por el tiempo considerado dt; estas fuerzas son las debidas al peso $\vec{F}_g$ y a las presiones $\vec{F}_p$ las cuales habrá que proyectar sobre el mismo eje de simetría, el de la sección Ω_2 ; así se tiene:

a) El *peso del volumen de fluido* (MNCD) proyectado sobre el eje de simetría citado es:

$$F_g = \gamma\, \Omega_2\, (\overline{MC})\, sen\, \alpha = \left| z_{1'} - z_2 = (\overline{MC})\, sen\, \alpha \right| = \gamma\, \Omega_2\, \frac{z_{1'} - z_2}{sen\, \alpha}\, sen\, \alpha = \gamma\, \Omega_2\, (z_{1'} - z_2)$$

b) La *resultante* $\vec{F}_p$ *de las fuerzas debidas a las presiones,* se puede obtener considerando que en los puntos T y F se tienen las presiones p' y p_2 respectivamente, mediante la diferencia entre las fuerzas que actúan sobre la cara (MN) y las que actúan sobre la cara (CD) en el sentido del movimiento es decir:

$$F_p = p_{1'}\, \Omega_2 - p_2\, \Omega_2 = \Omega_2\, (p_{1'} - p_2) = \left| \begin{array}{c} u_{1'} = u_1 \\ \frac{p_{1'}}{\gamma} + z_{1'} = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \end{array} \right| = \Omega_2\, \{p_1 - p_2 - (z_{1'} - z_1)\}$$

y la fuerza total debida al peso y a las presiones:

$$F = F_p + F_g = \Omega_2\, \{\gamma\, (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)\}$$

que multiplicada por dt e igualada a la que proporciona la variación de la cantidad de movimiento, permite obtener:

$$\rho\, \Omega_2\, u_2\, dt\, (u_2 - u_1) = \gamma\, \Omega_2\, (z_1 - z_2) + \Omega_2\, (p_1 - p_2)\}\, dt$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma}) = \frac{u_2}{g}\, (u_2 - u_1) = \frac{2\, u_2^2 - 2\, u_1\, u_2}{2\, g} + \frac{u_1^2}{2\, g} - \frac{u_1^2}{2\, g} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2\, g} - \frac{u_1^2}{2\, g} + \frac{u_2^2}{2\, g}$$

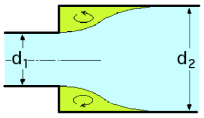
que se puede poner en la forma:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2\, g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2\, g} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2\, g}$$

y que comparada con la de Bernoulli, determina la expresión de la pérdida de carga para el ensanchamiento brusco, que se conoce como fórmula de Belanguer:

$$P_{acc} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2\,g} = \left| u_1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\,u_2 \right| = \frac{(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1)^2}{2\,g}\,u_2^2 = \xi\,\frac{u_2^2}{2\,g}$$

Si el líquido que llega por la tubería de sección Ω_1 desemboca en un gran depósito, $u_2 = 0$, se tiene, $P_{acc} = \dfrac{u_1^2}{2\,g} \quad \Rightarrow \quad \xi = 1$



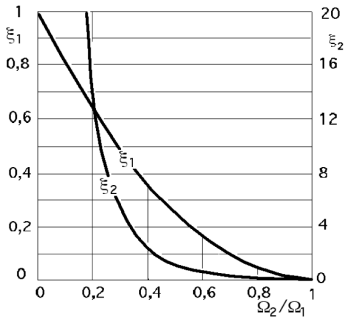


Fig VIII.11.- Pérdida de carga en ensanchamiento brusco

Pérdida de carga en ensanchamiento brusco.- Esta pérdida de carga según el teorema de Belanguer, es de la forma:

$$P_{acc} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2\,g} = \begin{cases} \dfrac{\{(\Omega_1/\Omega_2) - 1\}^2}{2\,g}\,u_1^2 = \xi_1\,\dfrac{u_1^2}{2\,g} \\ \dfrac{\{1 - (\Omega_2/\Omega_1)\}^2}{2\,g}\,u_2^2 = \xi_2\,\dfrac{u_2^2}{2\,g} \end{cases}$$

