XI.- GOLPE DE ARIETE

pfernandezdiez.es

XI.1.- FORMULACIÓN DE MICHEAUD

Sea una conducción de sección constante S por la que fluye un líquido desde el depósito A al B. Supongamos que en B está instalada una válvula; si se cierra, se originará en B un aumento de presión que se transmitirá desde B hacia A; por el contrario, si en vez de cerrar la válvula, se abre, se originará en B una depresión que igualmente se transmitirá de B hacia A; tales efectos se denominan *golpe de ariete*; en todo el fenómeno, el depósito A mantiene constante el nivel de la superficie libre del agua, u otro líquido que contenga.

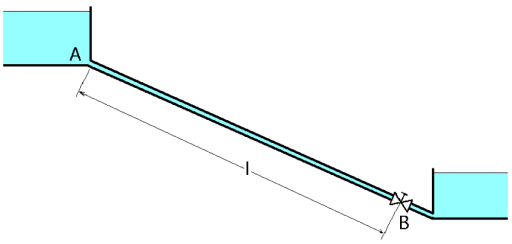


Fig XI.1

De acuerdo con la Fig XI.1, y tal como se ha dicho, al cerrar la válvula en B se origina un aumento de presión que, en B, pasará desde 0 hasta Δp, siendo su valor medio:

$$\frac{0+\Delta p}{2}=\frac{\Delta p}{2}$$

en el supuesto de que esta variación sea lineal.

Si se supone que t es el tiempo de cierre de la válvula el impulso mecánico $\Delta p\, S\, \frac{t}{2}$ disipa la cantidad de movimiento del líquido, y cuyo valor es igual a la masa contenida en el tubo (AB) multiplicada por la velocidad $\vec{u}$, de la forma:

$$\Delta M = S\, l\, \rho\, u$$

Igualando el impulso a la cantidad de movimiento, se obtiene:

$$S\, l\, \rho\, u = \Delta p\, S\, \frac{t}{2} \quad ; \quad \Delta p = \frac{2\, l\, \rho\, u}{t}$$

que en metros de altura de columna de líquido es de la forma:

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{2\, l\, \rho\, u}{t\, \gamma} = \frac{2\, l\, u}{t\, g}$$

que se conoce como fórmula de Micheaud, y en cuya demostración no se ha tenido en cuenta, ni la

compresibilidad del agua, ni la elasticidad del material de que está construida la tubería.

Multiplicándola y dividiéndola por la *celeridad* $\vec{a}$ (velocidad de la onda de presión generada por el cierre), se tiene:

$$\Delta h = \frac{\frac{2\,l}{a}\,a\,u}{t\,g} = \frac{\tau\,a\,u}{t\,g} = \frac{\tau}{t}\,\frac{a\,u}{g} \quad ; \quad t \geq \tau$$

siendo $\tau = \frac{2\,l}{a}$ el tiempo que la onda de presión necesita para remontar la tubería, reflejarse en el depósito superior y volver a B; es el tiempo de ida y vuelta de la onda de presión al punto B.

Allievi demostró que ésta fórmula sólo es válida para un tiempo de cierre de la válvula mayor, o igual que el tiempo que tardaría la onda de presión en ir de B a A y en volver de A a B, es decir, $t \geq \tau$, este caso se corresponde con *la maniobra lenta del cierre de la válvula* y cuando se cumpla hay que utilizar la fórmula de Micheaud.

Si $t < \frac{2\,l}{a}$ se considera que la *maniobra de cierre de la válvula es rápida*, siendo la sobrepresión:

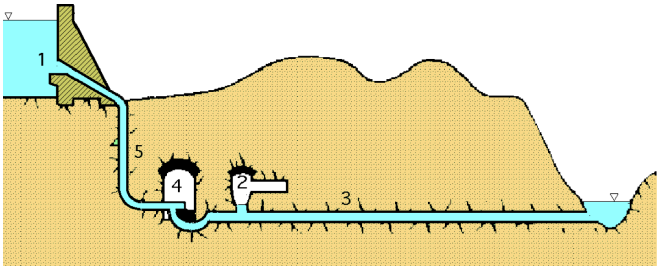
$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{a\,u}{g}$$

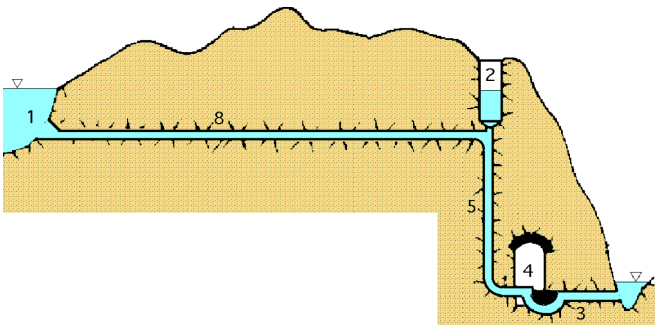
que fue deducida por Allievi, y que demostraremos más adelante.

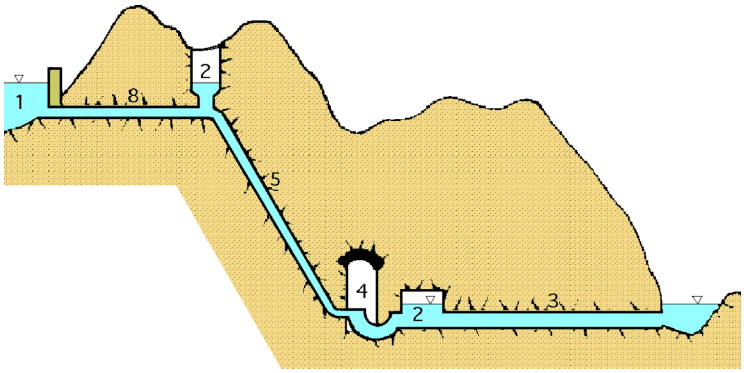
La sobrepresión originada por el golpe de ariete es independiente de la presión estática que en cada sección de la tubería existiera antes de la perturbación producida por el cierre de la válvula, pero es función del tiempo τ y de la distancia de B a la sección considerada; en consecuencia, a la presión existente antes del golpe de ariete, habrá que añadir la sobrepresión originada por el mismo, siendo la presión después del golpe:

