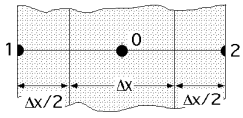
PROBLEMAS SOBRE REGIMEN TRANSITORIO

pfernandezdiez.es

III.1.- Se tiene una placa de 10 cm de espesor, a una temperatura uniforme de 20ºC, que se introduce en un medio a 100ºC, adquiriendo instantáneamente esta temperatura.
Determinar mediante técnicas numéricas, el tiempo necesario para que el plano medio de la pieza alcance una temperatura de 60ºC.
$\alpha = 6.10^{-6}\ (m^2/seg)$

RESOLUCIÓN



a) Tiempo necesario para que el plano medio de la pieza alcance una temperatura de T = 60ºC.

Ecuación diferencial unidimensional

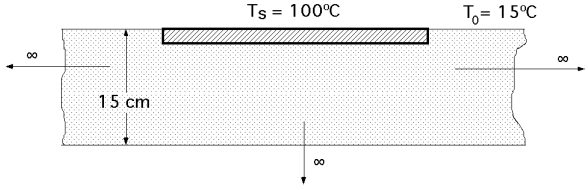
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha\ \frac{T_1 - 2\,T + T_2}{\Delta x^2} = \left|T_1 = T_2\right| = \alpha\ \frac{2\,T_1 - 2T}{\Delta x^2} = 2\,\alpha\ \frac{T_1 - T}{\Delta x^2}$$

Integrándola: $\dfrac{dT}{T_1 - T} = \dfrac{2\,\alpha}{\Delta x^2}\,dt \quad ; \quad \int_{293}^{333} \dfrac{dT}{T_1 - T} = \dfrac{2\,\alpha}{\Delta x^2} \int_0^t dt$

$$-\ln (T_1 - T)_{293}^{333} = \frac{2\,\alpha\,t}{\Delta x^2} \quad ; \quad -\ln \frac{373 - 333}{373 - 293} = \frac{2 \times 6.10^{-6} t}{0{,}05^2} \quad \Rightarrow \quad t = 144{,}4\ seg$$

****

III.2.- Un calentador plano y grande, con una temperatura superficial de 100°C, se coloca en contacto directo con la tierra k = 2,0 W/m°K, $\alpha = 5.10^{-7}\ m^2/seg$. Si el suelo estaba originariamente a una temperatura uniforme de 15°C, determinar:



a) La temperatura del plano situado a 15 cm por debajo del calentador, dos horas después de que se aplique calor por contacto

b) La cantidad de calor total conducido hacia el interior de la tierra por unidad de área en las dos primeras horas

---

RESOLUCIÓN

a) Temperatura del plano situado a 15 cm por debajo del calentador, dos horas después de que se aplique calor

Dado que se puede considerar a la Tierra como un sólido semiinfinito, cuando el calentador entra en contacto con ella la condición de contorno se puede considerar isotérmica,por cuanto hay un cambio brusco de la temperatura de la superficie; la distribución de temperaturas es:

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = G(u) = G\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\,t}}\right) = G\left(\frac{0{,}15}{2\sqrt{5.10^{-7} \times 2 \times 3600}}\right) = G(1{,}25) = 0{,}92287$$

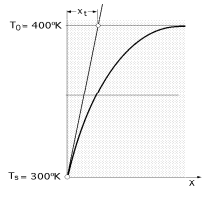
$$T(x,t) = T_s + G(u)\,(T_0 - T_s) = 100 + 0{,}92287 \times (15 - 100) = 21{,}55°C$$

b) Cantidad de calor total conducido hacia el interior de la tierra por unidad de área en las dos primeras horas:

$$Q(t) = 2\,k\,(T_s - T_0)\,\sqrt{\frac{t}{\alpha\,\pi}} = 2 \times 2\ \frac{W}{m°C} \times (100 - 15)°C\ \sqrt{\frac{7200\ seg}{5.10^{-7}\,\pi\,(m^2/seg)}} = 6{,}394\ \frac{kW}{m^2}$$

****

III.3.-Una placa gruesa de hormigón ($\alpha = 0{,}049.10^{-5}\ m^2/seg$) que esta inicialmente a 400ºK se rocía con una gran cantidad de agua a 300ºK. Determinar el tiempo necesario para que un punto situado a 5 cm de la superficie se enfríe hasta 320ºK.



RESOLUCIÓN

Hay que suponer que la velocidad del rociado permite mantener la superficie a 300ºK; la placa se puede tratar como un sólido semi ∞ con condición de contorno isotérmica, dados los posibles valores de h_{cF} y k.

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = G(u) = \frac{320 - 300}{400 - 300} = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad u = 0{,}18 = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\, t}} = \frac{0{,}05\ m}{2\sqrt{0{,}049.10^{-5}\ (m^2/seg)\ t}} \quad \Rightarrow \quad t = 39370\ seg$$

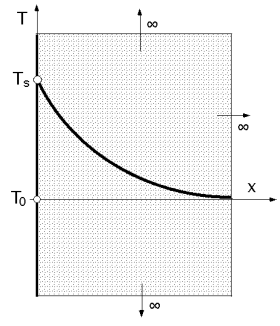
La profundidad x_t de penetración de la temperatura es la posición en la que la tangente al perfil de temperatura en x = 0 corta a la recta $T_0 = 400ºK$.

$$x_t = \sqrt{\pi\, \alpha\, t} = \sqrt{\pi \times 0{,}049.10^{-5} \times 39370} = 0{,}246\ m$$

****

III.4.- Una pared de hormigón $\alpha = 7.10^{-7}\ m^2/seg$ está inicialmente a una temperatura uniforme de $T_0 = 25°C$. Repentinamente una de sus caras aumenta su temperatura y pasa a 125°C, manteniéndose esta temperatura indefinidamente. Calcular la temperatura a 5, 10 y 15 cm de la superficie caliente, 30 minutos después del ascenso brusco de la temperatura superficial de la pared.

RESOLUCIÓN



Al haber un cambio repentino en la temperatura de la superficie, la condición de contorno es isotérmica

Para 30 minutos = 1800 segundos, el valor de "u" es

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\, t}} = \frac{x}{2\sqrt{7.10^{-7}\ (m^2/seg) \times 1800\ seg}} = 14{,}08\ x$$

a) Para: $x = 0{,}05\ m$; $u = 14{,}08 \times 0{,}05 = 0{,}7042 \quad \Rightarrow \quad G(u) = 0{,}6806$

$$T(x,t) = T_s + G(u)(T_0 - T_s) = 125 + 0{,}68 \times (25 - 125) = 56{,}9°C$$

b) Para: $x = 0{,}1\ m$; $u = 14{,}08 \times 0{,}1 = 1{,}408 \quad \Rightarrow \quad G(u) = 0{,}95358$

$$T(x,t) = T_s + G(u)(T_0 - T_s) = 125 + 0{,}95358 \times (25 - 125) = 29{,}64°C$$

c) Para: $x = 0{,}15\ m$; $u = 14{,}08 \times 0{,}15 = 2{,}1126 \quad \Rightarrow \quad G(u) = 0{,}9971$

$$T(x,t) = T_s + G(u)(T_0 - T_s) = 125 + 0{,}9971 \times (25 - 125) = 25{,}29°C$$

Este último resultado está muy próximo a la T_0 inicial, por lo que el calor no ha penetrado en los 30 minutos a esa profundidad.

****

III.5.- Una placa de acero de 1 cm de espesor se saca de un horno a 600ºC y se sumerge en un baño de aceite a 30ºC. Sí se calcula que el coeficiente de transferencia de calor es de 400 $W/m^2ºK$, ¿cuánto tiempo tarda la placa en enfriarse hasta 100ºC?
Tomar para el acero: $k = 50\ W/mºK$, $\rho = 7800\ kg/m^3$ y $c_p = 450\ J/kgºK$.

RESOLUCIÓN

Condición de contorno a utilizar:

$$\begin{cases} h_C/k = 400/50 = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C\,(e/2)/k = 400 \times 0{,}005/50 = 0{,}04 < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \text{c.c. R.T.I. despreciable} \end{cases}$$

por lo que admite, al menos, dos métodos de resolución; elegiremos la condición de resistencia térmica interna despreciable, en la que para placa plana el nº de Bi es el mismo.

$$Fo = \frac{a\, t}{(V/A)^2} = \frac{a\, t}{(e/2)^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho\, c_p} = \frac{50\ (W/mnK)}{7800\ (kg/m^3) \times 450\ (J/kgnK)} = 1{,}4245.10^{-5}\ \frac{m^2}{seg} \right| = \frac{1{,}4245.10^{-5}\ (\frac{m^2}{seg})\ t}{(0{,}01/2)^2} = 0{,}5698\ t$$

Distribución de temperaturas: $\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi\ Fo} \quad \Rightarrow \quad \frac{100 - 30}{600 - 30} = 0{,}1228 = e^{-0{,}04 \times 0{,}5698\ t} \quad \Rightarrow \quad t = 92\ seg$

****

III.6.- Un experimento sobre procesado de materiales en condiciones de microgravedad en un transbordador espacial exige el enfriamiento de una pieza en un flujo forzado de algún gas inerte. Una esfera metálica de 1 cm de diámetro sale de un horno a 800ºC y se enfria hasta 500ºC mediante un flujo de gas nitrógeno a 25ºC. El coeficiente de transferencia de calor por convección para el enfriamiento es de 25 $W/m^2ºK$.
Las propiedades del material de la esfera son: $\rho = 14000\ kg/m^3$; $c_p = 140\ J/kgºK$; emisividad, $\varepsilon = 0{,}1$.

Las superficies del entorno pueden considerarse como casi negras a 25ºC.
Determinar el tiempo necesario del experimento

RESOLUCIÓN

Al tratarse de un enfriamiento en un gas, el modelo de enfriamiento con resistencia térmica interna despreciable (r.T.I.D.) se puede suponer válido, aunque a posteriori habrá que comprobar.

El coeficiente de transferencia de calor lo será por convección y por radiación $h = h_c + h_r$

Distribución de temperaturas: $\frac{T(t) - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-(Bi)(Fo)}$

$$h_r = \varepsilon\ \sigma\ (T_0^2 + T_F^2)\ (T_0 + T_F) = 0{,}1 \times 5{,}67.10^{-8}\ \frac{W}{m^2\ ºK^4}\ (1073^2 + 298^2)\ (1073 + 298)ºK^3 = 9{,}64\ \frac{W}{m^2\ ºK}$$

$$Bi\ Fo = \frac{h\ (V/A)}{k}\ \frac{a\ t}{(V/A)^2} = \frac{h_c + h_r}{k}\ \frac{(k/\rho c_p)\ t}{\frac{(4/3)\ \pi R^3}{4\ \pi R^2}} = \frac{3\ (h_c + h_r)}{\rho\ c_p R} = \frac{3\ (25 + 9{,}64)\ t}{14000 \times 140 \times 0{,}005} = 0{,}010604\ t$$

$$\frac{500 - 25}{800 - 25} = 0{,}613 = e^{-\ Bi\ Fo} = e^{-\ 0{,}010604\ t} \quad \Rightarrow \quad t = 46{,}15\ seg$$

Comprobación: $Bi = \frac{h\ (R/3)}{k} = \frac{34{,}6 \times (0{,}005/3)}{k} = \frac{0{,}05767}{k} << 0{,}1$ (ya que para un metal k > 10 W/mºC)

$$Fo = \frac{9\ k\ t}{\rho\ c_p R^2} = \frac{9\ k \times 46{,}15\ seg}{14000\ (kg/m^3) \times 140\ (J/kgºC) \times 0{,}005^2\ m^2} = 8{,}47\ k >>$$

****

III.7.- Una conducción de 10 cm de diámetro exterior está enterrada en el suelo, de forma que éste se encuentra a una temperatura uniforme de 10ºC. En el invierno se produce una caída de temperatura a nivel del suelo del orden de -15ºC y se mantiene así durante 50 días. Datos: $\alpha = 0{,}2.10^{-6}\ m^2/seg$; $k = 1{,}5\ W/mºK$

Determinar

a) La profundidad mínima a colocar la tubería para que el agua que circula por su interior no congele

b) Calor que se disipa al exterior cada día

RESOLUCIÓN

a) Profundidad mínima a la que habrá que colocar la tubería para que el agua que circula por su interior no congele.- Se puede interpretar la Tierra como un sólido semiinfinito, de forma que el enfriamiento provoque una situación de contorno isotérmica, ya que su efecto a mucha profundidad sería inapreciable

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\ t}} = \left| \begin{array}{l} \alpha = 0{,}2.10^{-6}\ \frac{m^2}{seg} \\ t = 50 \times 24 \times 3600\ seg = 4{,}32.10^6\ seg \end{array} \right| = \frac{x}{2\sqrt{0{,}2.10^{-6} \times 4{,}32.10^6}} = 0{,}5379\ x$$

$$G(u) = \frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{0 - (-15)}{10 - (-15)} = \frac{15}{25} = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} G(u) = 0{,}60386\ ;\ u = 0{,}60 \\ G(u) = 0{,}58792\ ;\ u = 0{,}58 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad u = 0{,}59515$$

luego la profundidad mínima para que el agua no congele es: $u = 0{,}59515 = 0{,}5379\ x$; $x = 1{,}1064$ m

b) Calor que se disipa al exterior cada día

$$q(t) = \frac{-\ k\ (T_0 - T_s)}{\sqrt{\pi\ \alpha\ t}} = \frac{-\ 1{,}5\ \{10 - (-15)\}\ (W/m)}{\sqrt{\pi \times 0{,}2.10^{-6} t}\ m} = \frac{-\ 47308}{\sqrt{t}}\ \frac{W}{m^2}$$

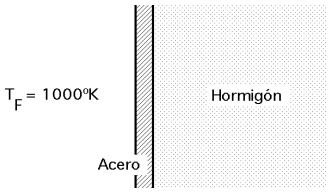
$$Q(t) = \int_0^t q(t)\ dt = \int_0^{86400} \frac{-\ 47308}{\sqrt{t}}\ dt = 27{,}81.10^6\ \frac{W.seg}{m^2} = 7{,}725\ \frac{kW}{m^2}$$

Superficie A de evacuación por metro de longitud de tubería: $A = 2\pi\ R\ L = \pi \times 0{,}1 \times 1 = 0{,}31416\ m^2$

$$Q(t) = 7{,}725\ \frac{kW}{m^2} \times 0{,}31416\ m = 2{,}427\ \frac{kW}{\text{metro de longitud de tubería}}$$

****

III.8.- Una pared de hormigón a prueba de incendios, de 15 cm de espesor, está reforzada por una cubierta de acero de 4 mm de espesor. El conjunto queda repentinamente expuesto a la acción de una fuente de calor radiante, que se puede suponer como un cuerpo negro, a 1000ºK. Determinar el tiempo necesario para que la superficie alcance 500ºK si la temperatura inicial de la pared es de 300ºK.



$k_{hormigón}$= 1,4 W/mºK ; $\alpha_{hormigon}$= 0,75.10^{-6} m^2/seg

k_{acero}= 59 W/mºK ; absortancia de la superficie muy oxidada del acero = 0,9

RESOLUCIÓN

Se pueden hacer las siguientes suposiciones:

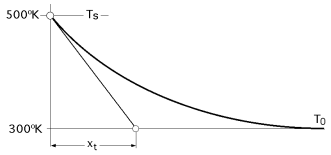
a) La pared de hormigón se puede considerar como un sólido semiinfinito que inicialmente está a una temperatura T_0 b) El valor q_0 es el calor que absorbe la plancha de acero y que va a transmitir al hormigón en el intervalo de temperaturas considerado.