Pérdida de carga en ensanchamiento gradual.- En este caso, la determinación del coeficiente ξ de pérdida de carga no es tan sencilla, pudiéndose poner de acuerdo con la Fig VIII.12 en la forma:

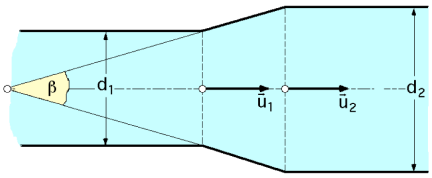


Fig VIII.12

$$\xi = m\,(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2})^2$$

La pérdida de carga es: $P_{acc} = m\,(1 - \dfrac{\Omega_1}{\Omega_2})^2 \quad \dfrac{u_1^2}{2\,g}$ viniendo dados los valores de m en la Tabla VIII.5.

Tabla VIII.5

β	2,5	5	7,5	10	15	20	25	30
m	0,18	0,13	0,14	0,16	0,27	0,43	0,62	0,81

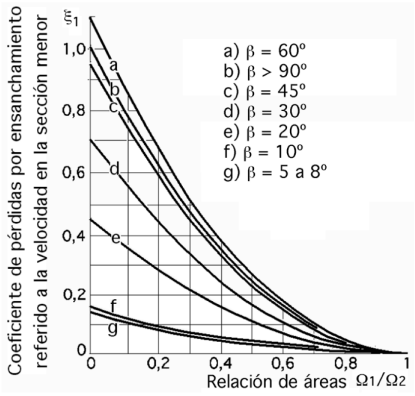


Fig VIII.13.- Coeficiente de pérdidas por ensanchamiento gradual-relación de secciones

En la Fig VIII.13 se puede calcular el valor de ξ_1 para diversos ángulos β y relación de secciones Ω_1 / Ω_2

Pérdida de carga por contracción brusca de la sección.- Si el fluido pasa de la sección Ω_1 a la sección Ω_2, experimenta en primer lugar una contracción e inmediatamente después un ensanchamiento, Fig VIII.14.a.b.c. Las pérdidas en la contracción, sección Ω_A, son despreciables y sólo habrá que tener en cuenta las pérdidas originadas en la expansión posterior, entre las secciones Ω_A y Ω_2.

Si llamamos μ al valor de la relación entre las secciones Ω_A y Ω_2 , que no es más que un coeficiente de contracción y considerando la ecuación de continuidad entre ambas secciones, resulta:

$$\mu = \frac{\Omega_A}{\Omega_2} = \frac{u_2}{u_A} \quad \Rightarrow \quad u_A = \frac{u_2}{\mu}$$

que sustituida en la ecuación de Belanguer, permite obtener:

$$P_{acc} = \frac{(u_A - u_2)^2}{2\,g} = \frac{(\frac{u_2}{\mu} - u_2)^2}{2\,g} = (\frac{1}{\mu} - 1)\,\frac{u_2^2}{2\,g} = \xi\,\frac{u_2^2}{2\,g}$$

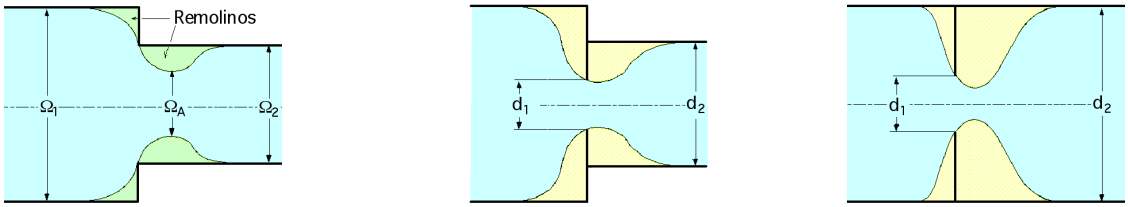


Fig VIII.14.a.b.c.- Tipos diversos de contracción brusca

Se pueden eliminar las pérdidas utilizando tubos progresivos de forma que la tubería se adapte a la vena fluida; de esta forma se puede llegar a obtener valores de ξ comprendidos entre 0 y 0,05. Según Weisbach, ξ toma los valores que se indican en las Tablas VIII.6 y 7:

Tabla VIII.6.- Para el caso a

Ω_2/Ω_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
μ	0,5	0,48	0,45	0,41	0,36	0,29	0,21	0,1	0,07	0,01	0

Tabla VIII.7.- Para los casos b y c

Ω_2/Ω_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
(b) ξ		231,7	51	19,8	9,6	5,16	3,08	1,88	1,17	0,74	
(c) ξ		225,9	47,8	30,8	7,8	3,75	1,8	0,8	0,29	0,06	

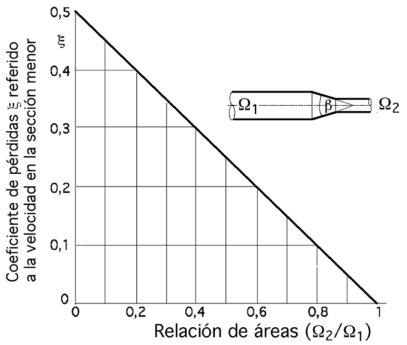


Fig VIII.15.- Coef. de pérdidas por contracción-relación de secciones
Caída de presión por estrechamiento con $\beta > 30^o$
Para $\beta < 30^o$, $\xi = 0,5$

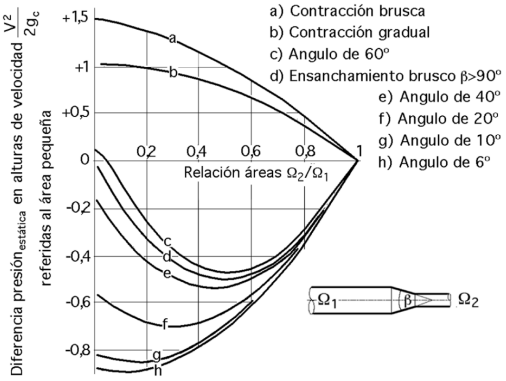


Fig VIII.16.- Diferencia de presión estática respecto a la relación de áreas, para cambios bruscos y graduales de sección

Pérdida de carga en curvas.- Es difícil determinar teóricamente estas pérdidas debido a que las líneas de corriente dejan de ser paralelas al eje de la conducción, presentándose circulacio-

nes secundarias, tal como se muestra en la Fig VIII.17. En la región A se forman torbellinos y en la B se estrecha la sección de la vena, seguida de una expansión, siendo éstas las principales causas de las pérdidas de carga.

Una ecuación que permite calcular el valor de ξ propuesta por Navier, es de la forma:

$$\xi = (0{,}00019 + 0{,}0009\ R)\ \frac{S}{R^2}$$

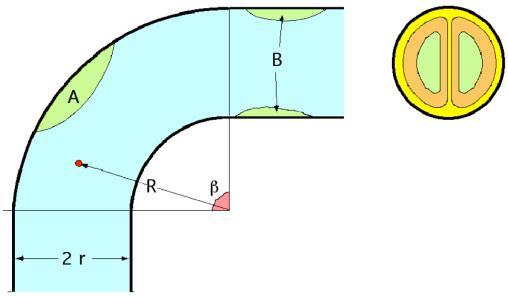


Fig VIII.17

en la que S es la longitud del arco medio, correspondiente al cambio de dirección y R es el radio de curvatura; el valor de las pérdidas de carga es:

$$P_{acc} = (0{,}00019 + 0{,}0009\ R)\ \frac{S}{R^2}\ \frac{u^2}{2\,g}$$

El valor de ξ se determina también en función de la relación $\frac{R}{r}$, siendo *r* el radio de la conducción, Tabla VIII.8.