$$h = h_x + \Delta h$$

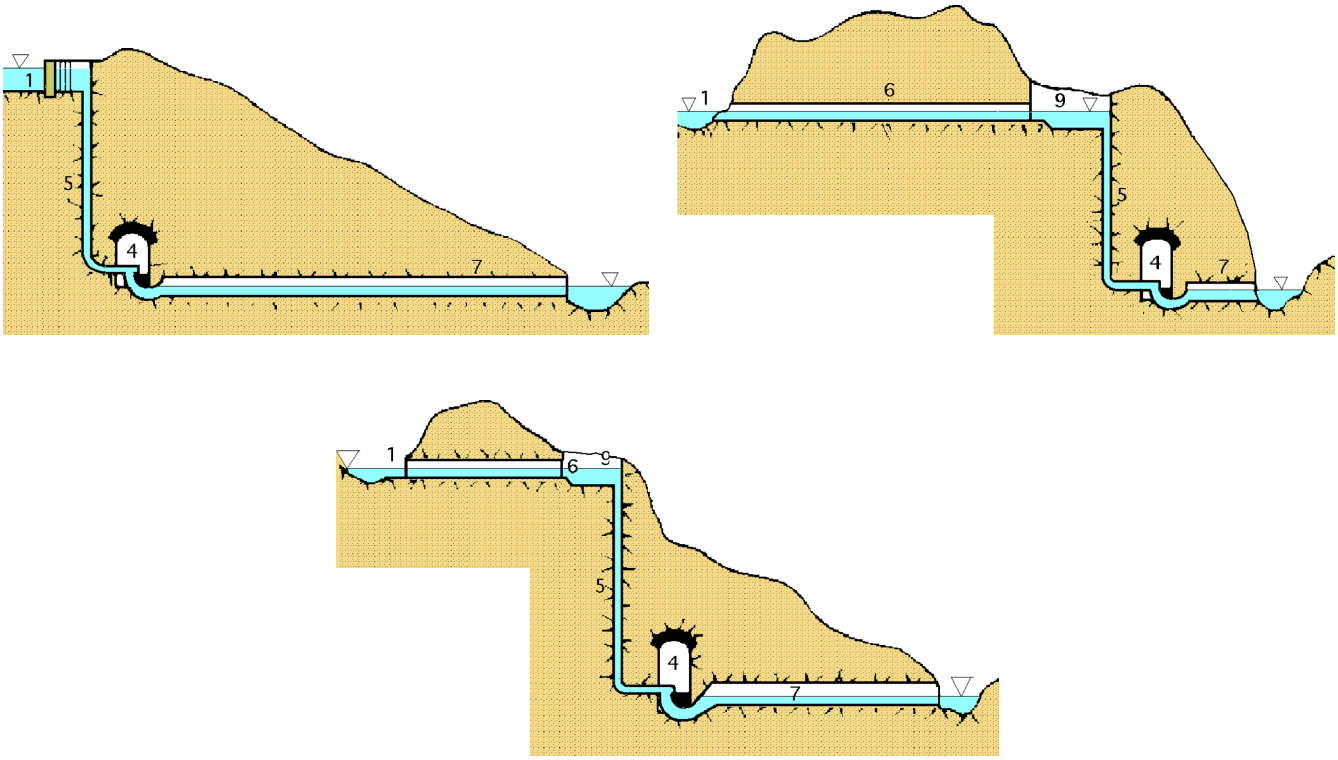
La fórmula de Micheaud proporciona resultados más fuertes que otras y, por lo tanto, si se utiliza quedará calculada la conducción con más seguridad para su resistencia.







a) Sistemas de presión (chimeneas de equilibrio)



b) Sistemas de admisión en flujo abierto

1) Estructura de admisión; 2) Tanques de equilibrio (depósito de aire y chimenea de equilibrio)); 3) Túnel de presión aguas abajo; 4) Sala de turbinas (central); 5) Conducción forzada; 6) Túnel de flujo abierto de admisión; 7) Túnel de flujo abierto de escape; 8) Túnel de presión de admisión; 9) Embalse de carga

Fig XI.2.- Sistemas de atenuación del golpe de ariete

El golpe de ariete se puede atenuar con un cierre progresivo de la llave de paso o mediante depósitos de aire en el extremo de la conducción, válvulas de seguridad, chimeneas de equilibrio, etc.

En las Figs XI.2 se presentan algunas soluciones en las que los conductos de presión, sala de máquinas, etc, se encuentran bajo tierra; los esquemas se corresponden con instalaciones destinadas a minorar el golpe de ariete mediante sistemas de presión (tanques de equilibrio), con chimeneas de equilibrio y depósitos de aire, y sistemas de flujo abierto, con altura de carga proporcionada por un embalse que hace de chimenea de equilibrio, a través de una conducción forzada perforada en la montaña.

XI.2.- FORMULACIÓN DE ALLIEVI

Para determinar las formulas de Allievi, se supondrá que las pérdidas de carga son despreciables frente al efecto de sobrepresión producido por el golpe de ariete.

Para su estudio consideraremos una conducción sometida al golpe de ariete, representando en la misma las presiones por h_{tx} siendo:

- t el tiempo contado a partir del comienzo de la perturbación

- x la distancia contada desde la sección O donde se encuentra la válvula a la sección en la que se desea conocer la presión

Se considerará sentido (+) el contrario a la corriente.

Si no existe perturbación, es decir, si no se produce el cierre de la válvula instalada en O, la presión en la sección x para régimen permanente, es:

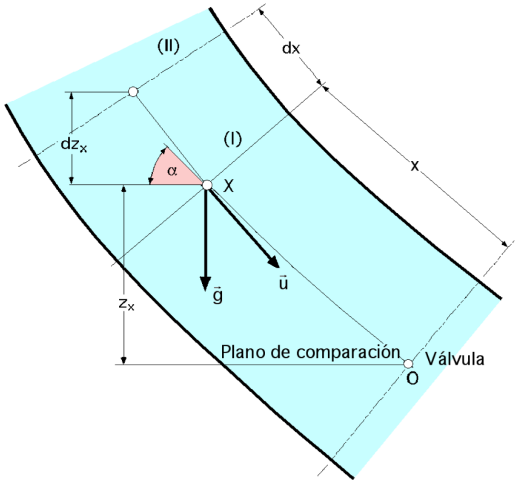


Fig XI.3.- Conducción sometida a golpe de ariete

$$Para:\ t = 0\ \ ;\ z_x + h_{0x} + \frac{u^2}{2g} = 0 + h_{00} + \frac{u^2}{2g}$$

siendo:

$$h_{0x} = \frac{p_{0x}}{\gamma}\ \ ;\ \ h_{00} = \frac{p_{00}}{\gamma}$$

y simplificándola resulta:

$$h_{0x} = h_{00} - z_x = \left| \begin{array}{c} dz_x = sen\ \alpha\ dx \\ z_x = \int_0^x sen\ \alpha\ dx \end{array} \right| = h_{00} - \int_0^x sen\ \alpha\ dx$$

$$p_{0x} = p_{00} - \gamma \int_0^x sen\ \alpha\ dx$$

Para $t = t$, momento en que se origina la perturbación, se pueden aplicar las fórmulas de Navier-Stokes, que sabemos ligan las variables u, v, w, p y ρ, en un punto de un líquido en movimiento, en función del tiempo que, al variar, hace que se modifiquen las variables, para ese mismo punto.

Por lo tanto, en nuestro caso, de las 3 ecuaciones de Navier sólo utilizaremos la primera, por cuanto $\begin{cases} v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$, ya que se puede considerar como eje x el de simetría de la conducción; en consecuencia:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt}$$

en la que se hacen las siguientes consideraciones: $\begin{cases} X = - g\ sen\ \alpha \\ Y = - g\ \ cos\ \alpha \\ Z = 0 \end{cases}$

Como la velocidad de la corriente es *(- $\vec{u}$; v = 0 ; w = 0)*, resulta que $\vec{u}$ es de la forma $u = f(x,t)$ y, por lo tanto:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial t}\, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\, \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u\, \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

apareciendo el signo (-) debido a que la velocidad es **-** $\vec{u}$.

Sustituyendo en la ecuación de Euler se tiene:

$$\frac{1}{\rho}\, \frac{\partial(\gamma\, h)}{\partial x} = - g\ sen\ \alpha\ - (u\, \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}) = \left| u\, \frac{\partial u}{\partial x} << \frac{\partial u}{\partial t} \right| = - g\ sen\ \alpha + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - sen\ \alpha + \frac{1}{g}\, \frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g\ sen\ \alpha + g\, \frac{\partial h}{\partial x}$$

que es la Primera ecuación diferencial de Allievi.