$q_0 = \alpha\ \sigma\ (T_{rad}^4 - T_0^4) = 0,9 \times 5,67.10^{-8} \times (1000^4 - 300^4) = 50616\ (W/m^2)$

c) La variación de temperaturas ΔT a través de la cubierta de acero de espesor L = 0,004 m, en régimen cuasi-estacionario es:

$$\Delta T = \frac{q_0}{k/L} = \frac{47840,6}{59/0,004} = 3,24ºK \text{ (que es despreciable frente a 1000º K)}$$

que dice que la caida de temperatura a través de la cubierta de acero es insignificante; el flujo de calor q_0 se transmite al hormigón a través de su superficie (x = 0) no influyendo en ello la cubierta de acero.



La distribución de temperaturas en el hormigón, para esta situación, es:

$$T(x,t) = T_0 + \frac{2\,q_0}{k}\sqrt{\alpha\ t}\ [\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} - u\ \{1 - G(u)\}]\ ,\ \text{con: } u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\ t}}$$

que evaluada para x = 0 resulta:

$$T(0,t) = T_s = T_0 + \frac{2\,q_0}{k}\sqrt{\frac{\alpha\ t}{\pi}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{\alpha}\ (\frac{k\,(T_s - T_0)}{2\,q_0})^2 = \frac{\pi}{0,75.10^{-6}}\ (\frac{1,4 \times (500 - 300)}{2 \times 50616})^2 = 32\ seg$$

Para comprobar la suposición de sólido semi ∞, se calcula la profundidad de penetración x_t, y se tiene:

$$x_t = \frac{T_s - T_0}{-(\frac{\partial T}{\partial x})_{x=0}} = k\ \frac{T_s - T_0}{q_s} = 1,4\ \frac{500 - 300}{50616} = 5,53.10^{-3}m = 0,553\ cm$$

que es menor que los 15 cm de espesor de la pared

****

III.9.- Un habitáculo refrigerado a 5ºC ha estado funcionando durante varios años y se le pone fuera de servicio, de forma que a partir de este momento se permite que el aire del ambiente a 27ºC circule libremente por él. Determinar el tiempo que tardará la tierra situada a 1 m de profundidad en alcanzar una temperatura de 15ºC. Se supondrá que el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 3 W/m²ºK, siendo las propiedades térmicas para la tierra mojada (k = 2,6 W/mºK, α = 0,45.10^{-6} m²/seg).

RESOLUCIÓN

A la tierra se la puede suponer, en este caso, como un sólido semi∞ que se expone al aire a 27ºC, con una temperatura inicial de 5ºC a una profundidad apreciable. Como $h_c/k = 3/2,6 = 1,15$ se puede suponer que la condición de contorno es por convección. La distribución de temperaturas es:

$$\frac{T - T_0}{T_F - T_0} = 1 - G(u) - \{1 - G(u + \sqrt{\eta})\}\ e^{-Bi_x + \eta} = \frac{15 - 5}{27 - 5} = 0,4545 = \left| \begin{array}{l} h = Bi^2 Fo = \dfrac{h_C^2 \alpha\ t}{k^2} = \dfrac{3^2 \times 0,45.10^{-6} t}{2,6^2} = 6.10^{-7} t \\ u = \dfrac{x}{2\sqrt{\alpha\ t}} = \dfrac{1\ m}{2\sqrt{0,45.10^{-6} t}} = \dfrac{745,35}{\sqrt{t}} \\ Bi_x = \dfrac{h_C x}{k} = \dfrac{3\ (W/mºK) \times 1\ m}{2,6} = 1,154 \end{array} \right| =$$

$$= 1 - G\left(\frac{745,35}{\sqrt{t}}\right) - \{1 - G\left(\frac{745,35}{\sqrt{t}} + \sqrt{6.10^{-7}\,t}\right\}\, e^{-1,154 + 6.10^{-7}\,t} = 0,4545$$

Su resolución es iterativa. Para tener una referencia inicial hay que partir de un valor de ***t*** razonable, que puede ser el correspondiente a la condición isotérmica, en la forma:

$$0,4545 = 1 - G(u) \;\Rightarrow\; G(u) = 1 - 0,4545 = 0,5455 \;\Rightarrow\; 0 = 0,53 = \frac{745,35}{\sqrt{t}} \;\Rightarrow\; t = 1,97.10^{6}\,\text{seg}$$

El tiempo real será superior a éste.

En la iteracción se van dando valores a t obteniéndose los correspondientes a $\frac{T - T_0}{T_F - T_0}$:

10^{-6} t	4	5	6	6,05	6,06
$(T- T_0)/(T_F- T_0)$	0,368	0,415	0,452	0,454	0,4545

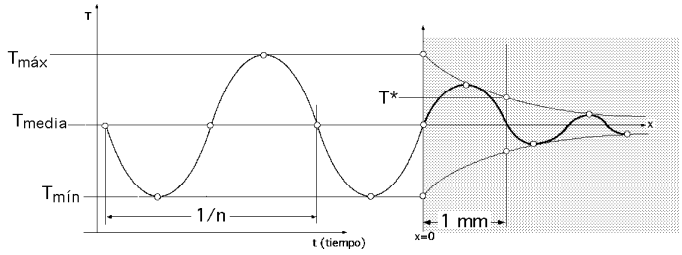
luego: $t = 6,06.10^6$ segundos = 70,13 días

****

III.10.- Para medir las fluctuaciones de la temperatura en la pared del cilindro de un motor diesel de 5 mm de espesor, se instala un termopar a 1 mm de la superficie interior de la pared. En un determinado ensayo el motor funciona a 1000 rpm, y se observa que la media de la lectura del termopar es de 322ºC con una amplitud de 0,79ºC. Si se supone que la variación de la temperatura es aproximadamente senoidal, calcular la amplitud y diferencia de fase de la variación de temperatura en la superficie interior.
Datos de la pared: $\alpha = 12.10^{-6}\ m^2/seg$; $k = 40\ W/m^oK$

RESOLUCIÓN

La impresión inicial es que al tener la pared del motor un espesor pequeño y dado además que la superficie exterior está refrigerada, existirá un gradiente de temperatura a través de la pared, lo que podría eliminar la condición de sólido semi∞. Sin embargo, si la onda térmica se amortigua hasta anularse a una distancia muy corta de la superficie, sí se puede considerar a la pared del cilindro como sólido semi∞ sometido a una variación periódica de su temperatura superficial (x = 0).



La variación periódica de la temperatura superficial es:

$$\frac{T_{sup} - T_m}{T_{máx} - T_m} = \text{sen } w\,t, \text{ siendo la temperatura media: } T_m = \frac{T_{máx} + T_{mín}}{2}$$

Distribución de temperaturas en la pared, (es la respuesta de la temperatura resultante en cualquier punto):

$$\frac{T(x,t) - T_m}{T_{máx} - T_m} = e^{-x\sqrt{\frac{w}{2\alpha}}}\ \text{sen}\left(w\,t - x\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}}\right), \text{ en la que : } \begin{cases} \text{Función de amortiguación: } e^{-x\sqrt{\frac{w}{2\alpha}}} \\ \text{Función periódica: sen } \left(x\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}} - w\,t\right) \end{cases}$$

La amplitud de la variación de la temperatura disminuye exponencialmente a medida que penetra en la pared, desarrollándose con un desfase igual a: $x\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}}$, por lo que la amplitud de la variación de temperatura $(T_{máx} - T_m)$ en la superficie interior (x = 0) es:

$$\frac{T(x,t) - T_m}{T_{máx} - T_m} = \frac{T^* - T_m}{T_{máx} - T_m} = \left| T^* - T_m = 0,79ºC \right| = \frac{0,79}{T_{máx} - T_m} = e^{-0,001\sqrt{\frac{w}{2\alpha}}}\ \text{sen}\left(w\,t - 0,001\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Período: } T^* = \dfrac{2\pi}{w} = \dfrac{2\pi}{\pi\, n/30} = \dfrac{60}{n} = \dfrac{60}{1000} = 0{,}06 \text{ seg} \quad \Rightarrow \quad w = 104{,}7 \ \dfrac{\text{rad}}{\text{seg}} \\ \sqrt{\dfrac{w}{2\,\alpha}} = \sqrt{\dfrac{104{,}7}{2 \times 12.10^{-6}}} = 2089 \ m^{-1} \end{array} \right| = e^{-0{,}001 \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}} = e^{-0{,}001 \times 2089} = 0{,}1238$$

La amplitud de la variación de temperatura en la superficie interior es:

$$\frac{0{,}79}{T_{máx} - T_m} = e^{-0{,}001 \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}} = 0{,}1238 \quad \Rightarrow \quad T_{máx} - T_m = 6{,}38ºC$$

La diferencia de fase en la superficie (x=0) interior es: $x \sqrt{\dfrac{w}{2\,\alpha}} = 0{,}001 \times 2089 = 2{,}09 \text{ rad} = 119{,}75º$

****

III.11.- La temperatura de un chorro de gas se mide con un termopar; la unión del mismo se puede considerar aproximadamente como una esfera de diámetro d =1 mm, k =25 W/m°C, ρ = 8400 kg/m³, c_p = 0,4 kJ/kg°C. El coeficiente de película entre el chorro de gas y la unión del termopar es h_C = 560 W/m²°C.

Determinar:

a) El tiempo que tardará el termopar en registrar el 99% de la temperatura del chorro

b) El tiempo que tardará el termopar en registrar el 99,99% de la temperatura del chorro. ¿Podría medir la temperatura exacta?¿Por qué?

RESOLUCIÓN

Dado que el fluido exterior es un gas, y el sólido un metal, es muy probable que la condición de contorno sea de resistencia térmica interna despreciable; en efecto:

Condición de contorno a utilizar: $\left\{ \begin{array}{l} h_C / k = 560/25 = 22{,}4 \quad \Rightarrow \quad \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C R/k = 560 \times 0{,}5.10^{-3} / 25 = 0{,}0112 < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \text{c.c. R.T.I. despreciable} \end{array} \right.$

luego para la condición de contorno con resistencia térmica interna despreciable :

$$Bi = \frac{h_C\,(V/A)}{k} = \frac{h_C \dfrac{(4/3)\,\pi R^3}{4\,\pi R^2}}{k} = \frac{h_C \dfrac{R}{3}}{k} = \frac{560 \times \dfrac{1.10^{-3}}{6}}{25} = 3{,}73.10^{-3}$$

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi\,Fo} = e^{-\frac{h_C A\, t}{\rho\, V\, c_p}} = e^{-\frac{h_C t}{\rho \frac{R}{3} c_p}} = e^{-\frac{560\ (W/m^2\,ºC)\ t}{8400\ (kg/m^3) \times \frac{0{,}001}{6}\ m \times 400\ (J/kgºC)}} = e^{-t} \ , \text{ con t en segundos}$$

a) Tiempo que tardará el termopar en registrar el 99% de la temperatura del chorro

Para que el termopar registre el 99% de la temperatura del gas, el valor de $(T - T_F)$ tiene que ser igual a la fracción de temperatura que queda sin precisar: % $(T_0 - T_F)$, es decir: $\dfrac{T - T_F}{T_0 - T_F}$ = error que se comete

$$T - T_F = 1\%\ (T_0 - T_F) = \frac{1}{100}\ (T_0 - T_F) \quad \Rightarrow \quad \frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{1}{100} = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad t = 4{,}6 \text{ seg}$$

b) Tiempo que tardará el termopar en registrar el 99,99% de la temperatura del chorro. ¿Podría medir la temperatura exacta?¿Por qué?

Para un 99,99% de precisión: $\dfrac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \dfrac{1}{10000} = e^{-t}$; t = 9,21 segundos

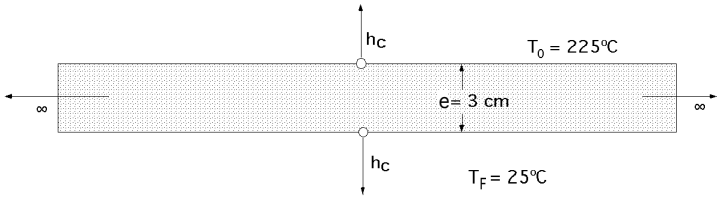
Para un 100% de precisión, la temperatura medida sería la exacta: $\dfrac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \dfrac{1}{\infty} = e^{-t}$; $t = \infty$ segundos

****

III.12.- Una placa de Al, k = 160 W/m°C, ρ = 2790 kg/m³, c_p = 0,88 kJ/kg°C, de espesor (e = 3 cm) y con una temperatura uniforme T_0 = 225°C se sumerge, agitándola, en un fluido que se encuentra a una temperatura constante T_F = 25°C. El coeficiente de transmisión de calor entre la placa y el fluido es h_C = 320 W/m²°C.

Determinar

a) El tiempo requerido para que el centro de la lámina alcance 50°C
b) El calor intercambiado (en Kcal), si la superficie de la lámina es de 1 m².



RESOLUCIÓN

a) Tiempo requerido para que el centro de la lámina alcance 50°C.- La convección se realiza por las dos caras de superficie A, luego:

$$Bi = \frac{h_C\,(e/2)}{k} = \frac{320 \times (0{,}03/2)}{160} = 0{,}03 < 0{,}1$$

por lo que el sólido se comporta con resistencia térmica interna despreciable.

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{50 - 25}{225 - 25} = 0{,}125 = e^{-Bi\,Fo} = \left| \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{k}{\rho\, c_p} = \dfrac{160\ (W/m^{o}C)}{2790\ (kg/m^3) \times 0{,}88\ (kJ/kg^{o}C)} = 0{,}06517.10^{-3}\ \dfrac{m^2}{seg} \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{(L/2)^2} = \dfrac{0{,}06517.10^{-3}\ (m^2/seg)\ t}{0{,}015^2\ m^2} = 0{,}2896\ t \end{array} \right| =$$

$$= e^{-0{,}03 \times 0{,}2896\ t} = 0{,}125 \quad \Rightarrow \quad t = 240\ seg$$

que es el tiempo requerido para que tanto el centro de la placa, como cualquier otro punto de ella, incluida la superficie, alcance 50°C.

b) Calor intercambiado, si la superficie de la lámina es de 1 m².

Calor intercambiado en Kcal si: A = 2 x 1 m² ; t = 240 segundos; Fo = 0,2896 x 240 = 69,50

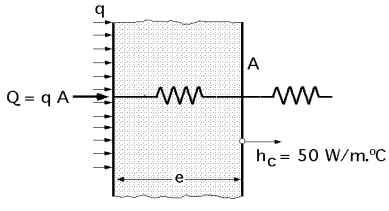
$$Q(t) = h_C\, A\, (T_0 - T_F)\, t\, \frac{1 - e^{-Bi.Fo}}{Bi.Fo} = 320\ (W/m^2{}^{o}C) \times 2\ (m^2)\ (225 - 25)^{o}C \times 240\ (seg)\ \frac{1 - \exp(-3 \times 10^{-2} \times 69{,}50)}{3 \times 10^{-2} \times 69{,}50} =$$

$$= 12_1902.295\ (W.seg) = 12_1902.295\ (Joules) = \frac{12.902{,}295\ (kJoul)}{4{,}186\ \frac{kJoul}{Kcal}} = 3.082\ Kcal$$

****

III.13.- Una plancha eléctrica tiene una base de acero k = 70 W/m°C, ρ = 7840 kg/m³, c_p = 0,45 kJ/kg°C y pesa 1 kg. Dicha base tiene una superficie de calentamiento A = 0,025 m² y se calienta con el calor procedente de una resistencia eléctrica que proporciona Q = 250 W.
Inicialmente la temperatura de la placa base es T_0 = 20°C; a medida que la placa se va calentando disipa calor por convección a un fluido exterior que se encuentra a T_F = 20°C, con un coeficiente h_{cF} = 50 W/m²°C.
Calcular la temperatura de la placa al cabo de 5 minutos después de iniciado el calentamiento de la misma.