Tabla VIII.8.- Valores de ξ propuestos por Weisbach, para tubería circular

r/R	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ξ		0,13	0,14	0,16	0,2	0,29	0,43	0,67	0,98	1,37	11,9

Otras expresiones propuestas al respecto son:

$$\text{Weisbach:} \begin{cases} \xi = \dfrac{\beta}{90}\ \{0{,}131 + 0{,}163\ (\dfrac{r}{R})^{3,5}\}\text{, para} \begin{cases} 30° < \beta < 180° \\ 1 < \dfrac{R}{r} < 5 \end{cases} \\ \xi = \dfrac{\beta}{90}\ \{0{,}131 + 0{,}848\ (\dfrac{r}{R})^{3,5}\}\text{, para } \dfrac{R}{r} >> \end{cases}$$

$$\text{Saint-Venant: } \xi = 0{,}138\ \frac{S}{R}\ \sqrt{\frac{r}{R}}$$

$$\text{Kauffman: } \xi = 0{,}276\ \frac{S}{R}\ \sqrt{\frac{r}{R}}$$

En este tipo de accidente, se presentan dos formas de pérdidas:

- Las debidas a la fuerza centrífuga, lo que supone la aparición de un flujo secundario que se superpone al flujo principal y que intensifica el rozamiento.

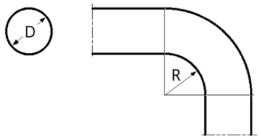
- Las producidas por la separación en A y por el estrechamiento en B.

Pérdida de carga en codos.- En este caso se presentan pérdidas semejantes a las ya citadas para curvas.

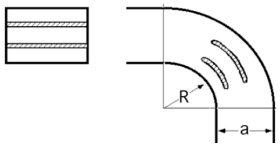
Para conductos circulares Weisbach propone la siguiente ecuación:

$$\xi = 0{,}9457\ sen^2\frac{\alpha}{2} + 2{,}047\ sen^4\frac{\alpha}{2}$$

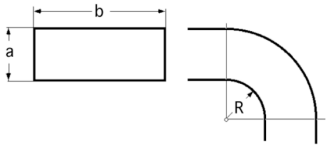
siempre que $\alpha < 90°$ y números de Re > 200.000 ; para: $\alpha = 90°$ el valor de $\xi = 1$.



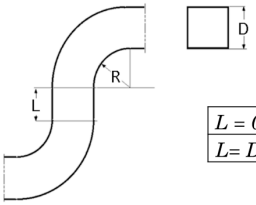
R/D	0	0,25	0,5	1
ξ	0,8	0,4	0,25	0,15



N° de álabes	1	2	3
R/a	0,25	0,2	0,15
ξ	0,15	0,12	0,1



R/a	b/a = 1	b/a = 2	b/a = 3	b/a = 4
0	1	0,9	0,8	0,73
0,25	0,4	0,4	0,39	0,32
0,5	0,2	0,2	0,18	0,16
1	0,13	0,13	0,13	0,1



L = 0	ξ = 0,62
L= D	ξ = 0,68

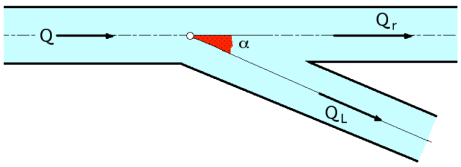
Pérdidas por bifurcaciones.- Pueden ser de dos tipos: $\begin{cases} \text{- de divergencia} \\ \text{- de confluencia} \end{cases}$

Hay que calcular por separado las pérdidas correspondientes al caudal del tramo recto principal Q_r que no cambia de dirección, y al caudal lateral Q_L mediante las expresiones:

$$P_{acc)_{rL}} = \xi_1 \frac{u_1^2}{2\,g} \quad ; \quad P_{acc)_{rr}} = \xi_2 \frac{u_2^2}{2\,g}$$