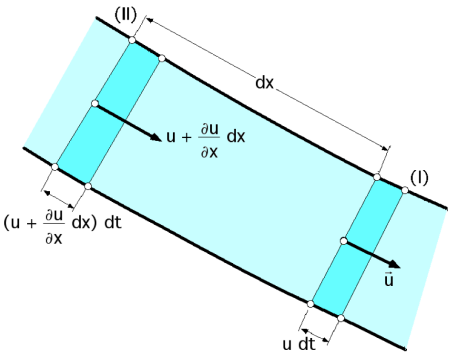


Fig XI.4.- Masa de líquido contenida en dx

Para calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ se parte de la ecuación de la conservación de la masa; si en la conducción de la Fig XI.4 se toma un elemento *dx* de la tubería, y si en la sección (I) de la misma se considera que la velocidad del líquido es $\vec{u}$, en la sección (II) la velocidad es de la forma:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx$$

Como en el elemento *dx* se cumple que:

Variación de masa en dx = Masa entrante - Masa saliente

se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Masa entrante (II):}\ (u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\, dx)\, dt\ \Omega\ \rho \\ \textit{Masa saliente (I):}\ u\ dt\ \Omega\ \rho \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \textit{Variación de masa en el elemento dx:}\ \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\ dt\ \Omega\ \rho$$

que es el líquido almacenado en el tiempo *dt* debido a la compresibilidad del mismo y a la dilatación de la tubería.

Para determinar la variación de masa en el tiempo *dt* se considera que la masa de líquido contenida en la longitud invariable dx, antes de la perturbación es $\Omega\ dx\ \rho$, que durante el tiempo *dt* experimenta una variación de la forma, $\frac{\partial(\Omega\ dx\ \rho)}{\partial t}\, dt$

Igualando las dos expresiones de la variación de masa se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dt\, \Omega\, \rho = \frac{\partial(\Omega\, dx\, \rho)}{\partial t}\, dt = \frac{\partial \Omega}{\partial t}\, dx\, \rho\, dt + \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \Omega\, dx\, dt$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Omega}\, \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\Omega}\, \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}\, \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

Para calcular $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ se parte de:

$$\gamma = \frac{Peso}{Volumen} = \frac{Peso}{V} \quad \Rightarrow \quad d\gamma = d\left(\frac{Peso}{V}\right) = Peso\, d\left(\frac{1}{V}\right) = Peso\, \left(\frac{-1}{V^2}\right) dv = \frac{Peso}{V}\, \left(\frac{-dV}{V}\right) = -\gamma\, \frac{dV}{V} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} k = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{V}\, \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\varepsilon} = -\frac{d(\gamma\, h)}{\varepsilon} \end{array} \right| = \gamma\, \frac{d(\gamma\, h)}{\varepsilon} = \gamma^2\, \frac{dh}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t}\, dt = \frac{\gamma^2}{\varepsilon}\, \frac{\partial h}{\partial t}\, dt$$

en la que ε es el módulo de elasticidad del líquido.

Para tuberías de poco espesor se cumple que la fuerza ejercida contra las paredes cilíndricas de la tubería es la misma que se ejerce sobre un plano diametral cualquiera, Fig XI.5, en la forma:

$$F = p\, \{área\ (abcd)\} = p\, D\, l = 2\, e\, l\, \sigma \quad \Rightarrow \quad p\, D = 2\, e\, \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{p\, D}{2\, e}$$

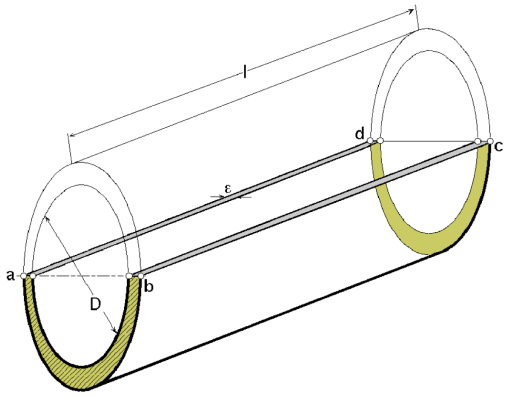


Fig XI.5

siendo σ el coeficiente de tracción del material.

Tomando logaritmos y diferenciando:

$$ln\, p + ln\, D = ln\, 2 + ln\, e + ln\, \sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} + \frac{dD}{D} = \frac{de}{e} + \frac{d\sigma}{\sigma}$$

ya que al variar la presión p, varían también σ, D y e.

Sin embargo $\frac{de}{e}$ y $\frac{dD}{D}$ son variaciones muy pequeñas si se las compara con $\frac{d\sigma}{\sigma}$ y $\frac{dp}{p}$, por lo que se desprecian, quedando finalmente:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\sigma}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad d\sigma = \sigma\, \frac{dp}{p} = \frac{p\, D}{2\, e}\, \frac{dp}{p} = \frac{D}{2\, e}\, dp$$

Al aumentar el diámetro de la tubería, su variación será dD, y el alargamiento unitario en la dirección del mismo $\frac{dD}{D}$.

Como el módulo de elasticidad E del material de la tubería es de la forma:

$$E = \frac{d\sigma}{\frac{dD}{D}} = D\, \frac{d\sigma}{dD} \quad ; \quad dD = \frac{D}{E}\, d\sigma = \frac{D^2}{2\, e\, E}\, dp$$

y como la variación de la sección Ω debida al aumento del diámetro, Fig XI.6, vale:

$$d\Omega = \pi\ D\ \frac{dD}{2} = \frac{\pi\ D}{2}\ \frac{D^2}{2\ e\ E}\ dp = \frac{\pi\ D^3}{4\ e\ E}\ \gamma\ dh = \Omega\ \frac{D}{e\ E}\ \gamma\ dh \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t}\ dt = \frac{\gamma\ \Omega\ D}{e\ E}\ \frac{\partial h}{\partial t}\ dt$$

resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Omega}\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\gamma\ \Omega\ D}{e\ E}\ \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\gamma^2}{\varepsilon}\ \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right| = \frac{\gamma\ D}{e\ E}\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\ \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{D}{e\ E} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \gamma\ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{g}{a^2}\ \frac{\partial h}{\partial t}$$

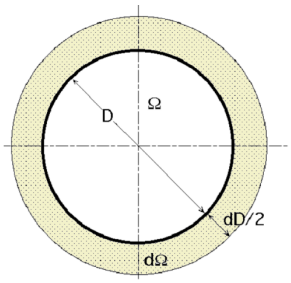


Fig XI.6.- Variación de la sección Ω

que es la Segunda ecuación diferencial de Allievi, y en la que se ha introducido la *celeridad a* de la onda de presión, de la forma:

$$\frac{1}{a^2} = \left(\frac{D}{e\ E} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \rho \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{\rho\ \left(\frac{D}{e\ E} + \frac{1}{\varepsilon}\right)}}$$

que tiene en cuenta la $\begin{cases} \text{- compresibilidad del líquido} \\ \text{- rigidez de la tubería} \end{cases}$

Del coeficiente de compresibilidad *k* se obtiene:

$$k = -\ \frac{1}{V}\ \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\ \frac{dp}{\varepsilon} = \left| \begin{array}{l} V = 1/\gamma \\ dV = -\ d\gamma/\gamma^2 \end{array} \right| = \frac{-\ d\gamma/\gamma^2}{1/\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dp}{\varepsilon} = \frac{d\rho}{\rho}$$

En un medio indefinido, una onda plana longitudinal se propaga con una celeridad:

$$a_0 = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$$

que coincide con el valor de la celeridad definido en la expresión del numero Mach, en la que sólo interviene la compresibilidad del líquido, ó bien, a partir de la expresión general anteriormente definida en la que se ha considerado que el sumando $\frac{D}{e\ E}$ es despreciable.