RESOLUCIÓN



Flujo de calor: $q = \frac{Q}{A} = \frac{250\ W}{0{,}025\ m^2} = 10.000\ \frac{W}{m^2}$

Cálculo del espesor **e**: Masa = V r = (Espesor x A) r = e A r

$$e = \frac{Masa}{A\,\rho} = \frac{1\ kg}{0{,}025\ m^2 \times 7840\ (kg/m^3)} = 0{,}51.10^{-2}\,m$$

$$\Phi = \frac{X}{m} + (\Phi_0 - \frac{X}{m})\, e^{-mt} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{X}{m} = \dfrac{q}{h_C} = \dfrac{10000}{50} = 200 \\ m = \dfrac{h_C}{\rho\, e\, c_p} = \dfrac{50}{7840 \times 0{,}51.10^{-2} \times 450} = 0{,}002778 \end{array} \right| =$$

$$= 200 + (0 - 200)\, e^{-0{,}002778 \times 5 \times 60} = 113{,}09 = T - T_F = T - 20 \quad \Rightarrow \quad T = 133{,}1^{o}C$$

Temperatura de equilibrio: $\Phi_\infty = \frac{X}{m} = 200$; $T(t) - T_F = T(t) - 20 = 200$; $T(t) = 220n^{o}C$

****

III.14.- Una placa grande tiene una difusividad térmica $\alpha = 5.10^{-5}$ m²/seg , k = 20 W/mºC y un espesor de 0,30 m. La placa se encuentra inicialmente a la temperatura de 0°C. Su superficie se pone en contacto térmico con un cuerpo sólido a 500°C, de forma que casi instantáneamente, la superficie del cuerpo frío adquiere la temperatura de 500ºC. Determinar:

a) La distribución de temperaturas

b) Su historia, a lo largo de los 100 primeros segundos de contacto con los cuerpos calientes.

c) Tiempo que debe transcurrir para que la temperatura en el plano central sea de 300ºC

RESOLUCIÓN

a) Distribución de temperaturas

Condición de contorno isotérmica (contacto de 2 cuerpos sólidos en donde la superficie del cuerpo frío se pone casi instantáneamente a la temperatura del otro, 500ºC). Longitud característica = espesor

$$Fo = \frac{\alpha\, t}{L^2} = \frac{5.10^{-5} t}{0,3^2} = 5,55.10^{-4}\, t$$

$$\frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{4}{\pi} \sum e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{\text{sen}\,(\lambda_n x)}{n} = \left| \lambda_n = \frac{\pi n}{L} \;;\; \xi = \frac{x}{L} \right| = \frac{4}{\pi} \sum e^{-\frac{\pi n}{L^2} \alpha t} \frac{\text{sen}\,(\pi n \xi)}{n}$$

$$\frac{T - 500}{0 - 500} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} e^{-\frac{(\pi n)^2 \times 5.10^{-5} t\,(seg)}{0,3^2}} \frac{\text{sen}\,\frac{\pi n x}{0,3}}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} e^{-0,005483\, t\, n^2} \frac{\text{sen}\,(10,47\, n\, x)}{n}$$

$$T = 500 - \frac{2000}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} e^{-0,005483\, t\, n^2} \frac{\text{sen}\,(10,47\, n\, x)}{n}$$

b) Su historia, a lo largo de los 100 primeros segundos de contacto de los cuerpos para diversas profundidades.

Para: $t = 100$ seg $\Rightarrow$ $Fo = \frac{\alpha\, t}{L^2} = \frac{5.10^{-5} \times 100}{0,3^2} = 0,0555 < 0,2$ (varios sumandos)

$\xi = 0,1 \Rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_0} = 0,24$; $\xi = 0,3 \Rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_0} = 0,6$; $\xi = 0,4 \Rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_0} = 0,69$; $\xi = 0,5 \Rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_0} = 0,72$

c) Tiempo que debe transcurrir para que la temperatura en el plano central sea de 300ºC:

$$T_C = 500 - \frac{2000}{\pi} e^{-0,005483\, t} \text{sen}\,(10,47 \times 0,15) + \ldots = 300 \quad \Rightarrow \quad t = 212,5 \text{ seg}$$

****

III.15.- Una esfera de aluminio de 6 cm de diámetro se calienta en un horno hasta 200°C y mediante un dispositivo adecuado se introduce rápidamente en un conducto por donde circula aire a 50°C. Haciendo medidas de temperaturas en la esfera se obtienen los siguientes resultados:

- Un minuto después de colocar la esfera en el conducto, T_1=182°C

- Cinco minutos después de colocar la esfera en el conducto, T_2=129,5°C

- Diez minutos después de colocar la esfera en el conducto, T_3=92,5°C

Los datos del aluminio son constantes en el intervalo 50ºC÷ 200°C: $\rho = 2690$ kg/m³ ; $c_p = 0,248$ Kcal/kg°C ; k =235 W/m°C

Determinar:

a) La distribución de temperaturas

b) El coeficiente de transmisión de calor medio, esfera-aire en Kcal/h.m².°C

c) El flujo térmico instantáneo q/A en la superficie de la esfera en los tiempos 1 minuto, 5 minutos y 10 minutos y la relación Q/Q_0 en los tiempos citados.

RESOLUCIÓN

Dado que el medio de enfriamiento es el aire, se puede suponer que la condición de contorno es con resistencia térmica interna despreciable, que se tendrá que confirmar con Bi < 0,1

$$Bi = \frac{h_{cF}\,(R/3)}{k} = \frac{h_{cF}\,x\,0{,}01}{235} = 0{,}00004255\ h_{cF}$$

a) Distribución de temperaturas: $\dfrac{\Phi}{\Phi_0} = e^{-Bi\,Fo} = e^{-\frac{h_{cF}\,A}{\rho\,V\,c_p}} = e^{-\frac{3\,h_{cF}\,t}{\rho\,R\,c_p}}$

$$\frac{T - 50}{200 - 50} = e^{-Bi\,Fo} \quad \Rightarrow \quad T = 50 + 150\,e^{-\frac{3\,h_{cF}\,t}{\rho\,R\,c_p}} = 50 + 150\,e^{-\frac{3\,h_{cF}\,t}{2690\,x\,0{,}03\,x\,0{,}248}} = 50 + 150\,e^{-0{,}15\,h_{cF}\,t}$$

que predice la historia de la relación entre el tiempo y la temperatura siempre que Bi<<0,1

b) El coeficiente de transmisión de calor medio, esfera-aire en Kcal/hm²°C

Para: t = 60 seg ; $T_1 = 182 = 50 + 150\,e^{-0{,}15\,h_{cF_1}\,60} \quad \Rightarrow \quad h_{cF_1} = 0{,}0142\ \dfrac{Kcal}{seg.m^2\,ºC} = 51{,}13\ \dfrac{Kcal}{h.m^2\,ºC}$

Para: t = 5 min ; $T_2 = 129{,}5 = 50 + 150\,e^{-0{,}15\,h_{cF_2}\,300} \quad \Rightarrow \quad h_{cF_2} = 0{,}0141\ \dfrac{Kcal}{seg.m^2\,ºC} = 50{,}79\ \dfrac{Kcal}{h.m^2\,ºC}$

Para: t = 10 min ; $T_3 = 92{,}5 = 50 + 150\,e^{-0{,}15\,h_{cF_3}\,600} \quad \Rightarrow \quad h_{cF_3} = 0{,}01401\ \dfrac{Kcal}{seg.m^2\,ºC} = 50{,}436\ \dfrac{Kcal}{h.m^2\,ºC}$

Valor medio de $h_{cF} = \dfrac{51{,}13 + 50{,}79 + 50{,}436}{3} = 50{,}78\ \dfrac{Kcal}{h.m^2.ºC} = 59{,}04\ \dfrac{W}{m^2.ºC}$

$$Bi = 0{,}00004255\ h_{cF} = 0{,}00004255\ x\ 59{,}04\ \frac{W}{m^2.ºC} = 0{,}00251 << 0{,}1$$

luego el sólido sí tiene resistencia térmica interna despreciable.

c) Flujo térmico instantáneo en la superficie de la esfera: $Q = h_{cF}\left\{T_{(t)} - T_F\right\} = h_{cF}\,(T_0 - T_F)\,\exp\left(-Bi\,Fo\right) =$

$$= 50{,}78\ Kcal\ (200 - 50)\ \exp\left(\frac{50{,}78\,t}{2690\,x\,0{,}248\,(0{,}03/3)}\right) = 7618{,}5\ \exp\left(-7{,}61\,t\right)$$

Para: t = 1 minuto = $\dfrac{1}{60}$ hora $\quad \Rightarrow \quad q(t)/A = 7618{,}5\,e^{-7{,}61\,x\,\frac{1}{60}} = 6710\ \dfrac{Kcal}{h\,m^2}$

Para: t = 5 minutos = $\dfrac{1}{12}$ hora $\quad \Rightarrow \quad q(t)/A = 7618{,}5\,e^{-7{,}61\,x\,\frac{1}{12}} = 4039{,}5\ \dfrac{Kcal}{h\,m^2}$

Para: t = 10 minutos = $\dfrac{1}{6}$ hora $\quad \Rightarrow \quad q(t)/A = 7618{,}5\,e^{-7{,}61\,x\,\frac{1}{6}} = 2142\ \dfrac{Kcal}{h\,m^2}$

d) Hallar la relación Q/Q_0 en los tiempos citados.

Calor disipado en estos tiempos: $Q(t) = h_{cF}\,A\,(T_0 - T_F)\,t\,e^{\frac{1 - \exp(-Bi\,Fo)}{Bi\,Fo}} =$

$$= 50{,}78\ \frac{Kcal}{h.m^2.ºC}\ x\ (4\,\pi\,x\,0{,}0\,3^2)\ x\ 150\ t\ x\ \frac{1 - \exp(-7{,}61\,t)}{7{,}61\,t} = 11{,}32\,[\,1 - e^{-7{,}61\,t}]$$

$$Q_0 = m\,c_p\,(T_0 - T_F) = V\,\rho\,c_p\,(T_0 - T_F) = \frac{4\,\pi\,R^3}{3}\,\rho\,c_p\,(T_0 - T_F) =$$

$$= \frac{4\,\pi\,0{,}03^3 m^3}{3}\ x\ 2690\ \frac{kg}{m^3}\ x\ 0{,}248\ \frac{Kcal}{kgºC}\ (200 - 50)ºC = 11{,}32\ \frac{Kcal}{hora}$$

Para: t = 1 minuto = $\dfrac{1}{60}$ hora $\quad \Rightarrow \quad Q(t) = 11{,}32\,(1 - e^{-7{,}61\,x\,\frac{1}{60}}) = 1{,}34\ \dfrac{Kcal}{hora} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{Q}{Q_0} = 0{,}1183$

Para: t = 5 minutos = $\dfrac{1}{12}$ hora $\quad \Rightarrow \quad Q(t) = 11{,}32\,(1 - e^{-7{,}61\,x\,\frac{1}{12}}) = 5{,}31\ \dfrac{Kcal}{hora} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{Q}{Q_0} = 0{,}4696$

Para: t = 10 minutos = $\frac{1}{6}$ hora $\Rightarrow$ $Q(t) = 11{,}32\,(1 - e^{-7{,}61 \times \frac{1}{6}}) = 8{,}13\ \frac{Kcal}{hora}$ $\Rightarrow$ $\frac{Q}{Q_0} = 0{,}7186$

****

III.16.- Un cilindro de fundición de gran longitud, k= 70 W/m°K, α = 2.10^{-5} m^2/seg, con un diámetro de 20 cm, está originariamente a una temperatura uniforme de 400°C. Se enfría la superficie exterior del cilindro con un fluido a la temperatura de 50ºC y coeficiente de convección h_C = 420 W/m^2°K. Si el fluido se dirige hacia la superficie del cilindro durante un tiempo de 20 minutos, determinar:

a) La temperatura en el eje y en la superficie del cilindro en ese instante

b) El calor transferido por unidad de longitud desde el cilindro, durante el periodo de los 20 minutos

---

RESOLUCIÓN

Condición de contorno a utilizar: $\begin{cases} h_C/k = 420/70 = 6 \Rightarrow \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C R/k = 420 \times 0{,}1/70 = 0{,}6 > 0{,}1 \Rightarrow \text{c.c. convección} \end{cases}$

$Fo = \frac{\alpha\, t}{R^2} = \frac{2.10^{-5}\,(20 \times 60)}{0{,}1^2} = 2{,}4$; $F_0 = T_0 - T_F = 400 - 50 = 350$nºC

a) Temperatura en el eje del cilindro en ese instante

$$\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_C - 50}{400 - 50} = \left| \begin{array}{l} Fo = 2{,}40 \\ Bi = 0{,}6\ ;\ Bi^{-1} = 1{,}666 \end{array} \right| = 0{,}095 \Rightarrow T_C = 83{,}25ºC$$

Temperatura de la superficie del cilindro en ese instante

$$\frac{\Phi(R,t)}{\Phi(0,t)} = \frac{T_{sup} - T_F}{T_C - T_F} = \frac{T_{sup} - 50}{83{,}25 - 50} = \left| \frac{r}{R} = 1 \right| = 0{,}74 \Rightarrow T_{sup} = 74{,}6ºC$$

ó también: $\frac{\Phi(R,t)}{\Phi_0} = \frac{\Phi_{sup}}{\Phi_C}\ \frac{\Phi_C}{\Phi_0} = 0{,}74 \times 0{,}095 = 0{,}0703 \Rightarrow T_{sup} = 50 + (0{,}0703 \times 350) = 74{,}6ºC$

b) Cantidad de calor transferido por unidad de longitud desde el cilindro, durante 20 minutos

$Bi^2 Fo = 0{,}6^2 \times 2{,}4 = 0{,}864$

$Q(t)/Q_0 = 0{,}88$ (Gráfica de Gröber)

$$Q_0 = \rho\ c_{pF}\ \pi R^2 (T_0 - T_F) = \frac{k}{\alpha}\ \pi R^2 (T_0 - T_F) = \frac{70}{2.10^{-5}}\ \pi \times 0{,}1^2 \times 350 = 3{,}848.10^7\ \frac{W.seg}{m}$$

$$Q(t) = 0{,}88\ Q_0 = 0{,}88 \times 3{,}848.10^7\ \frac{W\ seg}{m} = 3{,}388.10^7\ \frac{W\ seg}{m} = \frac{3{,}388.10^7}{3600}\ \frac{W\ hora}{m} = 9{,}41\ \frac{kW}{m}$$

****

III.17.- Una lámina de un cierto material de propiedades térmicas, k = 2 Kcal/hmºC, α = 0,0002 m^2/hora, tiene un espesor de 3 cm, y se encuentra a una temperatura de 24ºC. En estas condiciones se introduce en un horno a 400ºC. El coeficiente de convección es h_{cF} = 60 Kcal/hm^{2}ºC.