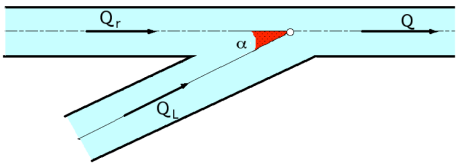
Si los conductos tienen el mismo diámetro, pueden suceder dos casos, según la corriente principal se divida en otras dos, o se reunan dos corrientes en una sola, tal como se indica a continuación.

a) Divergencia, (la corriente se divide en dos)



α	90°	45°
ξ	0,50	0,25

b) Convergencia, (se reúnen dos corrientes)

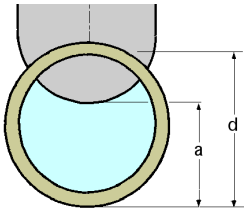


α	90°	45°
ξ	1,00	0,50

Fig VIII.18.- Bifurcaciones

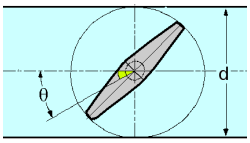
Pérdida de carga en válvulas.- El coeficiente ξ de pérdida de carga, depende de los siguientes factores: $\begin{cases} \text{- Tipo de válvula (compuerta, mariposa, etc)} \\ \text{- Diseño particular de cada una} \\ \text{- Grado de apertura correspondiente a cada válvula} \end{cases}$

Weisbach propone los siguientes valores experimentales:



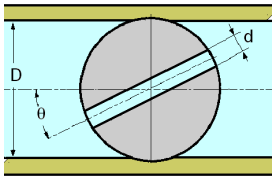
Válvula de compuerta

a/d	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
ξ	89,10	17,00	7,60	2,10	0,81	0,26	0,07	0



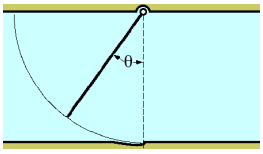
Válvula mariposa

θ	5º	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	90º
ξ	0,20	0,50	1,50	3,90	10	32	118	751	∞



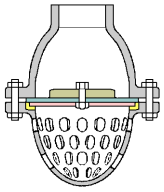
Válvula cilíndrica

θ	5º	10º	15º	20º	25	30º	35º	40º	45º	50º	55º	60º	65º	90º
ξ	0,05	0,30	0,8	1,60	3,1	5,50	9,7	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞



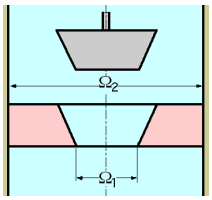
Válvula de retención

θ	10º	15º	20º	25º	30º	40º	50º	60º	65º
ξ	5,20	3,10	2,4	2,10	2	1,80	1,7	1,5	1,2



Válvula alcachofa

D (mm)	40	50	65	80	100	125	150	200	250	300	350	400	450	500
ξ	12,0	10,0	8,8	8,0	7,0	6,5	6,0	5,2	4,4	3,7	3,4	3,1	2,8	2,5



Válvula cónica

$$Se\ toma\ \xi = 1{,}645\ \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1$$

VIII.8.- FLUJO EN CONDUCTOS DE SECCIÓN RECTANGULAR

La pérdida de presión provocada por el cambio de dirección de un conducto de sección rectangular, es similar a la de una tubería cilíndrica. Sin embargo, se debe tomar un coeficiente adicional que depende del perfil del conducto con relación a la dirección del codo o curva, que se identifica como relación de forma, y se define como el cociente entre el ancho y la profundidad del conducto, es decir, la fracción b/d de la Fig VIII.19.

Para una misma relación de radios, r_1 / r_0 , la pérdida de presión en el codo o curva disminuye al aumentar la relación de forma b/d, como consecuencia de la menor influencia que tienen los flujos secundarios sobre las líneas de corriente principales.

En la Fig VIII.19 se representa el efecto combinado de la relación de radios y de la relación de forma, sobre un codo o curva de conducto con ángulo de 90º en función de altura de velocidad. Los valores del coeficiente de pérdida ξ son los promedios de resultados de ensayos realizados en conductos reales.