Para un conducto circular de diámetro D, espesor *e*, y constituido por un material de módulo de elasticidad E, la celeridad de una onda plana toma la forma:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\ \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{e\ E}\right)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\rho\ \left(1 + \frac{\varepsilon\ D}{e\ E}\right)}} = \frac{9900}{\sqrt{48{,}3 + k\ \frac{D}{e}}} \quad \frac{m}{seg}$$

viniendo expresada $\vec{a}$ en m/seg, *D* en mm y *e* en mm, y en la que el valor de *k* depende del material de que esté construida la tubería, de valor: $\begin{cases} k = 0{,}5, \text{ tuberías de hierro y acero} \\ k = 1{,}0, \text{ tuberías de fundición} \\ k = 1{,}5, \text{ tuberías de plomo y hormigón armado} \end{cases}$

XI.4.- SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ALLIEVI

El sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = g\ sen\,\alpha + g\ \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{g}{a^2}\ \dfrac{\partial h}{\partial t} \end{cases}$

Aplicando el Teorema de Swartz:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(g\ sen\,\alpha + g\ \dfrac{\partial h}{\partial x}\right) = g\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{g}{a^2}\ \dfrac{\partial h}{\partial t}\right) = \dfrac{g}{a^2}\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de ondas unidimensional, (ecuación hiperbólica), cuya integral general es de la forma:

$$h = h_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

por lo que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g}{a^2}\ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{g}{a^2}\ \{F'\left(t - \frac{x}{a}\right) + f'\left(t + \frac{x}{a}\right)\}$$

Integrándola respecto de x, se obtiene:

$$u = u_0 + \frac{g}{a^2}\int \{F'\left(t - \frac{x}{a}\right) + f'\left(t + \frac{x}{a}\right)\}\ dx = \left| \begin{array}{l} t - \dfrac{x}{a} = \theta \ ; \ -dx = a\ d\theta \\ t + \dfrac{x}{a} = \beta \ ; \ \ dx = a\ d\beta \end{array} \right| =$$

$$= u_0 + \frac{g}{a^2}\ \{\int F'(\theta)\,(-a\ d\theta) + \int f'(\beta)\,(a\ d\beta)\}\ dx\} = u_0 + \frac{g}{a^2}\ \{-a\ F(\theta) + a\ f(\theta)\} =$$

$$= u_0 + \frac{g}{a^2}\ \{-a\ F\left(t - \frac{x}{a}\right) + a\ f\left(t + \frac{x}{a}\right)\} = u_0 - \frac{g}{a}\ \{F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)\}$$

ecuación que, junto con la 1ª de Allievi, de la forma:

$$h = h_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

son sólo válidas a lo largo de un tramo de tubería de característica única.

La ecuación anterior, 1ª ecuación de Allievi, muestra que la presión existente en la sección x, en el instante t de la perturbación, es suma de tres tipos de presión:

- La presión estática h_0 correspondiente al régimen permanente

- La presión $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$, variable con x y con t pero constante si, $t - \frac{x}{a} = Cte$, por lo que: $x = a\,t + Cte$, es decir, es una onda de presión (depresión) de velocidad $\vec{a}$ desplazándose en el sentido de las x crecientes; se la llama ***golpe de ariete directo*** *o* ***sobrepresión***

- La presión $f(t + \frac{x}{a})$ *variable con x y con t es una onda de presión de velocidad* $\vec{a}$ *desplazándose en el sentido de las x decrecientes; se le llama* ***contragolpe*** *o* ***depresión***

Casos particulares de las ecuaciones de Allievi.- En la conducción puede existir, a veces, una sola clase de ondas, o las *F*, o las *f*.

a) Si suponemos que la que permanece sólo es la F, se puede poner:

$$h_x = h_{tx} = h_{0\,x} + F(t - \frac{x}{a}) \quad \Rightarrow \quad h_{tx} - h_{0\,x} = \Delta h = F(t - \frac{x}{a})$$

$$u_x = u_{tx} = u_0 + \frac{g}{a} F(t - \frac{x}{a}) \quad \Rightarrow \quad u_{tx} - u_0 = \Delta u = \frac{g}{a} F(t - \frac{x}{a})$$

Eliminando $F(t - \frac{x}{a})$ entre ambas se obtiene:

$$\frac{\Delta h}{\Delta u} = \frac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{a}{g} \Delta u = \frac{\Delta p}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \rho\ a\ \Delta u$$

b) Si la onda que prevalece es la $f(t + \frac{x}{a})$ se encuentra:

$$\Delta h = - \frac{a}{g} \Delta u = \frac{\Delta p}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = - \rho\ a\ \Delta u$$

En ambos casos, la variación de la altura de presión Δh, al paso de la onda por una sección, viene determinada por estas relaciones simples respecto a la variación de velocidad Δu en la misma sección, pudiéndose poner que:

Δh es del mismo signo que Δu para la onda F

Δh es de signo opuesto al de Δu para la onda f

Para el caso general en el que coexistan las ondas *F* y *f*, no es tan sencillo encontrar una relación entre Δh y Δu.

Condiciones en los límites.- Mientras el movimiento del fluido no sea perturbado, las funciones F y *f* serán nulas. A partir del instante *t = 0*, es decir, desde el comienzo de la maniobra de apertura o cierre, las ecuaciones de Allievi vendrán caracterizadas por las condiciones en los límites, es decir:

- En la embocadura x = l, la presión es invariable, $\Delta h = 0$

- En una sección inmediata a la válvula x = 0, la ley de variación de velocidades viene impuesta por las condiciones de salida

- Si el cierre es instantáneo, la F es una recta horizontal, F = Cte, es decir:

$$(t - \frac{x}{a}) = Cte \quad ; \quad x = a\ t + Cte = \left| \, t = 0 \, \right| = Cte$$

Las condiciones en la embocadura $x = l$, implican que:

$$\Delta h = 0 = F\,(t - \frac{l}{a}) + f(t + \frac{l}{a}) \quad ; \quad F\,(t - \frac{l}{a}) = - f(t + \frac{l}{a})$$

que se verifica para cualquier valor de t; por lo que para $x = l$ se puede reemplazar por $t = t - \frac{l - x}{a}$, quedando:

$$F\,(t - \frac{l - x}{a} - \frac{l}{a}) + f(t - \frac{l - x}{a} + \frac{l}{a}) = 0$$

Para los cálculos interesa escribir la onda reflejada $f(t + \frac{x}{a})$ en la forma:

$$F\,(t - \frac{2\,l - x}{a} - \frac{x}{a}) + f(t + \frac{x}{a}) = 0$$

$$f(t + \frac{x}{a}) = - F\,(t - \frac{2\,l - x}{a} - \frac{x}{a}) = - F\,(t - \frac{2\,(l - x)}{a})$$

la cual expresa que su valor es igual y de signo contrario al que tomó la onda directa $\frac{2\,(l - x)}{a}$, segundos antes del instante considerado.

Se dice que una sección está en *golpe de ariete directo,* cuando aún no ha llegado a ella la onda reflejada; y se dice que está en *contragolpe*, cuando ya ha pasado por ella.

En la sección de la válvula, la fase de golpe directo tiene una duración $\tau = \frac{2\,l}{a}$

Ya hemos visto que durante el golpe de ariete directo se tiene:

$$\Delta h = F\,(t - \frac{x}{a}) = \left| \Delta u = - \frac{g}{a}\,F\,(t - \frac{x}{a}) \right| = - \frac{a}{g}\,\Delta u$$

Si la válvula se cierra por completo, en la fase de golpe directo se verifica $- \Delta u = u_0$ obteniéndose:

$$\Delta h = \frac{a}{g}\,u_0 \quad ; \quad \Delta p = \rho\,a\,u_0$$

que es el máximo valor de la sobrepresión que puede ocurrir en una tubería, ya que, si la detención se produce después de iniciada la fase de contragolpe, Δp disminuiría por efecto de la onda reflejada.