Determinar

a) El tiempo que tardará el centro geométrico en alcanzar la temperatura de 300ºC y la temperatura que se alcanza en ese instante en un plano situado a 1 cm del plano central

b) Si el calentamiento continúa, el tiempo necesario para que en el plano situado a 1 cm del plano central se alcancen 350ºC

c) Si existiese un aislamiento perfecto en una de las caras de la lámina, el tiempo que deberá transcurrir para que en el plano central se alcancen 200ºC.

RESOLUCIÓN

a) Tiempo que tardará el centro en alcanzar la temperatura de 300ºC. En la condición de contorno de convección, la longitud característica es la mitad del espesor

Condición de contorno a utilizar: $\left\{ \begin{array}{l} h_C/k = 60/2 = 30 \;\Rightarrow\; \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C\,(e/2)/k = 60 \times 0{,}015/2 = 0{,}45 > 0{,}1 \;\Rightarrow\; \text{c.c. convección} \end{array} \right.$

Mediante la gráfica de Heysler se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} Bi = 0{,}45 \;;\; Bi^{-1} = 2{,}22 \\ \dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = \dfrac{300 - 400}{24 - 400} = 0{,}27 \end{array} \right\} \Rightarrow Fo = 3{,}56 = \frac{\alpha\, t}{L^2} = \frac{2.10^{-4}\,\frac{m^2}{hora}\,t}{0{,}015^2\,m^2} \Rightarrow t = 4 \text{ horas}$$

Temperatura que se alcanza en ese instante en un plano situado a 1 cm del plano central

$$\frac{\Phi}{\Phi_C} = \frac{T_{1cm} - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{T_{1cm} - 400}{300 - 400} = \left| Bi^{-1} = 2{,}22 \;;\; \frac{x}{L} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66 \right| = 0{,}92 \Rightarrow T_{1cm} = 400 - 0{,}92 \times 100 = 308ºC$$

b) Si el calentamiento continúa, el tiempo necesario para que en el plano situado a 1 cm del plano central se alcancen 350ºC

Temperatura en el plano central en estas condiciones (1ª gráfica de Heysler)

$$\frac{\Phi}{\Phi_C} = \frac{T_{1cm} - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{350 - 400}{T_C - 400} = \left| Bi = 0{,}45 \;;\; \frac{x}{L} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66 \right| = 0{,}92 \Rightarrow T_C = 345{,}6ºC$$

por lo que entrando en la 2ª gráfica de Heysler se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} Bi^{-1} = 2{,}22 \\ \dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \dfrac{345{,}6 - 400}{24 - 400} = 0{,}145 \end{array} \right\} \Rightarrow Fo = 5{,}1 = \frac{\alpha\, t}{L^2} = \frac{2.10^{-4}\,\frac{m^2}{hora}\,t}{0{,}015^2\,m^2} \;;\; t = 5{,}7 \text{ horas}$$

c) Si existe un aislamiento perfecto en una de las caras de la lámina, el tiempo que deberá transcurrir para que en el plano central se alcancen 200ºC se calcula considerando el problema en forma similar a los casos anteriores pero con un espesor doble = 6 cm, por cuanto el plano aislado se considera como plano adiabático.

La longitud característica es: $L^* = 3$ cm.

La temperatura en la cara aislada, que ahora es el plano central de la nueva configuración, se calcula a partir de la primera gráfica de Heysler:

$$\frac{\Phi}{\Phi_C} = \frac{T(x,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{200 - 400}{T(0,t) - 400} = \left| \begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_C L^*}{k} = \dfrac{60 \times 0{,}03}{2} = 0{,}9 \\ Bi^{-1} = 1{,}11 \;;\; \text{Plano central: } \dfrac{x}{L^*} = 0{,}5 \end{array} \right| = 0{,}915 \Rightarrow T(0,t) = 181{,}4ºC$$

Con esta temperatura y la segunda gráfica de Heysler se obtiene el nº de Fo y el tiempo correspondiente:

$$\left. \begin{array}{l} Bi^{-1} = 1{,}11 \\ \dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \dfrac{181{,}4 - 400}{24 - 400} = 0{,}58 \end{array} \right\} \Rightarrow Fo = 3{,}83 = \frac{a\, t}{L^2} = \frac{2.10^{-4}\,(m^2/hora)\,t}{0{,}03^2\,m^2} \Rightarrow t = 3{,}735 \text{ horas}$$

****

III.18.- Una placa grande de acero aleado k = 30 W/m°K y $\alpha = 1{,}5.10^{-5}$ m²/seg sale de un tren de laminación a una temperatura constante de 800°C. La placa tiene un espesor de 30 cm. Para conseguir enfriar la placa se dirigen sendos chorros de aire a gran velocidad sobre ambas caras de la placa. El aire tiene una temperatura de 30°C y el coeficiente de transferencia de calor entre el aire y la superficie de la placa es de 500 W/m°K. A la superficie de la placa ha de aplicarse una capa de material aislante, pero la temperatura de la misma tiene que estar por debajo de los 200°C, antes de que pueda aplicarse la capa.

Determinar el tiempo mínimo necesario durante el cual deberá estar enfriándose la placa antes de que pueda aplicarse la capa aislante.

RESOLUCIÓN

Condición de contorno a utilizar: $\left\{ \begin{array}{l} h_C/k = 500/30 = 16{,}67 \;\Rightarrow\; \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C\,(e/2)/k = 500 \times 0{,}15/30 = 2{,}5 > 0{,}1 \;\Rightarrow\; \text{c.c. convección} \end{array} \right.$

(En este ejercicio al aire se le impone un coeficiente de convección muy elevado)

$$\frac{\Phi}{\Phi_C} = \frac{T(x,t) - T_F}{T_C - T_F} = \frac{200 - 30}{T_C - 30} = \left| \begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_C L}{k} = \dfrac{500 \times 0{,}15}{30} = 2{,}5 \\ Bi^{-1} = 0{,}4 \ ; \ x/L = 1 \end{array} \right| = 0{,}415 \quad \Rightarrow \quad T_C = T(0,t) = 439{,}6ºC$$

Tiempo mínimo necesario durante el cual deberá estar enfriándose la placa antes de que pueda aplicarse la capa aislante.

$$\left. \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0{,}4 \\ \dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \dfrac{439{,}6 - 30}{800 - 30} = 0{,}532 \end{array} \right\} \Rightarrow Fo = 0{,}59 = \frac{a\,t}{L^2} = \frac{1{,}5.10^{-5}\ (m^2/seg)}{0{,}15^2 m^2} \ ; \ t = 885 \text{ seg}$$

****

III.19.- Las paredes de un recuperador de calor están formadas por ladrillos de sílice de 40 cm de espesor. Una de las caras se encuentra aislada térmicamente, mientras que la otra se calienta por gases que están a 900°C con un coeficiente h_{cF} = 100 Kcal/hm²°C. Si la T_0 es de 700°C, se desea conocer:

a) La temperatura en un plano situado a 20 cm de la superficie caliente al cabo de 1 hora y 10 horas

b) Los flujos térmicos para el apartado (a)

c) La energía almacenada en la pared

RESOLUCIÓN

Datos de la sílice:

$$c_p = 0{,}24 \ \frac{Kcal}{Kg°C} \ ; \ k = 1 \ \frac{Kcal}{h\ m\ °C} \ ; \ \rho = 2000 \ \frac{Kg}{m^3} \quad ; \quad \alpha = \frac{k}{\rho\ c_p} = \frac{1}{2000 \times 0{,}24} = 0{,}0020 \ \frac{m^2}{hora}$$

a) Temperatura en un plano situado a 20 cm de la superficie caliente al cabo de 1 hora.- Al tratarse de un material refractario, con un bajo coeficiente k, la condición de contorno puede ser isotérmica ya que:

$$\text{Condición de contorno a utilizar:} \left\{ \begin{array}{l} h_C / k = 100/1 = 100 \ \Rightarrow \ \text{c.c. isotérmica} \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}002\ (m^2/hora) \times 1\ hora}{0{,}4^2 m^2} = 0{,}0125 < 0{,}5 \ \Rightarrow \ \text{c.c. isotérmica} \end{array} \right.$$

Fo = 0,0125 confirma que se puede tratar el problema como sólido semiinfinito, siempre que lejos de la superficie se mantenga la temperatura aproximadamente inicial a la inicial.

A) Tratamiento como sólido semiinfinito con condición de contorno isotérmica

Para t = 1 hora, en un plano situado a la distancia x = 0,2 m de la superficie, se tiene:

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\ t}} = \frac{0{,}20\ m}{2\sqrt{0{,}002\ \frac{m^2}{hora} \times 1\ hora}} = 2{,}236 \quad \Rightarrow \quad G(2{,}236) = 0{,}9982$$

$$T_{0,2m;\ 1h} = T_F + G(u)\ (T_0 - T_F) = 900 + 0{,}9982\ (700 - 900) = 700{,}36ºC$$

Para t = 10 horas, en un plano situado a la distancia x = 0,2 m de la superficie, se tiene:

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{L^2} = \frac{0{,}002\ (m^2/hora) \times 10\ h}{0{,}4^2 m^2} = 0{,}125 \ ; \ u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\ t}} = \frac{0{,}20}{2\sqrt{0{,}002 \times 10}} = 0{,}707 \quad \Rightarrow \quad G(0{,}707) = 0{,}6825$$

$$T_{0,2m;\ 10h} = T_F + G(u)\ (T_0 - T_F) = 900 + 0{,}6825\ (700 - 900) = 763{,}5ºC$$

Para ver si éste resultado es válido, hay que comprobar que lejos de la superficie, (en este caso el espesor correspondiente a la cara aislada x = 0,4 m) la temperatura prácticamente no se ha modificado:

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\ t}} = \frac{0{,}40}{2\sqrt{0{,}002 \times 10}} = 1{,}414 \quad \Rightarrow \quad G(1{,}414) = 0{,}95445$$

$$T_{0,4m;\ 10h} = T_F + G(u)\ (T_0 - T_F) = 900 + 0{,}95445\ (700 - 900) = 709{,}1ºC$$

valor próximo a 700°C, por lo que puede considerarse como una buena aproximación.

También se puede comprobar utilizando la expresión de la profundidad de penetración: $x_t = \sqrt{\pi\,\alpha\,t}$

¿Hasta cuando es sólido semi-∞?; cuando: $x_t = 0{,}4 = \sqrt{\pi\,\alpha\,t} \;\Rightarrow\; t \simeq 25$ horas

b) Los flujos térmicos para el apartado (a) , sólido semiinfinito:

$$q(t) = \frac{-\,k\,(T_0 - T_F)}{\sqrt{\pi\,\alpha\,t}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} q_{1\text{ hora}} = \dfrac{-\,1\ (\text{Kcal/h mºC})\ (700 - 900)\text{ºC}}{\sqrt{\pi \times 0{,}002\ (\text{m}^2/\text{hora}) \times 1\ \text{hora}}} = 2523{,}1\ \dfrac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2} \\ q_{10\text{ horas}} = \dfrac{-\,1\ (\text{Kcal/h mºC})\ (700 - 900)\text{ºC}}{\sqrt{\pi \times 0{,}002\ (\text{m}^2/\text{hora}) \times 10\ \text{hora}}} = 797{,}88\ \dfrac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2} \end{cases}$$

c) Energía almacenada en la pared

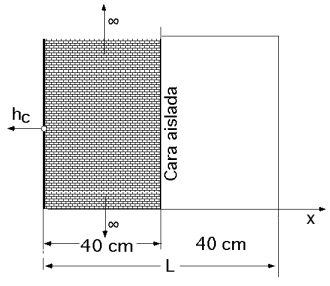
$$Q_{1\text{hora}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(T_F - T_0)\sqrt{\rho\ c_p\ k\ t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(900 - 700)\text{ºC}\sqrt{2000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0{,}24\ \frac{\text{Kcal}}{\text{kgºC}} \times 1\ \frac{\text{Kcal}}{\text{h mºC}} \times 1\ \text{hora}} = 4944\ \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2}$$

B) Tratamiento como sólido infinito con condición de contorno isotérmica.- En estas condiciones, el plano aislado se considera como plano de simetría del sólido, y éste se trata como placa plana de espesor L = 0,80 m.

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5..}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\,\frac{\text{sen}\,(\lambda_n x)}{n} = \left| \lambda_n = \frac{\pi n}{L} \right| = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5..}^{\infty} e^{-(\pi n)^2 Fo}\,\frac{\text{sen}\,(\pi n\,\xi)}{n}$$

Para: x = 0,20 m ; $\xi = 0{,}2/0{,}8 = 1/4$

Para t = 1 hora $\Rightarrow$ $Fo = \dfrac{\alpha\,t}{L^2} = \dfrac{0{,}002\ (\text{m}^2/\text{hora})\ 1\ \text{h}}{0{,}8^2\,\text{m}^2} = 0{,}003125 << 0{,}2$ (Se necesitan varios sumandos)



$$n = 1 \;\Rightarrow\; \exp\{-(1\,\pi)^2 \times 0{,}003125\}\,\frac{\text{sen}\,(1\,\pi \times 0{,}25)}{1} = 0{,}6856$$

$$n = 3 \;\Rightarrow\; \exp\{-(3\,\pi)^2 \times 0{,}003125\}\,\frac{\text{sen}\,(3\,\pi \times 0{,}25)}{3} = 0{,}17857$$

$$n = 5 \;\Rightarrow\; \exp\{-(5\,\pi)^2 \times 0{,}003125\}\,\frac{\text{sen}\,(5\,\pi \times 0{,}25)}{5} = -\,0{,}0654$$

$$n = 7 \;\Rightarrow\; \exp\{-(7\,\pi)^2 \times 0{,}003125\}\,\frac{\text{sen}\,(7\,\pi \times 0{,}25)}{7} = -\,0{,}02228$$

$$n = 9 \;\Rightarrow\; \exp\{-(9\,\pi)^2 \times 0{,}003125\}\,\frac{\text{sen}\,(9\,\pi \times 0{,}25)}{9} = 0{,}0083$$

La suma del desarrollo es: 0,7847, y la temperatura a la distancia x = 0,2 m de la superficie, para t = 1 hora es:

$$T_{0,2\text{ m};\,1\text{ h}} = T_F + \frac{4\,(T_0 - T_F)}{\pi} \times 0{,}7847 = 900 + \frac{4\,(700 - 900)}{\pi} \times 0{,}7847 = 700{,}16\text{ºC}$$

que coincide con la del apartado (a).