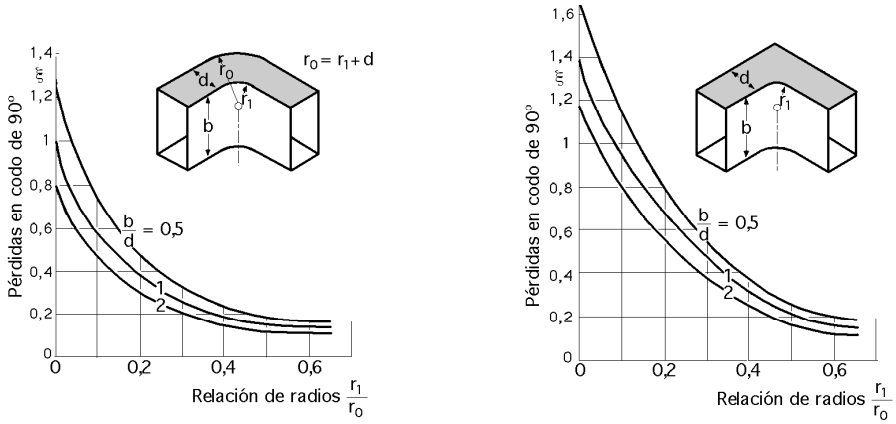


Fig VIII.19.- Pérdidas en codos de 90º de sección transversal rectangular

Para un determinado intervalo de la relación de forma, las pérdidas de presión son relativamente independientes del número de *Re*. Fuera del intervalo, la variación de la pérdida de presión resulta muy irregular. No obstante, y por lo que respecta a la utilización de los valores de ξ, se suelen hacer dos recomendaciones:

- Para relaciones de forma $\frac{b}{d} < 0,5$ *, se emplean los valores de* ξ *correspondientes a,* $\frac{b}{d} = 0,5$

- Para relaciones de forma $\frac{b}{d} > 2$ *, se emplean los valores de* ξ *correspondientes a,* $\frac{b}{d} = 2$

Las pérdidas de presión en codos o curvas de conductos, con ángulos distintos de 90º, se consideran proporcionales al valor del ángulo que tiene el codo o curva.

Deflectores de dirección.- Las pérdidas en un codo o curva de un conducto se pueden reducir redondeando o achaflanando sus bordes y mediante la instalación de deflectores de dirección o palas direccionales.

- Con el redondeo el tamaño del conducto se hace algo mayor, para conservar la misma sección transversal útil

- Con palas direccionales o deflectores de dirección, la forma del conducto se conserva, pudiéndose utilizar en un codo o curva de un conducto, un número cualquiera de deflectores

En la Fig VIII.20 se representan cuatro disposiciones diferentes, para un mismo codo o curva de 90º:

- La Fig VIII.20a representa palas con perfil segmentado

- La Fig VIII.20b representa palas idénticas delgadas simplemente curvadas

- La Fig VIII.20c representa palas separadoras concéntricas con el conducto

- La Fig VIII.20d representa palas simples para minimizar el despegue o separación del flujo de fluido, respecto de la arista viva interior del conducto

Las palas de dirección, con dimensiones y perfiles idénticos a los que muestra la Fig VIII.20b,

son las que se suelen instalar normalmente dentro de la curvatura de un codo o curva, en un mismo radio o sección del codo o curva del conducto, desde el borde interior hasta el exterior.