Asimismo, las ondas se reflejan total o parcialmente en toda aquella sección en donde las características de la conducción se modifiquen, bien en su diámetro, espesor, etc.

Estos fenómenos se estudian introduciendo lo que se conoce como *impedancia Z*, definida para cada punto en la forma:

$$Z = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{\gamma\,\Delta h}{S\,\Delta u} = \frac{\rho\,g\,\Delta h}{S\,\Delta u}$$

Como, en general $\frac{\Delta h}{\Delta u} = \frac{a}{g} = \frac{F + f}{F - f}$, la expresión para la impedancia quedará en la forma:

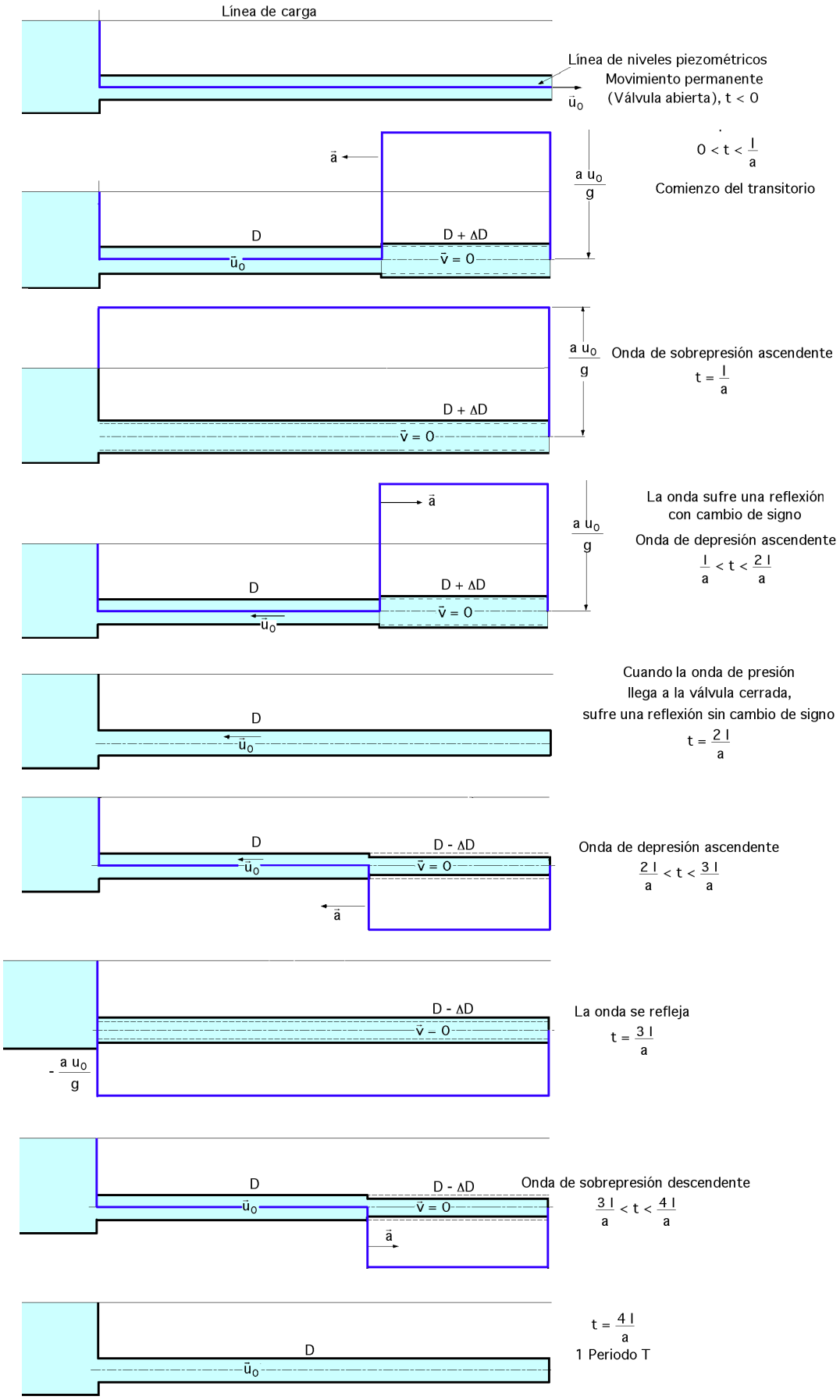


Fig XI.7.- Esquema del golpe de ariete directo en una conducción cilíndrica

$$Z = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{\rho\, g}{S}\,\frac{\Delta h}{\Delta u} = \frac{\rho\, g}{S}\,\frac{a}{g}\,\frac{F+f}{F-f} = \frac{\rho\, a}{S}\,\frac{F(t-\frac{x}{a})+f(t+\frac{x}{a})}{F(t-\frac{x}{a})-f(t+\frac{x}{a})}$$

en la que Z puede ser real o compleja; Z es nula para una sección abierta sobre un medio infinito

Para que no exista reflexión es necesario que $Z = \frac{\rho\, a}{S}$, que se conoce como *impedancia iterativa*, lo cual implica que sólo se tenga en cuenta o bien la *F*, o bien la *f,* pero sólo una de las dos.

XI.5.- CALCULO GRÁFICO DEL ESPESOR DE TUBERÍAS

Una vez hallado el valor de la sobrepresión Δh, ya sea por la fórmula de Micheaud para maniobra lenta: $\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{a}{g}\, u\, \frac{\tau}{t}$, o por la de Allievi para maniobra rápida: $\Delta h = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{a\, u}{g}$, se puede hallar gráficamente el espesor de la tubería.

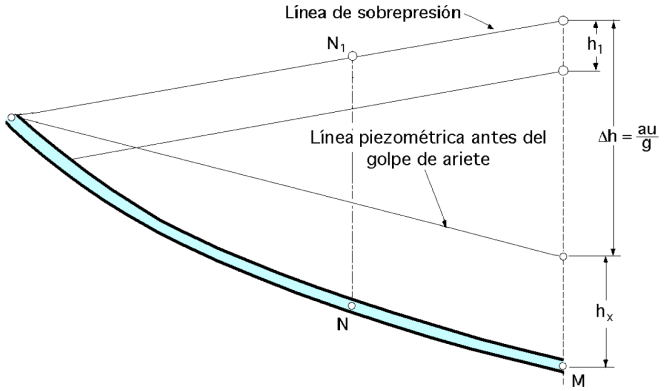


Fig XI.8

Como:

$$\sigma = \frac{p\, D}{2\, e} \;\Rightarrow\; p = \frac{2\, e\, \sigma}{D} \quad ; \quad \frac{p}{\gamma} = \frac{2\, e\, \sigma}{\gamma\, D} = h_1$$

si se considera $e = 1\ mm$, Fig XI.8, para un determinado valor de D se habrá calculado h_1.

Como en M la presión total vale: $h = h_x + \Delta h$, resulta que por contener h a h_1 un número n de veces, la tubería debe tener un espesor de n mm.

En un punto cualquiera N, lo mismo, es decir, las *n'* veces que h_1 estará contenido en (NN_1); sin embargo, a pesar de ello, el espesor se uniformiza para toda la conducción, tomando el más desfavorable, añadiéndole una pequeña cantidad *k*, por corrosión, del orden del $1\% \div 2\%$, quedando finalmente la expresión del espesor en la forma:

$$e = \frac{p\, D}{2\, \sigma} + k$$

XI.6.- MÉTODO GRÁFICO DE SCHNYDER-BERGERON

El método gráfico de Schnyder-Bergeron permite tratar y resolver problemas de golpe de ariete en forma gráfica. Supongamos un observador situado en la sección M_i de la conducción; en el instante t_i en dicha sección se tiene una velocidad $\vec{u}_i$ y una presión p_i que definen el estado de la tubería en esa sección e instante.