Para: t = 10 horas $\Rightarrow$ $Fo = 0{,}03125$

$$\begin{cases} n = 1\ ;\ e^{-(\pi)^2 \times 0{,}03125}\ \dfrac{\text{sen}\,(\pi \times 0{,}25)}{1} = 0{,}5194 \\ n = 3\ ;\ e^{-(3\pi)^2 \times 0{,}03125}\ \dfrac{\text{sen}\,(3\pi \times 0{,}25)}{3} = 0{,}01468 \\ n = 5\ ;\ e^{-(5\pi)^2 \times 0{,}03125}\ \dfrac{\text{sen}\,(5\pi \times 0{,}25)}{5} = -\,0{,}00006338 \end{cases}$$

La suma de estos valores es: 0,5340166, por lo que: $T(x,t) = 900 + \dfrac{0{,}5340166 \times 4}{\pi}\,(700 - 900) = 764{,}01°C$

Flujo de calor en la mitad del sólido:

$$q(t) = \frac{4\,\Phi_0 k}{L}\sum_{n=1,3,...} e^{-(\pi n)^2 Fo} = \left| \begin{array}{l} n = 1\ ;\ e^{-(\pi)^2\,0{,}03125} = 0{,}7346 \\ n = 3\ ;\ e^{-(3\pi)^2\,0{,}03125} = 0{,}06229 \\ n = 5\ ;\ e^{-(5\pi)^2\,0{,}03125} = 0{,}000448 \end{array} \right| = \frac{4 \times (700 - 900) \times 1}{0{,}8}\,0{,}7973 = 797{,}3\ \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}$$

****

III.20.- Una placa de acero está inicialmente a una temperatura uniforme de 300°C. La placa se enfría enviando sobre ella una corriente de aire a 50°C, de modo que incida sobre una de las superficies de la placa. Esta tiene un

espesor de 10 cm, difusividad térmica $\alpha = 10^{-5}$ m²/seg, conductividad térmica k = 40 W/m°K, siendo el coeficiente de película aire- placa $h_C = 400$ W/m²°K.

Determinar

a) El tiempo necesario para que la superficie de la placa sobre la que incide el aire se enfríe hasta 200°C

b) Cuando la superficie de la placa alcance los 200°C, las temperaturas en los planos situados a 1 cm. y a 10 cm. de la misma.

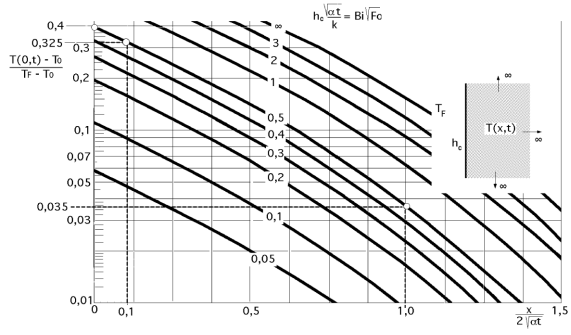
RESOLUCIÓN.- Si Fo<<1 se puede tratar como sólido semiinfinito siempre que a una gran distancia de la superficie la temperatura sea igual a la temperatura inicial (dato que se pide en el apartado (b) para la temperatura en el plano situado a 10 cm de la superficie)

$$Bi = \frac{h_C e}{k} = \frac{400 \times 0{,}1}{40} = 1 \quad ; \quad Fo = \frac{\alpha\, t}{e^2} = \frac{10^{-5} t}{0{,}1^2} = 10^{-3} t$$

por lo que durante 10^{-3} t <<1, (1000 seg), el sólido se comporta como sólido semiinfinito y la temperatura T_0 se mantiene prácticamente constante lejos de la superficie; por encima de 1000 seg se comportaría como infinito.

a) Tiempo necesario para que la superficie de la placa sobre la que incide el aire se enfríe hasta 200°C.- Del diagrama correspondiente se obtiene:

$$\text{Para: } x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{2\sqrt{\alpha\, t}} = 0 \quad ; \quad \frac{T(0,t) - T_0}{T_F - T_0} = \frac{200 - 300}{50 - 300} = 0{,}40 \xrightarrow{\text{Gráfica}} \begin{cases} Bi\,\sqrt{Fo} = 0{,}5 \\ Fo = 0{,}25 = 10^{-3} t \end{cases} \Rightarrow \quad t = 250 \text{ seg}$$



Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito sometido a convección

b) Cuando la superficie de la placa alcance los 200°C, las temperaturas en los planos situados a 1 cm. y a 10 cm. de la misma son:

$$\text{Temperatura para x = 0,1 m: } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{2\sqrt{\alpha\, t}} = \dfrac{0{,}1}{2\sqrt{10^{-5} \times 250}} = 1 \\ \dfrac{h_C}{k}\sqrt{\alpha\, t} = 0{,}5 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{T(x,t) - T_0}{T_F - T_0} = 0{,}035$$

$T_{x=0,1} = 300 + 0{,}035\,(50 - 300) = 291{,}25°C < 300°C$

aproximación suficiente para considerar al sólido como semi∞

$$\text{Temperatura para x = 0,01 m: } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{2\sqrt{\alpha\, t}} = \dfrac{0{,}01}{2\sqrt{10^{-5} \times 250}} = 0{,}1 \\ \dfrac{h_C}{k}\sqrt{\alpha\, t} = 0{,}5 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{T(x,t) - T_0}{T_F - T_0} = 0{,}325$$

$T_{x=0,01} = 300 + 0{,}325\,(50 - 300) = 218{,}75°C$

****

III.21.-- Unas bolas para cojinetes de acero al Cr k=50 W/m°K, α =1,3.10^{-5} m²/seg han de tratarse térmicamente. Para ello se calientan hasta una temperatura de 650°C y luego se enfrían en un baño de aceite que tiene una temperatura de 55°C. Las bolas de los cojinetes tienen un diámetro de 4,0 cm. El coeficiente de transferencia de calor por convección entre las bolas y el aceite del baño es de 300 W/m²°C.

Determinar

a) El tiempo durante el cual deben permanecer las bolas en el aceite antes de que su temperatura descienda hasta los 200°C

b) Calor eliminado en cada bola en este intervalo de tiempo

RESOLUCIÓN

Condición de contorno a utilizar: $\left\{ \begin{array}{l} h_C /k = 300/50 = 6 \;\Rightarrow\; \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C R/k = 300 \text{ x } 0{,}02/50 = 0{,}12 > 0{,}1 \;\Rightarrow\; \text{c.c. convección} \end{array} \right.$

mediante el método gráfico se puede suponer una temperatura periférica límite de 200ºC, ya que el núcleo estará a mayor temperatura

a) Tiempo durante el cual deben permanecer las bolas en el aceite antes de que su temperatura descienda hasta los 200°C .- Con la primera gráfica de Heysler, para $Bi^{-1} = 8{,}33$ y $\xi = 1$ se obtiene que $\Phi/\Phi_C = 0{,}95$, por lo que:

$$\frac{\Phi_{periferia}}{\Phi_C} = \frac{T_{periferia} - T_F}{T_C - T_F} = \frac{200 - 55}{T_C - 55} = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad T_C = 207{,}6ºC$$

Con la 2ª gráfica de Heysler se obtiene el nº de Fo y el tiempo.

$$\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{207{,}6 - 55}{650 - 55} = 0{,}26 \quad \Rightarrow \quad Fo = 4{,}6 = \frac{\alpha\, t}{R^2} = \frac{1{,}3.10^{-5}\ (m^2/seg)\ t\ (seg)}{0{,}02^2 m^2} \quad \Rightarrow \quad t = 141{,}5ºC$$

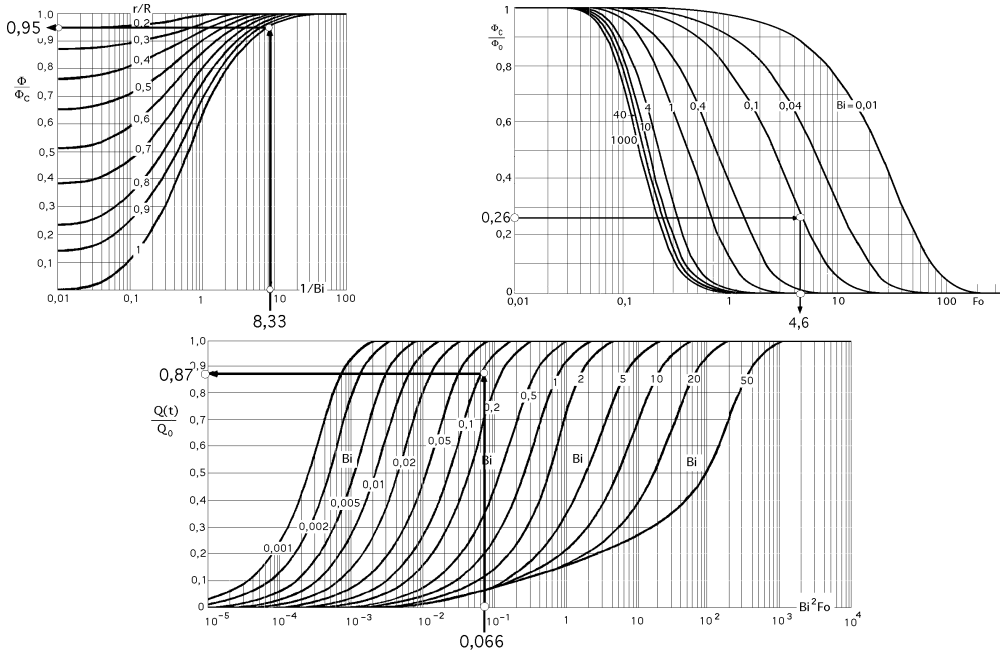
b) Calor eliminado en cada bola en este intervalo de tiempo

Energía almacenada inicialmente en la bola:

$$Q_0 = \frac{4}{3}\,\pi\, R^3\, \rho\, c_{pF}\, (T_0 - T_F) = \left| \rho = \frac{k}{\alpha\, c_{pF}} \right| = \frac{4}{3}\,\pi\,(0{,}02)^3\, \frac{50}{1{,}3.1\ 0^{-5}\, c_{pF}}\, c_{pF}\, (650 - 55) = 76687\ J$$

Transferencia de calor para: t = 141,5 seg

$$\left. \begin{array}{l} Bi^2 Fo = 0{,}12^2 \text{ x } 4{,}6 = 0{,}06624 \\ Bi = 0{,}12 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Gröber}} \frac{Q}{Q_0} = 0{,}87 \quad \Rightarrow \quad Q = 0{,}87\, Q_0 = 0{,}87 \text{ x } 76687 = 66717\ J$$



DE OTRA FORMA.- Como estamos en la frontera de Bi< 0,1 también se podría considerar la condición de resistencia térmica interna despreciable, cometiendo un error del orden del 5%. Si este error se admite, se tiene:

$$Bi = \frac{h_{cF}\,(R/3)}{k} = \frac{300 \text{ x } (0{,}02/3)}{50} = 0{,}04$$

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{(R/3)^2} = \frac{9 \times 1{,}3.10^{-5} t}{0{,}02^2} = 0{,}2925\ t$$

a) Tiempo durante el cual deben permanecer las bolas en el aceite antes de que su temperatura descienda hasta los 200°C

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = e^{-Bi\ Fo} = \frac{T(x,t) - T_F}{T_0 - T_F} \quad \Rightarrow \quad e^{-0{,}04 \times 0{,}2925\ t} = \frac{200 - 55}{650 - 55} = 0{,}2437 \quad \Rightarrow \quad t = 120{,}6\ seg$$

b) Calor eliminado en cada bola en este intervalo de tiempo

$$Q(t) = h_{cF} A\ (T_0 - T_F)\ t\ \frac{1 - e^{-Bi\ Fo}}{Bi\ Fo} = \left| Fo = 0{,}2925\ t = 0{,}2925 \times 120{,}6 = 35{,}28 \right| =$$

$$= 300 \times 4\ \pi \times 0{,}02^2\ (650 - 55) \times 120{,}5 \times \frac{1 - e^{-(0{,}4 \times 35{,}28)}}{0{,}04 \times 35{,}28} = 57930\ J$$

Transferencia de calor instantánea, procedentes de las bolas cuando se acaban de sumergir en el baño de aceite y cuando alcanzan los 200°C.

$$En,\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad Fo = 0 \quad ; \quad q(t) = h_{cF}\ A\ (T_0 - T_F)\ e^{-Bi\ Fo} = 300 \times 4\ \pi \times 0{,}02^2\ (650 - 55) = 897{,}2\ W$$

$$En,\ t = 120{,}6\ seg \quad \Rightarrow \quad Fo = 35{,}28 \quad ; \quad q(t) = 300 \times 4\ \pi \times 0{,}02^2\ (650 - 55)\ e^{-80{,}04 \times 35{,}28} = 218{,}8\ W$$

****

III.22.- Una plancha metálica de espesor 3 cm se encuentra a una temperatura de 20ºC y en estas condiciones se introduce en un horno a 1000ºC.

Si la plancha se considera de grandes proporciones, determinar:

a) El tiempo que debe transcurrir para que el centro alcance 500ºC

b) La temperatura que en ese instante adquiere el plano situado a 1 cm del plano central

c) El calor absorbido en ese intervalo de tiempo

d) El tiempo que debe transcurrir para que el plano situado a 1 cm del plano central alcance la temperatura de 750ºC

e) Si se considera que una de las caras de la placa tiene un aislamiento térmico perfecto, ¿qué tiempo deberá transcurrir para que en el plano central se alcancen 500ºC? ¿cuál sería en ese instante la temperatura en la cara no aislada? Datos: k = 8 W/m.ºC ; $\alpha = 5.10^{-3}$ m²/hora; h_C = 93 W/m² ºC

RESOLUCIÓN

Condición de contorno a utilizar:
$$\begin{cases} h_C/k = 93/8 = 11{,}6 \ \Rightarrow \ \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C\ (e/2)/k = 93 \times 0{,}015/8 = 0{,}174 > 0{,}1 \ \Rightarrow \ \text{c.c. convección} \end{cases}$$

a) Tiempo que debe transcurrir para que el centro alcance 500ºC

Temperatura adimensional en la zona central:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \dfrac{500 - 1000}{20 - 1000} = 0{,}51 \\ Bi^{-1} = 5{,}734 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Fo = 4{,}8 = \frac{\alpha\ t}{L^2} = \frac{5.10^3 t}{0{,}015^2} \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}216\ h = 13\ min$$

b) Temperatura que en ese instante adquiere el plano situado a 1 cm del plano central

$$\left.\begin{array}{l} Fo = 4{,}8 \ ; \ \dfrac{x}{L} = \dfrac{1\ cm}{1{,}5\ cm} = 0{,}66 \\ Bi^{-1} = 5{,}734 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{T_{1\ cm} - 1000}{500 - 1000} = 0{,}96 \ ; \ T_{1\ cm} = 520ºC$$

c) Calor absorbido en ese intervalo de tiempo

$$Q_0 = V\ \rho\ c_{pF}\ (T_0 - T_F) = \left| \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{k}{\rho\ c_p} \ \Rightarrow \ \rho\ c_p = \dfrac{k}{\alpha} = \dfrac{8\ (W/mºC)}{5.10^{-3}\ (m^2/h)} \\ V = a\ e = 0{,}03\ A\ \ (m^3) \end{array} \right| =$$

$$= 0{,}03\ A(m^3)\ \frac{8\ (W/m^oC)}{5.10^{-3}\ (m^2/h)}\ (20 - 1000)^oC = 47{,}04\ A\ (\frac{kW}{m^2})$$

$$\left.\begin{array}{l} Bi^2 Fo = 0{,}1744^2 \times 4{,}8 = 0{,}146 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{Q}{Q_0} = 0{,}53 \\ Q_0 = 47{,}04\ A\ (\dfrac{kW}{m^2}) \end{array}\right\} \Rightarrow\ Q = 0{,}53\ Q_0 = 0{,}53 \times 47{,}04\ \frac{kW}{m^2} = 24{,}93\ \frac{kW}{m^2}$$