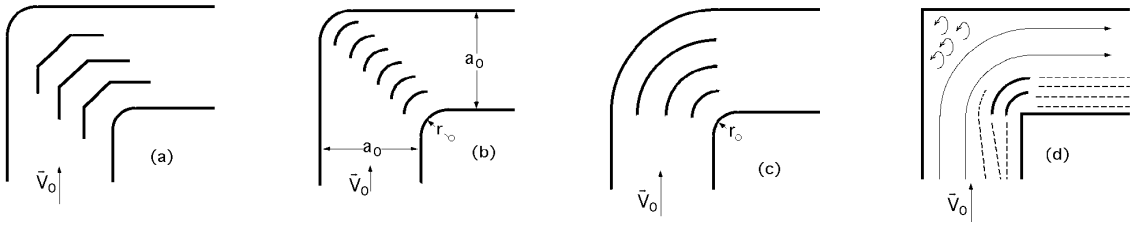


Fig VIII.20.- Palas direccionales en codos y curvas
a) Segmentadas; b) Estrechas concéntricas; c) Separadas concéntricas; d) Ranuradas

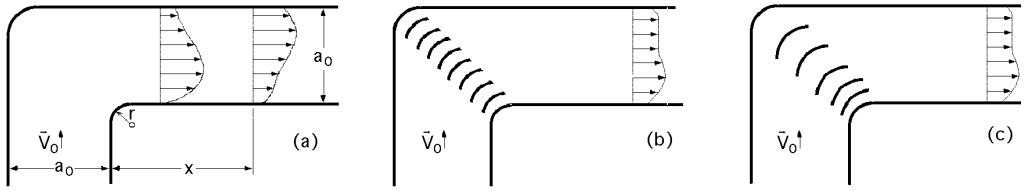


Fig VIII.21.- Perfiles de velocidades aguas debajo de un codo. a) Sin paletas ; b) Con paletas corrientes ; c) Con paletas optimizadas

Las palas concéntricas representadas en la Fig VIII.20c se instalan en el interior a lo largo de toda la curvatura, desde un extremo hasta el otro del codo.

La finalidad de las palas direccionales, es desviar el flujo hacia la pared interior que tiene el conducto en el codo o curva.

Cuando las palas se diseñan adecuadamente, la distribución del flujo previene la separación de las venas de fluido de las paredes y la formación de turbulencia aguas abajo del codo o curva. De esta forma, conforme se indica en la Fig VIII.21, se mejora la distribución de velocidades, disminuyendo la caída de presión en las secciones transversales que están aguas abajo del codo.

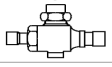
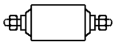
Para disminuir la pérdida de presión y lograr la compensación del campo de velocidades hay que eliminar cualquier zona de turbulencia en la pared del lado interior del codo del conducto.

Para un campo uniforme de flujo de fluido que entra en un codo de un conducto, con la instalación de palas menos separadas entre sí y más cercanas al radio interior del codo, se consigue un efecto más amplio en la disminución de la caída de presión inducida por el codo y en el establecimiento de un campo uniforme a la salida del cambio de dirección, Fig VIII.20d y Fig VIII.21c.

Para aplicaciones en las que se requiera una distribución uniforme de velocidades, inmediatamente aguas abajo del codo, Fig VIII.21b, es necesaria una disposición normal de palas direccionales. En otras aplicaciones, es suficiente la utilización de un reducido número de palas, Fig VIII.21c. Para el caso de campos de velocidades no uniformes de un flujo de fluido que entra en un codo de un conducto, la disposición idónea de las palas de dirección es difícil de determinar; en muchas ocasio-

nes hay que recurrir a la modelización numérica y a los ensayos de flujo en el sistema de conductos, para definir la ubicación adecuada de los deflectores.

Tabla VIII.9.- Pérdidas de carga en accesorios en m de longitud de tubería equivalente