Las correspondientes ecuaciones de Allievi son:

$$\begin{cases} h_i - h_0 = F_i - f_i \\ u_i - u_0 = \dfrac{g}{a}\ (F_i - f_i\ ) \quad ; \quad \dfrac{q_i - q_0}{\Omega} = \dfrac{g}{a}\ (F_i - f_i\ ) \end{cases}$$

quedando h_i y q_i definidas, si se conocen en ese instante las funciones F_i y f_i.

Estas dos ecuaciones tienen cuatro incógnitas, q_i, h_i, F_i, f_i.

Consideremos ahora un observador que, en vez de estar fijo en la sección M_i, se desplaza por la conducción con una velocidad igual a la celeridad $\vec{a}$ de las ondas elásticas, en el sentido de las x positivas y que parte, en el instante i de la sección M_i, llegando a otra sección M en el instante t en el que las magnitudes h y $\vec{u}$ vienen dadas por:

$$h - h_0 = F_i - f \quad ; \quad u - u_0 = \frac{g}{a}\ (F_i - f)$$

lo cual se explica porque en estas ecuaciones, la función F_i mantiene el mismo valor por cuanto el observador y la onda F_i se desplazan a la misma velocidad y en el mismo sentido; el observador verá una onda F_i que no cambia, y una onda f que se desplaza con relación a él con una velocidad relativa $2a$ en el sentido de las x negativas.

Eliminando F_i, f y f_i entre estas ecuaciones, se obtiene:

$$h - h_i = -\ \frac{a}{g}\ (u - u_i\ ) = -\ \frac{a}{g}\ \frac{q - q_i}{\Omega}$$

que es la relación que se quería encontrar entre h y q_i , y que viene representada por una recta Δ que pasa por el punto M_i de la Fig XI.9, correspondiente al tiempo t_i, en la sección M_i; su coeficiente angular es: $-\ \dfrac{a}{g\,\Omega}$. La recta Δ es la curva característica buscada, pero sólo es válida para un observador móvil ligado a la onda F.

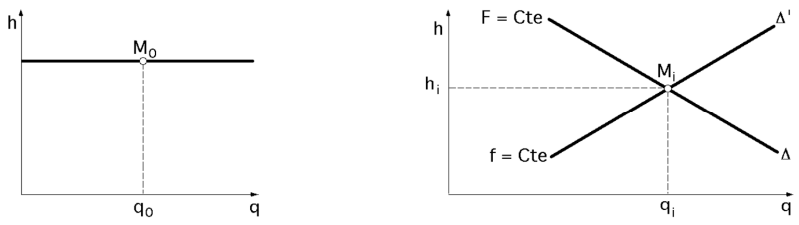


Fig XI.9

Se puede considerar, en la misma forma, a otro observador que se desplace por la conducción en el sentido de las x negativas, con velocidad $\vec{a}$. Para él, la onda f_i mantendrá constante su valor, en-

contrándose después de eliminar, F, F_i y f_i

$$h - h_i = \frac{a}{g}(u - u_i) = \frac{a}{g}\,\frac{q - q_i}{\Omega}$$

recta Δ' cuya pendiente es $\frac{a}{g\,\Omega}$ y que, a su vez, pasa por el punto M_i de la Fig XI.9; ésta será la característica relativa al observador móvil ligado a la onda *f*.

Ambas rectas Δ y Δ', son simétricas con relación a la horizontal que pasa por M_i.

Si se hubiese considerado el caso particular en el que no existiese la onda *f*, para el primer observador ligado a la onda F sería fácil comprobar que tanto h como q permanecen constantes e iguales a h_i y q_i, respectivamente, cumpliéndose en el punto M_i que:

$$h - h_0 = h_i - h_0 = F_i = Cte = \Delta h$$

$$\frac{q - q_0}{\Omega} = \frac{q_i - q_0}{\Omega} = \frac{g}{a} F_i = Cte = \frac{\Delta q}{\Omega}$$

que ya hemos estudiado anteriormente.

El método gráfico de Schnyder-Bergeron es mucho más completo por cuanto considera los dos tipos de onda al mismo tiempo.

DESARROLLO DEL MÉTODO.- Hemos visto que, para el observador móvil que se desplaza a una velocidad igual a la celeridad $\vec{a}$ de las ondas, la curva característica en un punto de la conducción en régimen transitorio es una recta, y su coeficiente angular no depende más que del sentido de desplazamiento del observador; para trazar esta recta es suficiente conocer uno de sus puntos, por ejemplo, el correspondiente al tiempo y lugar de partida. Si el observador parte de M_i, en el tiempo t_i, desplazándose a la velocidad $\vec{a}$, comprueba que en cualquier punto de la conducción, la altura piezométrica h y el caudal q, en el momento en que él pase por un punto determinado, están relacionados entre sí por la misma ley lineal, que no depende más que de las constantes $\vec{a}$ y Ω de la conducción, del régimen h_i y q_i inicial, y del sentido de desplazamiento de la onda elástica.

Despejando f_i y F_i en las ecuaciones siguientes, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} h_i - h_0 &= F_i + f_i \\ \frac{q_i - q_0}{\Omega} &= \frac{g}{a}(F_i - f_i) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2\,F_i &= h_i - h_0 + \frac{a}{g\,\Omega}(q_i - q) \\ 2\,f_i &= h_i - h_0 - \frac{a}{g\,\Omega}(q_i - q) \end{aligned}\right.$$

Las rectas Δ y Δ' son las rectas características relativas a los dos observadores, y pasan por el punto M.

Analicemos mediante algunos ejemplos, cómo se pueden resolver los problemas de golpe de arie-

te. Supongamos una conducción cilíndrica AB de longitud L, Fig XI.10, en la que la altura piezométrica en los extremos proporciona dos ecuaciones, función del caudal q, que representaremos por las curvas características correspondientes a dichos extremos ψ_A y ψ_B. Supondremos que los valores de h y q en la extremidad A son conocidos en el instante t, siendo el punto representativo correspondiente el A_t.

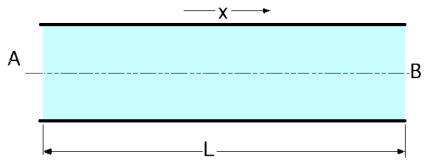


Fig XI.10

Un observador parte de A en el instante t, con velocidad positiva $\vec{a}$, y llega a B en el instante $t+\frac{L}{a}$; durante el recorrido atraviesa todas las secciones de la conducción; los regímenes que va encontrando el observador, en cada sección, se hallan sobre la recta Δ, Fig XI.11.

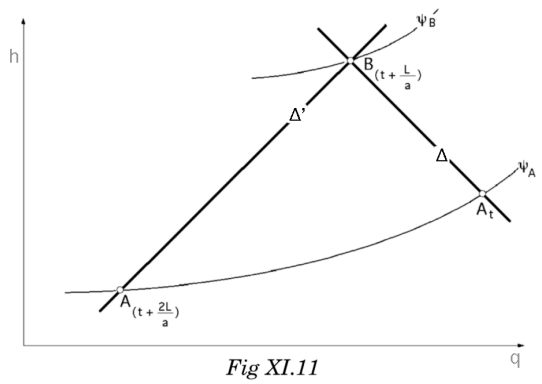


Fig XI.11

El régimen correspondiente a la sección B se encuentra sobre esta recta Δ y al mismo tiempo sobre la curva característica ψ_B siendo su intersección el punto $B_{t+\frac{L}{a}}$.