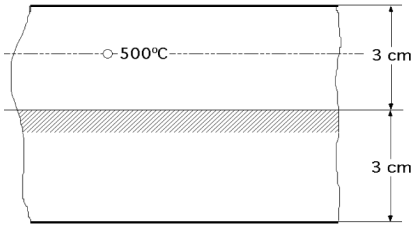
d) Tiempo que debe transcurrir para que el plano situado a 1 cm del plano central alcance la temperatura de 750ºC

$$\frac{\Phi}{\Phi_C} = \frac{T - T_F}{T_C - T_F} = \frac{750 - 1000}{T_C - 1000} = 0{,}96 \quad \Rightarrow \quad T_C = 1000 + \frac{750 - 1000}{0{,}96} = 739{,}6^oC$$

$$\text{luego:} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{T(0,T) - 1000}{20 - 1000} = \dfrac{739{,}6 - 1000}{20 - 1000} = 0{,}2657 \\ Bi^{-1} = 5{,}734 \end{array}\right. \Rightarrow\ Fo = 8{,}8 = \frac{\alpha\ t}{L^2} = \frac{5.10^{-3}\ \frac{m^2}{hora}\ t}{0{,}015^2} \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}396\ h = 23{,}45\ min$$

e) Si se considera que una de las caras de la placa tiene un aislamiento térmico perfecto, el tiempo que deberá para que en el plano central se alcancen 500ºC

En caso de aislamiento perfecto en una de las caras el problema es similar al caso anterior pero con $L^* = \frac{e^*}{2} = 3$ cm



$$Bi = \frac{h_{cF} L^*}{k} = \frac{93\ (W/m^2\ ºC)\ 0{,}03\ m}{8\ (W/m^oC)} = 0{,}34875 \quad ; \quad Bi^{-1} = 2{,}867$$

Temperatura adimensional en la zona central del sólido duplicado:

$$\frac{T - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{500 - 1000}{T(0,t) - 1000} = 0{,}96 \quad ; \quad T(0,t) = 479{,}17^oC \text{ (superficie aislada)}$$

Con esta temperatura y los gráficos de Heysler se obtiene el nº de Fo:

$$\text{luego:} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{T - 1000}{20 - 1000} = \dfrac{479{,}17 - 1000}{20 - 1000} = 0{,}5314 \\ Bi^{-1} = 2{,}867 \end{array}\right. \Rightarrow\ Fo = 2{,}1 = \frac{\alpha\ t}{L^{*2}} = \frac{5.10^{-3} t}{0{,}03^2} \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}378\ horas$$

Temperatura en la cara no aislada: $\left\{\begin{array}{l} x/L = 1 \\ Bi^{-1} = 2{,}867 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{T - T_F}{T_C - T_F} = 0{,}84$

$$T(x,t) = T_F + 0{,}84\ \{T(0,t) - T_F) = 1000 + 0{,}84\ (479{,}17 - 1000) = 562{,}5^oC$$

****

III.23.- Un cilindro de 10 cm de diámetro y una longitud de 16 cm, k =0,5 W/m°K, α=5.10^{-7} m^2/seg está inicialmente a la temperatura uniforme de 20°C. Se coloca el cilindro en un horno en el que la temperatura ambiental es de 500°C con un h_C=30 W/m^2°K.

Determinar

a) Las temperaturas máxima y mínima del cilindro, treinta minutos después de su introducción en el horno

b) El calor absorbido en ese tiempo

RESOLUCIÓN

$$\frac{h_{cF}}{k} = \frac{30}{0{,}5} = 60 \quad \Rightarrow \quad \text{C.c. convección}$$

Distribución de temperaturas, intersección de una placa plana ∞ de espesor 16 cm con un cilindro ∞ de diámetro 10 cm: $P(x)\ C(r) = \dfrac{\Phi(x,r,t)}{\Phi_0}$

PROCESO TÉRMICO.- En el calentamiento, en el tiempo *t*, la temperatura mínima se localiza en el centro geométrico del cilindro y la temperatura máxima se corresponde con los puntos de las circunferencias de sus bases.

Temperatura mínima en: $x = 0,\ r = 0$
Temperatura máxima en: $x = L,\ r = R$

Placa infinita $\Rightarrow$ $Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{30 \times 0{,}08}{0{,}5} = 4{,}8$; $Bi^{-1} = 0{,}208$; $Fo = \frac{\alpha\, t}{L^2} = \frac{5.10^{-7} \times 1800}{0{,}08^2} = 0{,}14$

$$P(0) = \frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}9$$

$$P(L) = \frac{\Phi_L}{\Phi_0} = \frac{\Phi_L}{\Phi_C}\,\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left| \frac{\Phi_L}{\Phi_C} = \frac{T_L - T_F}{T_C - T_F} = \left\{ \frac{x}{L} = 1 \right\} = 0{,}27 \right| = 0{,}90 \times 0{,}27 = 0{,}249$$

Cilindro infinito $\Rightarrow$ $Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{30 \times 0{,}05}{0{,}5} = 3$; $Bi^{-1} = 0{,}333$; $Fo = \frac{\alpha\, t}{R^2} = \frac{5.10^{-7} \times 1800}{0{,}05^2} = 0{,}36$

$$C(0) = \frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}47 \text{ (eje)}$$

$$C(R) = \frac{\Phi(R,t)}{\Phi_0} = \frac{\Phi_R}{\Phi_C}\,\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left| \frac{\Phi_R}{\Phi_C} = 0{,}36 \right| = 0{,}47 \times 0{,}36 = 0{,}1692$$

Temperatura mínima del cilindro (en el centro geométrico)

$$\frac{\Phi_{mín}}{\Phi_0} = P(0)\,C(0) = 0{,}90 \times 0{,}47 = 0{,}423 = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} \quad ; \quad T_C = T_{mín} = 0{,}423\,(20 - 500) + 500 = 297ºC$$

Temperatura máxima del cilindro (en la circunferencia de las bases)

$$\frac{\Phi_{máx}}{\Phi_0} = P(L)\,C(R) = 0{,}249 \times 0{,}1692 = 0{,}042 = \frac{T_{máx} - T_F}{T_0 - T_F} \quad ; \quad T_{máx} = 0{,}042\,(20 - 500) + 500 = 480ºC$$

b) Calor absorbido en ese tiempo: $Q = \theta\ \rho\ c_p V\,(T_0 - T_F)$

Placa: $Bi^2 Fo = 4{,}8^2 \times 0{,}14 = 3{,}2256 \Rightarrow \Phi_{placa} = \frac{Q}{Q_0} = 0{,}32$

Cilindro: $Bi^2 Fo = 3^2 \times 0{,}36 = 3{,}24 \Rightarrow \Phi_{cilindro} = \frac{Q}{Q_0} = 0{,}7$

$$\theta = \Phi_{placa} + \Phi_{cilindro}\,(1 - \Phi_{placa}) = 0{,}32 + 0{,}7\,(1 - 0{,}32) = 0{,}796$$

$$Q = \theta\ \rho\ c_p V\,(T_0 - T_F) = \left| \begin{array}{c} \alpha = \frac{k}{\rho\ c_p} \ ; \ \rho\ c_p = \frac{k}{\alpha} \\ D = 0{,}1 \text{ m} \ ; \ h = 0{,}16 \text{ m} \end{array} \right| = \theta\ \frac{k}{\alpha}\ V\,(T_0 - T_F) =$$

$$= 0{,}796\ \frac{0{,}5\ (W/mºC)}{5.10^{-7}\ (m^2/seg)}\ \pi \times 0{,}05^2 m^2 \times 0{,}16\ m^3\,(20 - 500)ºC = 480.135\ W\ seg = \frac{480.135\ Kcal}{4{,}186 \times 1000} = 114{,}7\ Kcal$$

****

III.24.- Una pared de ladrillo de 25 cm de espesor, que se encontraba inicialmente a una temperatura $T_0 = 90°C$, reduce bruscamente la temperatura de una de sus caras hasta alcanzar una temperatura $T_s = 15°C$.

Determinar:

a) La temperatura del plano que se encuentra a 10 cm de la superficie, cuando hayan transcurrido 2 horas

b) El calor disipado a través de la pared en ese tiempo

c) Suponiendo ahora que las paredes del ladrillo se ponen en contacto con un fluido exterior a 15°C, siendo el coeficiente de película $h_{cF} = 10$ Kcal/h.m²°C

c-1) La temperatura en un plano situado a 10 cm del plano central, al cabo de 2 horas

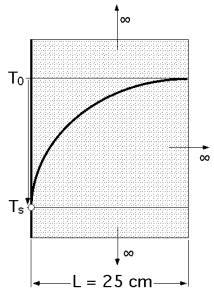
c-2) La temperatura en un plano situado a 10 cm de la superficie, al cabo de 2 horas

c-3) El calor disipado a través de la pared en dicho tiempo

Datos del ladrillo: $c_{pF} = 0{,}2$ Kcal/kgºK ; $\alpha = 0{,}00185\ m^2$/hora ; $\rho = 1602\ kg/m^3$; $k = 0{,}6$ Kcal/h.mºK

RESOLUCIÓN

a) Temperatura del plano que se encuentra a 10 cm de la superficie, cuando hayan transcurrido 2 horas.- El variar bruscamente la temperatura de una de las caras, implica una condición de contorno isotérmica; hay que comprobar que el nº de Fo< 1



$$Fo = \frac{\alpha\, t}{L^2} = \frac{0{,}00185\ (m^2/hora)_x\ 2\ horas}{0{,}25^2\ m^2} = 0{,}0592$$

Con este valor de Fo se puede tratar también como sólido semiinfinito, ya que la condición Fo<1 implica que lejos de la superficie la temperatura de la cara opuesta permanece, prácticamente, a la temperatura inicial de 90ºC. También se puede comprobar con: $x_t = \sqrt{\pi\, \alpha\, t}$

$$\text{Para: } x = 0{,}25\ m\ ;\ u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\, t}} = \frac{0{,}25}{2\sqrt{0{,}00185_x\ 2}} = 2{,}054 \ \Rightarrow\ G(2{,}054) = 0{,}99615$$

$$T_{(0{,}25m\ ;\ 2\ horas)} = 15 + 0{,}99615_x\,(90 - 15) = 89{,}71ºC \simeq 90ºC\ \text{(Sí sólido semiinfinito)}$$

$$\text{Para: } x = 0{,}10\ m\ ;\ u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\, t}} = \frac{0{,}1}{2\sqrt{0{,}00185_x\ 2}} = 0{,}822 \ \Rightarrow\ G(0{,}822) = 0{,}754$$

$$T_{(0{,}1m\ ;\ 2\ horas)} = 15 + 0{,}754_x\,(90 - 15) = 71{,}55ºC$$

b) Calor disipado a través de la pared en ese tiempo

$$Q_{(2\ horas)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(T_s - T_0)\,\sqrt{\rho\ c_{pF}\ k\ t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(15 - 90)\,\sqrt{1602_x\ 0{,}2_x\ 0{,}6_x\ 2} = 1659{,}4\ \frac{Kcal}{m^2}$$

¿PUEDE TRATARSE COMO SOLIDO INFINITO CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA? Si se interpreta que la temperatura de la cara opuesta prácticamente no se modifica en un cierto tiempo, esa cara se puede considerar como adiabática en ese tiempo, por lo que se puede duplicar el espesor a 2 L = 50 cm; las condiciones de contorno implican que la temperatura en x=0 y x=2 L tienen que ser la misma.

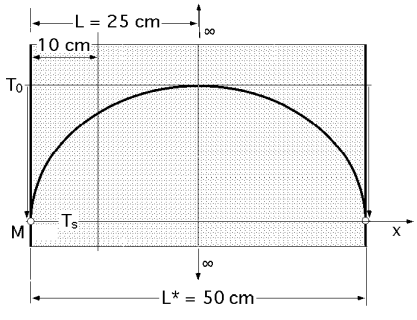
La *x* se toma a partir del origen de coordenadas M, y por la simetría de la distribución de temperaturas, su valor está entre 0 y 0,25, mientras que L^* =0,5 m

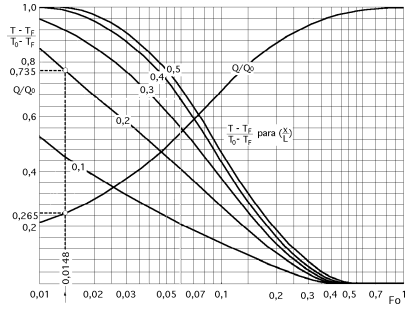
$$\left.\begin{aligned} Fo &= \frac{\alpha\, t}{L^{*2}} = \frac{0{,}00185\ (m^2/h)_x\ 2\ horas}{0{,}5^2 m^2} = 0{,}0148 \\ \xi &= \frac{x}{L^*} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2 \end{aligned}\right\} \ \Rightarrow\ \left\{\begin{aligned} &\frac{T_{10\ cm} - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}735 \\ &T_{10\ cm} = 15 + 0{,}735\,(90 - 15) = 70{,}13ºC \end{aligned}\right.$$

b) Calor disipado a través de la pared en ese tiempo:

$$\frac{Q_{x=0}}{A} = 0{,}265\ \frac{Q_0}{A} = \left|\ \frac{Q_0}{A} = L\,\rho\ c_{pF}\,(T_0 - T_F) = 0{,}25_x\ 1602_x\ 0{,}2_x\,(90 - 15) = 6008\ \frac{Kcal}{m^2}\ \right| = 1592\ \frac{Kcal}{m^2}$$

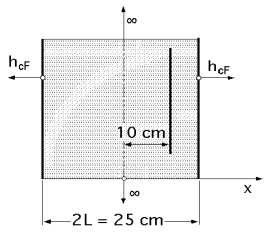
c) Las paredes del ladrillo se ponen en contacto con un fluido exterior a 15°C, siendo el coeficiente de película h_{cF} = 10 Kcal/h.m²°C





c-1) Temperatura en el plano situado a 10 cm del plano central, al cabo de 2 horas

Sólido infinito con condición de contorno de convección



$$Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{10 \times 0{,}125}{0{,}6} = 2{,}083 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0{,}48$$

$$Fo = \frac{\alpha\, t}{L^2} = \frac{0{,}00185 \times 2}{0{,}125^2} = 0{,}2368 \quad ; \quad \xi = \frac{x}{L} = \frac{0{,}1}{0{,}125} = 0{,}8$$

$$Bi^2 Fo = 2{,}083^2 \times 0{,}2368 = 1{,}0274$$

Temperatura en el plano medio:

$$\frac{T_{C(2h)} - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_{C(2h)} - 15}{90 - 15} = \left| \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0{,}48 \\ Fo = 0{,}2368 \end{array} \right| = 0{,}71 \quad \Rightarrow \quad T_{C(2h)} = 15 + 0{,}71\,(90 - 15) = 68{,}25ºC$$

Temperatura en un plano situado a 10 cm del plano central, al cabo de 2 horas

$$\frac{T_{10cm;\,2h} - T_F}{T_C - T_F} = \left| \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0{,}48 \\ \dfrac{x}{L} = \dfrac{0{,}1}{0{,}125} = 0{,}8 \end{array} \right| = 0{,}64 \quad \Rightarrow \quad T_{10cm;2h} = 15 + 0{,}64\,(68{,}25 - 15) = 49{,}08ºC$$

Temperatura en un plano situado a 10 cm de la superficie, al cabo de 2 horas

$$\frac{T_{25cm;\,2h} - T_F}{T_C - T_F} = \left| \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0{,}48 \\ \dfrac{x}{L} = \dfrac{0{,}025}{0{,}125} = 0{,}2 \end{array} \right| = 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad T_{25cm;2h} = 15 + 0{,}98\,(68{,}25 - 15) = 67{,}18ºC$$

c-3) Calor disipado a través de la pared en dicho tiempo

$$\frac{Q}{Q_0} = \left| \begin{array}{c} Bi^2 Fo = 1{,}0274 \\ Bi = 2{,}083 \end{array} \right| = 0{,}25 \quad ; \quad \frac{Q}{A} = 0{,}25 \times 6007{,}5 = 1501{,}7 \ \frac{Kcal}{m^2}$$

****

III.25.- Una barra cilíndrica de acero inoxidable 18-8, de 20 cm de diámetro, se calienta a 1000°C y a continuación se enfría en un baño de aceite a 50°C, en el que el coeficiente de película es h_C= 500 Kcal/hm²°C.