Diámetro nominal de la tubería		*Codo de 90º* 	*Curva ancha* 	*Curva angosta* 	*Curva de 45º* 	*Curva ancha 90º* 	*Curva angosta 90º* 
Pulgadas	*mm*						
1/8	*10*	*2,8*	*0,28*	*0,4*	*0,2*	*0,45*	*0,85*
1/2	*12*	*2,5*	*0,35*	*0,5*	*0,25*	*0,53*	*0,75*
5/8	*16*	*2,7*	*0,38*	*0,55*	*0,27*	*0,6*	*0,85*
3/4	*18*	*3,8*	*0,42*	*0,6*	*0,3*	*0,87*	*0,95*
7/8	*22*	*3,5*	*0,49*	*0,7*	*0,35*	*0,77*	*1,1*
1.1/8	*28*	*4*	*0,58*	*0,8*	*0,45*	*0,92*	*1,3*
1.3/8	*35*	*6*	*0,84*	*1,2*	*0,6*	*1,25*	*1,8*
1.5/8	*42*	*7*	*0,98*	*1,4*	*0,7*	*1,5*	*2,2*
2.1/8	*54*	*7,5*	*1,1*	*1,5*	*0,75*	*1,85*	*2,4*
2.5/8	*65*	*9,5*	*1,3*	*1,9*	*0,95*	*2,1*	*3*
3.1/8	*80*	*12*	*1,7*	*2,4*	*1,2*	*2,7*	*3,9*
3.5/8	*90*	*14*	*1,9*	*2,8*	*1,4*	*3,2*	*4,5*
		T de paso 	*T de derivación* 	*Sifón* 	*Válv. retención uniones a 180º* 	*V.electromagnét 2 pasos a 180º* 	*Llave membrana uniones a 180º* 
1/8	*10*	*0,2*	*0,6*	*0,8*	*3,3*	*1,18*	*5*
1/2	*12*	*0,25*	*0,7*	*0,95*	*3,8*	*2,1*	*5,5*
5/8	*16*	*0,28*	*0,8*	*1,1*	*4,3*	*2,4*	*6,1*
3/4	*18*	*0,32*	*0,9*	*1,2*	*4,9*	*2,7*	*6,8*
7/8	*22*	*0,3*	*1*	*1,4*	*5,8*	*3,2*	
1.1/8	*28*	*0,45*	*1,2*	*1,65*	*7,2*	*4*	
1.3/8	*35*	*0,6*	*1,5*	*2,3*	*9*	*5*	
1.5/8	*42*	*0,8*	*2,1*	*2,7*	*11,5*	*6,2*	
2.1/8	*54*	*0,9*	*2,5*	*3,1*	*13,8*	*7,4*	
2.5/8	*65*	*1,2*	*3,2*	*3,8*	*17*	*9,1*	
3.1/8	*80*	*1,5*	*4,2*	*4,7*	*19*	*11*	
3.5/8	*90*	*2*	*5*	*5,5*	*25,8*	*14,3*	
		Llave esférica compensación integral 	*Llave esférica compensación reducida* 	*Válvula de retención* 	*Filtro deshidratador* 	*Filtro mecánico atascamiento normal* 	*Indicador de pasaje* 
1/8	*10*		*0,18*	*1,6*	*3,6*	*3,9*	*1,8*
1/2	*12*		*0,2*	*1,9*	*4,2*	*4,8*	*2,1*
5/8	*16*	*0,05*	*0,24*	*2,1*	*4,8*	*5,4*	*2,4*
3/4	*18*	*0,06*	*0,25*	*2,4*	*5,4*	*6*	*2,7*
7/8	*22*	*0,065*	*0,26*	*2,8*	*6,4*	*7,2*	*3,2*
1.1/8	*28*	*0,08*	*0,35*	*3,3*	*8*	*9*	*4*
1.3/8	*35*	*0,1*	*0,4*	*4,5*	*10*	*11*	*5*
1.5/8	*42*	*0,11*	*0,5*	*5,5*	*12,4*	*14*	*6,2*
2.1/8	*54*	*0,13*	*0,6*	*6,8*	*14,8*	*18,4*	*7,4*
2.5/8	*65*	*0,15*	*0,7*	*7,8*	*18,2*	*20*	*9,1*
3.1/8	*80*	*0,19*	*0,8*	*9,1*	*22*	*24*	*11*
3.5/8	*90*	*0,23*	*0,9*	*10,7*	*28,6*	*30*	*14,3*

Abaco para la determinación de pérdidas de carga en accesorios

en metros de longitud de tubería equivalente