Si ahora el observador parte de la sección B en el instante $t+\frac{L}{a}$, con velocidad $-\vec{a}$, llegará al punto A en el instante correspondiente a $t+\frac{2L}{a}$, siendo el punto representativo la intersección de Δ' con ψ_A, y así sucesivamente; de esta forma es posible determinar el punto de funcionamiento en los dos extremos de la conducción.

Como al observador se le puede hacer partir de cualquier sección, hay que conocer el instante t de partida, el caudal y la presión; así se estará en condiciones de estudiar el fenómeno en cualquier otro punto de la conducción y en cualquier instante.

Hemos supuesto que las curvas características ψ_A y ψ_B son fijas, pero esta circunstancia no es el caso general, por cuanto estas curvas son, en realidad, las características de los accesorios fijados en las extremidades de la conducción, pudiéndose corresponder, por ejemplo, con una:

a) Conducción que desagua en un gran depósito, h = Cte

b) Conducción cerrada, u = 0

c) Conducción que se abre, siguiendo una ley función del tiempo

d) Bomba centrifuga en una extremidad de la conducción, definida por la ley que relaciona el caudal con la altura manométrica y el numero de rpm de la bomba, (curva característica de la bomba

En una conducción de longitud L, en la que $\vec{a}$ es la celeridad, se puede adoptar $\frac{L}{a}$ como unidad de tiempos, siendo los demás múltiplos de $\frac{L}{a}$; cuando la conducción esté constituida por varias tu-

berías en serie, de longitudes L_1, L_2, L_3..., etc., Fig XI.12, para las que los tiempos $\frac{L_1}{a_1}, \frac{L_2}{a_2}, \frac{L_3}{a_3}$...serían diferentes, se toma como unidad de tiempos un divisor común a los diversos valores de $\frac{L}{a}$.

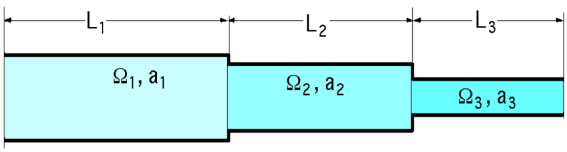


Fig XI.12.- Conducción con varias tuberías en serie

Una conducción en serie se dice es de característica múltiple, cuando el estudio se hace considerando varios observadores móviles, haciendo cada uno el recorrido correspondiente a una sola tubería de diámetro constante. Cuando dos observadores se encuentren en una extremidad común correspondiente a dos tuberías consecutivas, deberán observar necesariamente el mismo caudal q y la misma altura h.

Ejemplo de construcción gráfica.- Supongamos la instalación de la Fig XI.13 en la que el depósito es lo suficientemente grande como para que en A la altura h sea siempre igual a h_0.

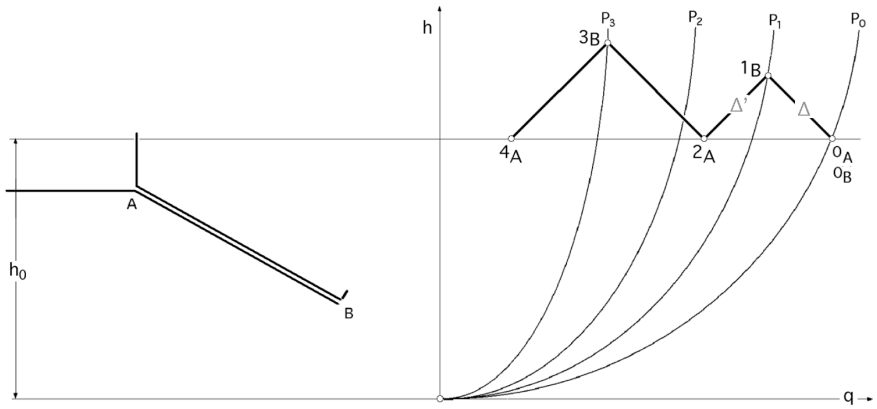


Fig XI.13

Despreciando las pérdidas de carga, si q_0 es el caudal inicial, contado positivamente en el sentido de las x, es decir, de A a B, la curva característica del orificio es una parábola, pudiéndose trazar las correspondientes al punto B en los tiempos 0, 1, 2, 3,..., en donde se ha considerado la unidad de tiempos igual a $\frac{L}{a}$ y que llamaremos P_0, P_1, P_2, P_3,..., etc.

En el punto B, desde que la válvula se cerró en el tiempo $t = 0$, y la onda ha recorrido el tramo (BA) de la conducción, se ha reflejado en el depósito, y vuelve según (AB) de nuevo a la válvula, ha transcurrido un tiempo $t = 4$, y el caudal será nulo.

En el punto A no habrá ninguna modificación en el movimiento hasta el tiempo $t = 1$.

Imaginemos que el observador parte de A en el tiempo $t = 0$, punto O_A, y se dirige hacia B. Su característica es la recta Δ (pendiente negativa), que pasa por O_A. El observador llega a B en el instante $t = 1$, siendo el punto de funcionamiento el 1_B sobre la parábola P_1. Si el observador vuelve so-

bre sus pasos, su característica será la recta Δ' (pendiente positiva), que pasando por el punto 1_B, llega al punto A en el tiempo 2, siendo el punto de funcionamiento el 2_A sobre la recta de cota h_0.

En forma análoga se obtendrían los puntos 3_B y 4_A.

A partir del tiempo $t = 4$, Fig XI.14, en que la onda llega a B y se refleja por estar la válvula cerrada, la característica es la recta $q = 0$, obteniéndose los puntos 5_B, 6_A, 7_B y 8_A, de forma que los puntos siguientes 9_B, 10_A, 11_B y 12_A, y sucesivos, coincidirán con los 5_B, 6_A, 7_B y 8_A, obteniéndose así los regímenes en A para los tiempos pares, y en B para los impares.

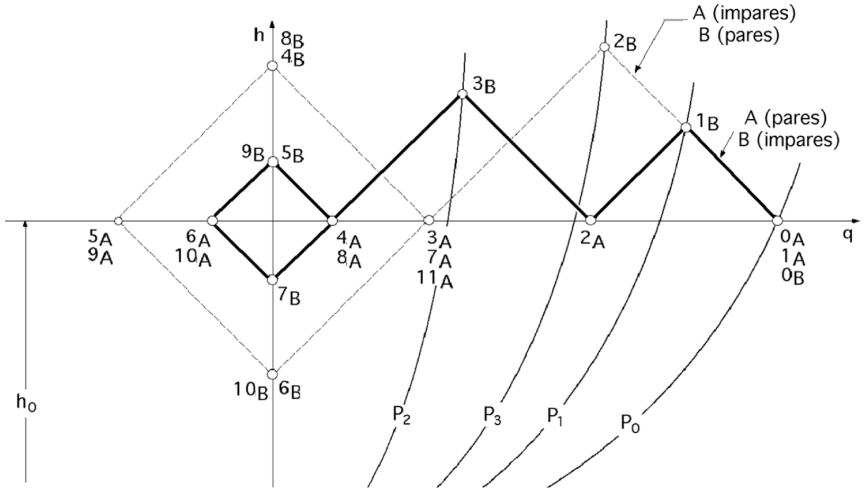


Fig XI.14

Para hacerlo a la inversa, es decir, en A los regímenes para tiempos impares y en B para los pares, el observador partirá de A en el tiempo $t = 1$, punto 1_A, hasta que la perturbación llegue al punto B en el tiempo 2, punto 2_B así sucesivamente.