Determinar: a) El tiempo que transcurrirá hasta que el eje del cilindro alcance una temperatura de 250°C.

b) La temperatura que se alcanzará en r = 0,05 m al cabo de ese tiempo.

Datos del acero: ρ = 7.817 kg/m³ ; c_p= 0,11 Kcal/kg°C ; k= 22,5 Kcal/m.h°.C ; α = 0,01598 m²/hora

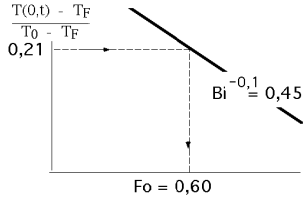
---

RESOLUCIÓN

Condición de contorno a utilizar: $\left\{ \begin{array}{l} h_C / k = 500/22{,}5 = 22{,}2 \quad \Rightarrow \quad \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C R/k = 500 \times 0{,}1/22{,}5 = 2{,}22 > 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \text{c.c. convección} \end{array} \right.$

$$Bi^{-1} = 0{,}45 \quad ; \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{250 - 50}{1000 - 50} = 0{,}21$$

a) Tiempo que transcurrirá hasta que el eje del cilindro alcance una temperatura de 250°C:



$$Fo = 0{,}60 = \frac{\alpha\, t}{R^2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{0{,}6\, R^2}{\alpha} = \frac{0{,}6 \times 0{,}1^2 m^2}{0{,}01598\ (m^2/h)} = 0{,}375\ h = 22\ min\ 30\ seg$$

b) Temperatura que se alcanzará en r = 0,05 m al cabo de ese tiempo:

$$\frac{T(0{,}5;\, t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = \left| \frac{r}{R} = \frac{0{,}05}{0{,}1} = 0{,}5 \right| = 0{,}85 \Rightarrow T(0{,}5;\, t) = 50 + 0{,}85\,(250 - 50) = 220ºC$$

****

III.26.- Una barra de acero de (5 x 4) cm² de sección transversal y 4 metros de longitud, k= 60 W/m°C, α= 1,6.10^{-5} m²/seg está inicialmente a una temperatura uniforme de 225°C. A continuación se la introduce en un medio convectivo con un coeficiente h_{CF}= 500 W/m²°C, estando el ambiente a 25°C.

Calcular la temperatura en el centro para un tiempo de 2 minutos después de haberla sometido a la acción del medio convector exterior

---

RESOLUCIÓN

Consideraremos al sólido como intersección de 3 placas infinitas, de las que una de ellas es muy larga respecto a las otras dos (4 metros), por lo que se puede considerar la transmisión de calor en dos direcciones correspondientes a la sección transversal, definiendo una temperatura adimensional de la forma:

$$\frac{\Phi(x,t)}{\Phi_0} = \frac{T(x,y,t) - T_F}{T_0 - T_F} = P(x)\,P(y)$$

Llamamos $\frac{\Phi_{C_1}}{\Phi_0}$ a la temperatura adimensional en el plano central para una placa de espesor $2\,L_1 = 5$ cm

$$\left.\begin{array}{l} Fo = \frac{\alpha\, t}{L_1^2} = \frac{(1{,}6.10^{-5})\,(2 \times 60)}{2{,}5^2.10^{-4}} = 3{,}1 \\ Bi^{-1} = \frac{k}{h_{cF}\,L_1} = \frac{60}{500 \times 2{,}5.10^{-2}} = 4{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Phi_{C_1}}{\Phi_0} = 0{,}58$$

Llamamos $\frac{\Phi_{C_2}}{\Phi_0}$ a la temperatura adimensional en el plano central para una placa de espesor $2\,L_2 = 4$ cm

$$\left.\begin{array}{l} Fo = \frac{\alpha\, t}{L_2^2} = \frac{(1{,}6.10^{-5})\,(2 \times 60)}{2^2.10^{-4}} = 4{,}8 \\ Bi^{-1} = \frac{k}{h_{cF}\,L_2} = \frac{60}{500 \times 2.10^{-2}} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{F_{C_2}}{F_0} = 0{,}45$$

Para las dos dimensiones se tiene: $\frac{\Phi(x,r,t)}{\Phi_0} = P(x)\,C(r) = 0{,}58 \times 0{,}45 = 0{,}26$

Temperatura en el centro para el problema bidimensional:

$$0{,}26 = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T(0,t) - 25}{225 - 25} \Rightarrow T(0,t) = 25 + 0{,}26 \times (225 - 25) = 77ºC$$

****

III.27.-Una lata cilíndrica de 5 cm de longitud y 30 cm de diámetro contiene un determinado producto a una temperatura uniforme de 15ºC, y se calienta mediante una corriente de aire a 160ºC.

$\alpha = 0{,}04\ m^2/hora$, $k = 4$ Kcal/h.m.ºC ; $h_{C(aire\text{-}lata)} = 20$ Kcal/h.m².ºC

Determinar

a) El tiempo necesario para que la temperatura de cualquier punto del producto sea, por lo menos, de 138ºC

b) La temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante

c) El calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento

---

RESOLUCIÓN

a) Tiempo necesario para que la temperatura del centro sea de 138ºC, ya que la de los demás puntos será superior

El diámetro del cilindro es bastante mayor que la altura, por lo que la transmisión de calor se realizará, principalmente, en sentido axial, y sería equivalente al de transmisión de calor por conducción en régimen transitorio en una placa de 5 cm de espesor y longitud infinita.

Condición de contorno a utilizar: $\left\{\begin{array}{l} h_C/k = 20/4 = 5 \Rightarrow \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C L/k = 20 \times 0{,}025/4 = 0{,}125 > 0{,}1 \Rightarrow \text{c.c. convección} \end{array}\right.$

$Bi^{-1} = 8$; $Fo = 16$

En el plano medio de la placa hay que conseguir una temperatura, T = 138ºC

De los gráficos de Heysler se obtiene la temperatura adimensional en el plano medio de la placa:

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{138 - 160}{15 - 160} = 0{,}1517$$

$$Fo = 16 = \frac{\alpha\ t}{L^2} \quad ; \quad t = \frac{16 \times 0{,}025^2\ m^2}{0{,}04\ (m^2/h)} = 0{,}25\ h = 15\ min$$

que es un valor bastante aproximado.

b) Temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante

b.1.- Conducción bidimensional

$$\text{Placa infinita} \Rightarrow Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{20 \times 0{,}025}{4} = 0{,}125 \Rightarrow Bi^{-1} = 8 \quad ; \quad \frac{h_{cF}}{k} = 5\ \frac{1}{m} \quad ; \quad Fo = 16$$

$$P(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}1517$$

$$P(L) = \frac{\Phi(L,t)}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_C}\ \frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left| \frac{\Phi}{\Phi_C} = \frac{T(L) - T_F}{T_C - T_F} = \{\frac{x}{L} = 1\} = 0{,}93 \right| = 0{,}93 \times 0{,}1517 = 0{,}1411$$

$$\text{Cilindro infinito} \Rightarrow Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{20 \times 0{,}15}{4} = 0{,}75 \ ; Bi^{-1} = 1{,}333 \ ; \ Fo = \frac{\alpha\ t}{R^2} = \frac{0{,}04\ m^2/h \times 0{,}25\ h}{0{,}15^2 m^2} = 0{,}444$$

$$C(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}58 \ \text{(eje)}$$

$$C(R) = \frac{\Phi(R,t)}{\Phi_0} = \frac{\Phi(R,t)}{\Phi_{eje}}\ \frac{\Phi_{eje}}{\Phi_0} = \left| \frac{F(\Phi,t)}{F_{eje}} = 0{,}62 \right| = 0{,}62 \times 0{,}58 = 0{,}3596$$

Temperatura en el centro de la base: $P(L)\ C(0) = 0{,}1411 \times 0{,}58 = 0{,}0818$

$$\frac{\Phi_x}{\Phi_0} = \frac{T_x - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}0818 \quad ; \quad T_x = T_F + 0{,}0818\ (T_0 - T_F) = 160 + 0{,}0818 \times (15 - 160) = \boxed{148{,}14ºC}$$

b.2.- Conducción unidimensional $\dfrac{\Phi(L,t)}{\Phi(0,t)} = \dfrac{T(L) - T_F}{T_C - T_F} = \dfrac{T(L) - 160}{138 - 160} = 0{,}93 \Rightarrow T(L) = 139{,}5°nC$

c) Calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento. Conducción bidimensional

$$Q_0 = V\ \rho\ c_{pF} \Delta T = V\ \frac{k}{\alpha}\ \Delta T = (\pi\ R^2 L)\ \frac{k}{\alpha}\ \Delta T = (\pi \times 0{,}15^2 \times 0{,}05)\ m^3\ \frac{4\ (Kcal/h\ mºC)}{0{,}04\ (m^2/h)}\ (160 - 15)ºC = 51{,}24\ Kcal$$

$$Q = \theta\ \rho\ c_p V\ (T_0 - T_F)$$

$$\text{Placa:} \begin{cases} Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}04\ (m^2/h)\ (36/60)}{0{,}025^2} = 38{,}4 \\ Bi^2 Fo = 0{,}125^2 \times 38{,}4 = 0{,}6 \ ; \ Bi = 0{,}125 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gröber}} \Phi_{placa} = \frac{Q_{placa}}{Q} = 0{,}97$$

$$\text{Cilindro:} \begin{cases} Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{0{,}04\ (m^2/h)\ (36/60)}{0{,}15^2} = 1{,}07 \ ; \ Bi = \dfrac{h_C R}{k} = \dfrac{20 \times 0{,}15}{4} = 0{,}75 \\ Bi^2 Fo = 0{,}75^2 \times 1{,}07 = 0{,}6 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gröber}} \Phi_{cilindro} = \frac{Q_{cilindro}}{Q} = 0{,}74$$

$$\theta = \Phi_{placa} + \Phi_{cilindro}\ (1 - \Phi_{placa}) = 0{,}97 + 0{,}74\ (1 - 0{,}97) = 0{,}992$$

$$Q = 0{,}992 \times Q_0 = 50{,}83\ Kcal$$

****

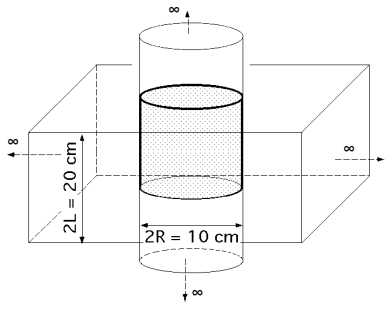
III.28.- Un cilindro de acero, k = 25 W/m°C, $\alpha = 1{,}11 \times 10^{-5}$ m²/seg, tiene 10 cm de diámetro y 20 cm de longitud, y se encuentra inicialmente a una temperatura de 850°C.
a) Tiempo que debe transcurrir para que el cilindro alcance una temperatura de 350°C en su centro de gravedad. Se le sumerge en agua a 20°C y sabiendo que el coeficiente de transmisión de calor por convección en cualquier punto del cilindro es de 1725 W/m²°C, determinar:

a) El tiempo que debe transcurrir para que el cilindro alcance una temperatura de 350°C en su centro de gravedad.

b) La temperatura que en ese instante se alcanzará en la circunferencia de sus bases.

c) La temperatura en el centro de la base
d) La temperatura en la mitad de la pared cilíndrica

RESOLUCIÓN



Distribución detemperaturas: $\dfrac{\Phi(x,r,t)}{\Phi_0} = P(x)\,C(r)$

Placa plana ∞ de espesor 20 cm: $Bi = \dfrac{h_{cF}L}{k} = \dfrac{1725 \times 0{,}1}{25} = 6{,}9$; $Bi^{-1} = 0{,}145$

Temperatura adimensional en el plano medio:

$$P(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{350 - 20}{850 - 20} = 0{,}3975$$

Entrando en la gráfica de Heysler para placa plana ∞ con $\begin{cases} P(0) = 0{,}3975 \\ Bi = 6{,}9 \end{cases}$ se obtiene un nº de Fo = 0,60, por lo que:

$$Fo = \frac{\alpha\, t}{L^2} = \frac{1{,}11.10^{-5}\, t}{0{,}1^2} = 1{,}11.10^{-3}\, t = 0{,}60 \quad \Rightarrow \quad t = 552 \text{ seg}$$

Cilindro infinito de radio 5 cm $\Rightarrow$ $Bi = \dfrac{h_{cF}R}{k} = \dfrac{1725 \times 0{,}05}{25} = 3{,}45$; $Bi^{-1} = 0{,}29$

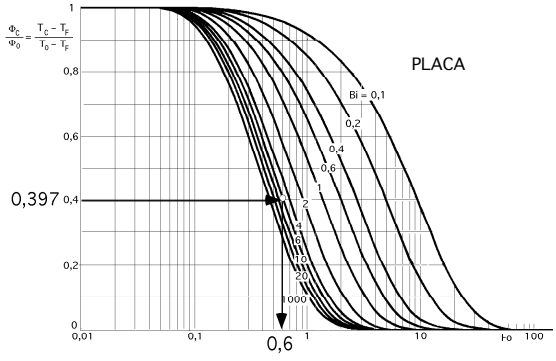
La temperatura adimensional en el eje del cilindro es la misma que en el centro de la placa = C(0) = 0,3975

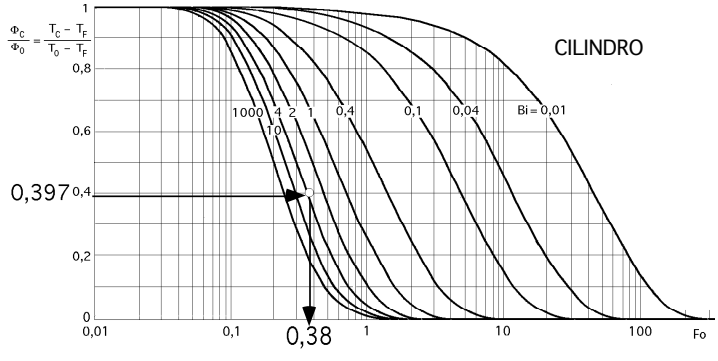
Entrando en la segunda gráfica de Heysler para cilindro infinito con $\begin{cases} C(0) = 0{,}3975 \\ Bi = 3{,}45 \end{cases}$ se obtiene un nº de Fo = 0,38, por lo que:

$$Fo = \frac{\alpha\, t}{R^2} = \frac{1{,}11.10^{-5}\, t}{0{,}05^2} = 0{,}38 \quad \Rightarrow \quad t = 85{,}5 \text{ seg}$$

que es el mínimo de los dos tiempos, y que nos da una referencia para iterar

En lo que sigue, mantendremos los resultados obtenidos en las Tablas





Para t = 80 segundos $\Rightarrow$

Placa ∞: $Bi^{-1} = 0{,}145$; $Fo = \dfrac{\alpha\, t}{L^2} = \dfrac{1{,}11.10^{-5} \times 80}{0{,}1^2} = 0{,}088$ $\Rightarrow$ $\dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = P(0) = 0{,}98$