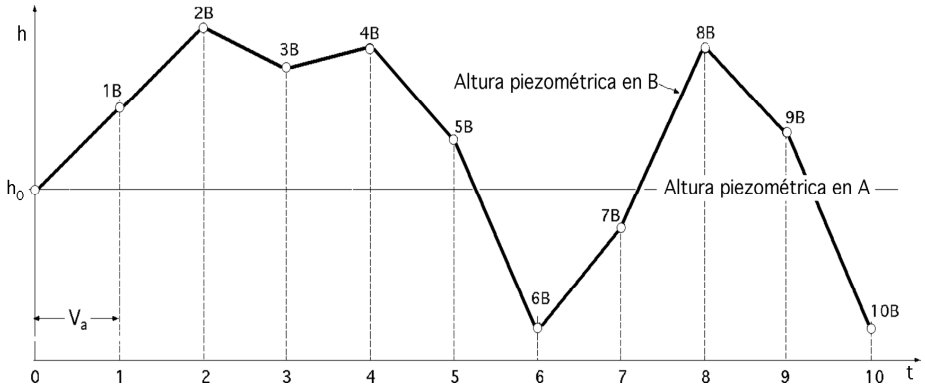


Fig XI.15.- Variación en el punto B de la altura piezométrica h, en función del tiempo

En la gráfica *(h, t)* de la Fig XI.15, se ha representado la variación de la altura piezométrica *h* en el punto B, en función del tiempo, y en las Fig XI.16 y 17, las variaciones del caudal en los puntos A y B, respectivamente. Estas gráficas se construyen y utilizan sin dificultad, para determinar el ré-

gimen de funcionamiento en los instantes intermedios, o en dos puntos cualquiera situados entre A y B. El método es general y permite estudiar, p.e., el problema considerando las pérdidas de carga en la conducción, que contribuyen a amortiguar bastante rápidamente las oscilaciones de caudal y presión, pero por el contrario, complican bastante el trazado de las gráficas precedentes.

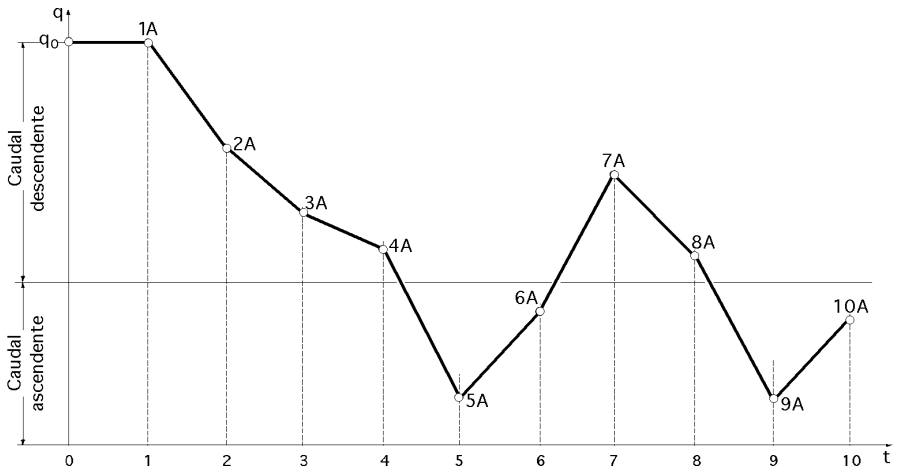


Fig XI.16.- Variación de caudal en el punto A

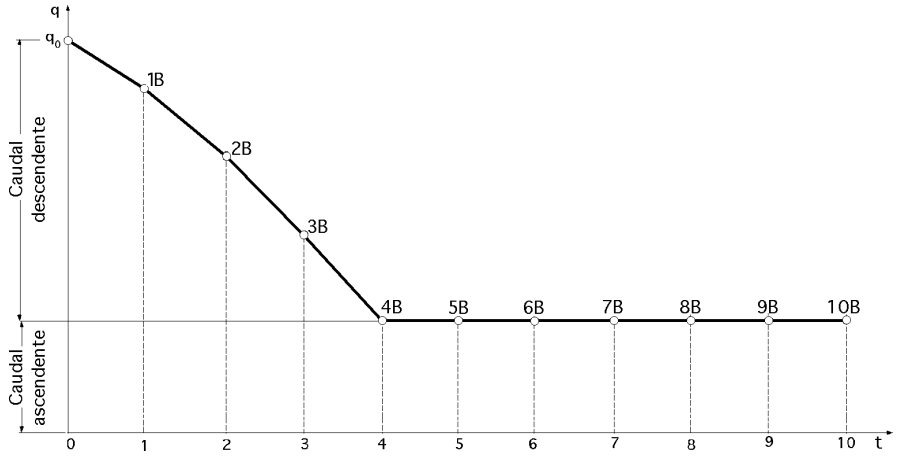


Fig XI.17.- Variación de caudal en el punto B

Influencia de las pérdidas de carga.- Las pérdidas de carga, uniformemente repartidas a lo largo del conducto, no se pueden determinar exactamente en forma gráfica; lo que se suele hacer es suponerlas localizadas en una serie de puntos, por ejemplo en O_1, O_2, O_3, O_4, etc., igualmente repartidos a lo largo del conducto.

En la práctica, el resultado obtenido se aproxima lo suficiente a la realidad si se las supone localizadas en un solo punto, (en nuestro ejemplo, en el O_1 a la entrada de la conducción).

En estas condiciones, el estudio se hace igual que si se despreciasen las pérdidas de carga, con la sola diferencia de que la carga no es $h = h_0 = Cte$, sino que se reemplaza por otra de la forma:

$$h = h_0 - k\,Q^2$$

que en la Fig XI.18 viene representada por la parábola, que representa la pérdida de carga a lo largo de la conducción.

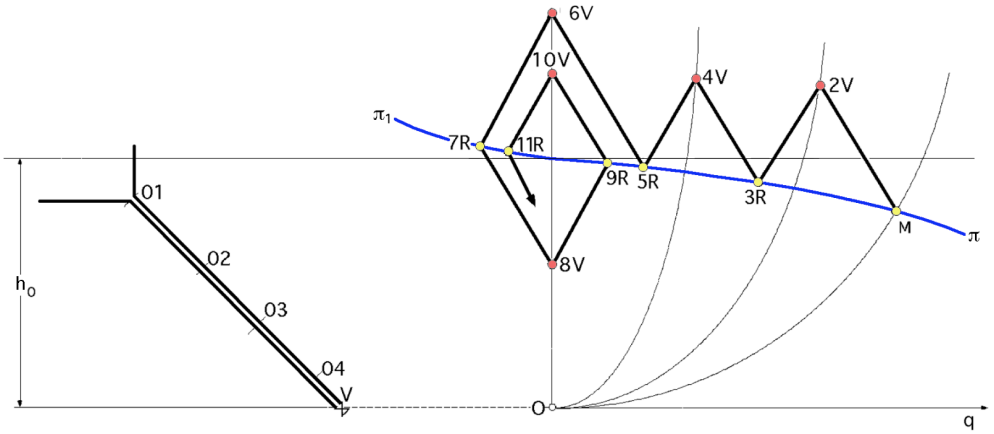


Fig XI.18

En el ejemplo elegido, después del tiempo 6, es decir, cuando el caudal comienza a tomar valores negativos, la presión delante del diafragma O_1 que representa la pérdida de carga de la conducción, es superior a la presión en el depósito, *(parábola* π_1*)*. El esquema se va desarrollando a partir del cierre total de la válvula que produce un decrecimiento regular del golpe de ariete y, por consiguiente, del amortiguamiento que las pérdidas de carga engendran.