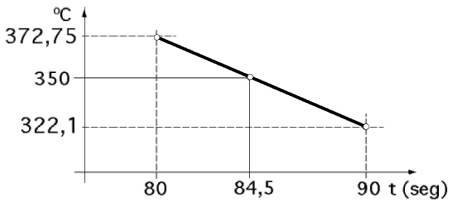
Cilindro ∞: $Bi^{-1} = 0{,}29$; $Fo = \dfrac{\alpha\, t}{R^2} = \dfrac{1{,}11.10^{-5} \times 80}{0{,}05^2} = 0{,}35$ $\Rightarrow$ $\dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = C(0) = 0{,}4336$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}98 \times 0{,}4336 = 0{,}425 \quad ; \quad T_C = 20 + (850 - 20) \times 0{,}425 = 372{,}75^{\circ}C$$

Para t = 90 segundos $\Rightarrow$

Placa ∞: $Bi^{-1} = 0{,}145$; $Fo = \dfrac{\alpha\, t}{L^2} = \dfrac{1{,}11.10^{-5} \times 90}{0{,}1^2} = 0{,}099$ $\Rightarrow$ $\dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = P(0) = 0{,}974$

Cilindro ∞: $Bi^{-1} = 0{,}29$; $Fo = \dfrac{\alpha\, t}{R^2} = \dfrac{1{,}11.10^{-5} \times 90}{0{,}05^2} = 0{,}4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = C(0) = 0{,}373$



$\dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}974 \times 0{,}373 = 0{,}364$; $T_C = 20 + (850 - 20) \times 0{,}364 = 322{,}12ºC$

Para alcanzar la temperatura de 350ºC en el (c.d.g.) del cilindro, son necesarios, aproximadamente, 84,5º segundos.

b) Temperatura que en ese instante se alcanza en la circunferencia de sus bases.

$$P(L) = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_C}\,\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = P(0) = 0{,}3975 \\ \dfrac{\Phi}{\Phi_C} = (\xi = 1) = 0{,}22 \end{array} \right| = 0{,}22 \times 0{,}3975 = 0{,}087$$

$$C(R) = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_C}\,\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = C(0) = 0{,}3975 \\ \dfrac{\Phi}{\Phi_C} = (\xi = 1) = 0{,}34 \end{array} \right| = 0{,}34 \times 0{,}3975 = 0{,}1351$$

$$\frac{\Phi_{circ.\ bases}}{\Phi_0} = \frac{T_{circ.\ bases} - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_{circ.\ bases} - 20}{850 - 20} = P(L)\,C(R) = 0{,}087 \times 0{,}1312 = 0{,}01147 \Rightarrow T_{circ.\ bases} = 29{,}5ºC$$

c) Temperatura en el centro de la base

$$\frac{\Phi_{centro\ base}}{\Phi_0} = \frac{T_{centro\ base} - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_{centro\ base} - 20}{850 - 20} = P(L)\,C(0) = 0{,}087 \times 0{,}3975 = 0{,}03458 \Rightarrow T_{centro\ base} = 48{,}7ºC$$

d) Temperatura en la mitad de la pared cilíndrica

$$\frac{\Phi(0,R;\,t)}{\Phi_0} = \frac{T(0,R;\,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T(0,R;\,t) - 20}{850 - 20} = P(0)\,C(R) = 0{,}3975 \times 0{,}1351 = 0{,}0537 \Rightarrow T(0,R;\,t) = 64{,}6ºC$$

****

III.29.-Se desea hacer un tratamiento térmico de unas bolas de acero al niquel-cromo 15%Cr, 10%Ni, y para ello se calientan a una temperatura de 875°C. A continuación se templan en aceite que se encuentra a la temperatura de 120°C, sometiéndolas a un movimiento de agitación que se puede considerar dotado de una velocidad media u =1 m/seg. Las bolas tienen un diámetro d =3 cm.Con estos datos, determinar:

a) El coeficiente de transferencia de calor por convección entre las bolas y el aceite cuando T_{pF} = 200ºC

b) El tiempo necesario para que las bolas alcancen en su superficie la temperatura de 200 °C

c) La cantidad de calor eliminada, en cada bola, en el intervalo de tiempo del apartado anterior.

RESOLUCIÓN

---

a) Coeficiente de transferencia de calor por convección entre las bolas y el aceite

Flujo en convección forzada sobre esferas

$$Nu = 2 + (0{,}4\sqrt{Re} + 0{,}06\,Re^{2/3})\,Pr^{0{,}4}\,\sqrt[4]{\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}} \quad \text{en el intervalo:} \quad \begin{cases} 3{,}5 < Re < 80000\ ;\ 0{,}7 < Pr < 380 \\ 1 < \dfrac{\eta_F}{\eta_{pF}} < 3{,}2\ \text{(Parámetros a } T_F\text{)} \end{cases}$$

Propiedades del aceite de motor sin usar a 120ºC:

$c_p = 2307\ \frac{J}{kg^oC}$; $k = 0{,}135\ \frac{W}{m^oK}$; $\alpha = 7{,}1.10^{-8}\ \frac{m^2}{seg}$; $\nu = 12{,}4.10^{-6}\ \frac{m^2}{seg}$; $\eta = 10{,}3.10^{-3}\ \frac{Nseg}{m^2}$; $Pr = 175$

La temperatura de referencia, para hallar η_{pF} será la media de la pared durante el tratamiento: $\frac{875 + 20}{2} = 537^oC$

Tomaremos μ_{pF} a la máxima temperatura disponible: $4{,}5.10^{-3}$ (N.seg/m^2)

Acero a 20ºC y composición (15% Cr ; 10% Ni): $\begin{cases} k = 19\ w/m^oC\ ;\ \rho = 7865\ kg/m^3 \\ c_p = 460\ J/kg^oC\ ;\ \alpha = 0{,}526.10^{-6}\ m^2/seg \end{cases}$

$$Re = \frac{d\,u}{\nu} = \frac{0{,}03\ m \times 1\ m/seg}{12{,}4.10^{-6} m^2/seg} = 2500$$

$$Nu = 2 + (0{,}4\ \sqrt{Re} + 0{,}06\ Re^{2/3})\ Pr^{0{,}4} \sqrt[4]{\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}} = 2 + (0{,}4\ \sqrt{2500} + 0{,}006 \times 2500^{0{,}66})\ 175^{0{,}4} \sqrt[4]{\frac{10{,}3}{4{,}5}} = 298$$

$$h_{cF} = \frac{k\,Nu}{d} = \frac{0{,}135 \times 298}{0{,}03} = 1340\ \frac{W}{m^2\,^oC}$$

b) Tiempo necesario para que las bolas alcancen en su superficie la temperatura de 200 °C

Cuando las bolas alcanzan en la superficie la temperatura de 200ºC, la temperatura en el centro es:

$$\frac{T - T_F}{T_C - T_F} = \frac{200 - 120}{T_C - 120} = \left| \begin{array}{l} Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{1340\ (0{,}03/2)}{19} = 1{,}0579 \\ Bi^{-1} = 0{,}945\ ;\ (r/R) = 1 \end{array} \right| = 0{,}63 \xrightarrow{\text{Heysler}} T_C = 247nC$$

y el tiempo necesario para lograrlo:

$$Fo = \frac{\alpha\,t}{R^2} = \frac{0{,}526.10^{-5}\ t}{0{,}015^2} = 0{,}0233\ t = \left\{ \begin{array}{l} \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{247 - 120}{875 - 120} = 0{,}1682 \\ Bi^{-1} = 0{,}945 \end{array} \right\} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{0{,}8}{0{,}0233} = 34{,}4\ seg$$

c) Calor eliminado en cada bola en el intervalo de tiempo del apartado anterior.

$$Q_0 = \frac{4}{3}\,\pi R^3 \rho\ c_p\,(T_0 - T_F) = \frac{4\,\pi}{3}\,(\frac{0{,}03}{2})^3 m^3 \times 7865\ \frac{kg}{m^3} \times 0{,}46\ \frac{kJ}{kg^oC}\ (875 - 120)^oC = 38{,}61\ kJ$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \left| \begin{array}{l} Bi^2 Fo = 0{,}8954 \\ Bi = 1{,}058 \end{array} \right| = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad Q = 0{,}90\ Q_0 = 0{,}90 \times 38{,}61\ kJ = 34{,}75\ kJ$$

****

III.30.- Un cilindro de acero de k = 25 Kcal/h.m.ºC, y difusividad térmica α = 0,05 m^2/hora, tiene 50 mm de diámetro y 65 mm de longitud, y está inicialmente a una temperatura de 650ºC. A continuación se enfría en un fluido que se encuentra a 90ºC con un coeficiente de película h_{cF} = 150 Kcal/hm^{2}ºC.

Determinar

a) La temperatura en el centro del cilindro y en la circunferencia de las bases al cabo de 2 minutos

b) El tiempo necesario para que en el centro del cilindro se alcancen 100ºC.

RESOLUCIÓN

El valor de $h_{cF}/k = 150/25 = 6$ fi condición de contorno de convección

a) Temperatura en el centro del cilindro al cabo de 2 minutos

$$\text{Cilindro } \infty: \left\{ \begin{array}{l} Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{150 \times 0{,}025}{25} = 0{,}15\ ;\ Bi^{-1} = 6{,}67 \\ Fo = \frac{\alpha\,t}{R^2} = \frac{0{,}05\ (m^2/h) \times 120\ seg \times (1\ h/3600\ seg)}{0{,}025^2\ m^2} = 2{,}67 \end{array} \right. \Rightarrow \quad C(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}43$$

$$\text{Placa} \infty : \begin{cases} Bi = \dfrac{h_{cF} L}{k} = \dfrac{150\ (0{,}065/2)}{25} = 0{,}195 \ \ ; \ \ Bi^{-1} = 5{,}128 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}05\ (m^2/h)\ x\ 120\ seg\ x\ (1\ h/3600\ seg)}{(0{,}065/2)\ m^2} = 1{,}58 \end{cases} \Rightarrow \quad P(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}75$$

$$\frac{T_{Centro\ cilindro} - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}43\ x\ 0{,}75 = 0{,}3225 \ \ ; \ \ T_C = 90 + \left(650 - 90\right)\ x\ 0{,}3225 = 270{,}6ºC$$

Temperatura en la circunferencia de las bases al cabo de 2 minutos

$$\text{Cilindro} \infty \begin{cases} Bi^{-1} = 6{,}67 \\ r/R = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\Phi(R,t)}{\Phi(0,t)} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}94$$

$$C(R) = \frac{\Phi(R,t)}{\Phi_0} = \frac{\Phi(R,t)}{\Phi(0,t)}\ \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = 0{,}94\ x\ 0{,}43 = 0{,}4042$$

$$\text{Placa} \infty \begin{cases} Bi^{-1} = 5{,}128 \\ x/L = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\Phi(L,t)}{\Phi(0,t)} = \frac{T_L - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}90$$

$$P(L) = \frac{\Phi(L,t)}{\Phi_0} = \frac{\Phi(L,t)}{\Phi(0,t)}\ \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = 0{,}90\ x\ 0{,}75 = 0{,}675$$

$$\frac{\Phi_{mín}}{\Phi_0} = \frac{T_{circ.bases} - T_F}{T_0 - T_F} = P(L)\ C(R) = 0{,}675\ x\ 0{,}4042 = 0{,}2728$$

$$T_{circunf.\ bases} = 90 + 0{,}2728\ x\ (650 - 90) = 242{,}77ºC$$

b) Tiempo necesario para que en el centro del cilindro se alcancen 100ºC. Hay que iterar

1ª iteración: Supongamos que esta temperatura se alcanza al cabo de 6 minutos = 360 seg

$$\text{Cilindro} \infty \begin{cases} Bi^{-1} = 6{,}67 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{0{,}05(m^2/h)\ x\ 360\ seg\ x\ (1\ h/3600\ seg)}{0{,}025^2\ m^2} = 8 \end{cases} \Rightarrow \quad C(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}09$$

$$\text{Placa} \infty \begin{cases} Bi^{-1} = 5{,}128 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}05(m^2/h)\ x\ 360\ seg\ x\ (1\ h/3600\ seg)}{(0{,}065/2)^2\ m^2} = 4{,}73 \end{cases} \Rightarrow \quad P(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}44$$

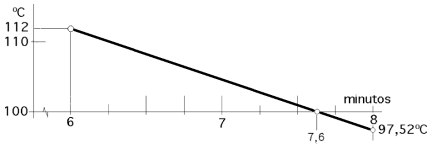
$$\frac{T_{C2} - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}09\ x\ 0{,}44 = 0{,}0396 \ \ ; \ \ T_{C2} = 90 + (650 - 90)\ x\ 0{,}0396 = 112{,}18ºC$$

2ª iteración: Supongamos que esta temperatura se alcanza al cabo de 8 minutos = 480 seg

$$\text{Cilindro} \infty \begin{cases} Bi^{-1} = 6{,}67 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{0{,}05(m^2/h)\ x\ 480\ seg\ x\ (1\ h/3600\ seg)}{0{,}025^2\ m^2} = 10{,}67 \end{cases} \Rightarrow \quad C(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}042$$

$$\text{Placa} \infty \begin{cases} Bi^{-1} = 5{,}128 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}05(m^2/h)\ x\ 480\ seg\ x\ (1\ h/3600\ seg)}{(0{,}065/2)^2\ m^2} = 6{,}31 \end{cases} \Rightarrow \quad P(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}32$$

$$\frac{T_{C3} - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}042\ x\ 0{,}32 = 0{,}01344 \ \ ; \ \ T_{C3} = 90 + (650 - 90)\ x\ 0{,}01344 = 97{,}52ºC$$



Representando estos valores, se obtiene un tiempo próximo a los 7,6 minutos

Mediante programa informático sale: t = 463,7 seg = 7,7 minutos

****

III.31.- Una lata cilíndrica de 5 cm de longitud y 30 cm de diámetro contiene un determinado producto a una temperatura uniforme de 15ºC, y se calienta mediante una corriente de aire a 160ºC.

Sabiendo que: $\alpha = 0{,}04\ (m^2 / hora)$; $k = 4\ (Kcal / hm^oC)$; $h_{C(aire\text{-}lata)} = 20\ (Kcal / hm^{2\,o}C)$, *determinar:*

a) El tiempo necesario para que la temperatura de cualquier punto del producto sea como mínimo de 138ºC

b) La temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante

c) El calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento

---

RESOLUCIÓN

El que la temperatura mínima sea de 138ºC implica que sea el c.d.g. quien la tiene que alcanzar, por cuanto los demás puntos del cilindro estarán a una temperatura mayor.

a) Tiempo necesario para que la temperatura de cualquier punto del producto sea como mínimo de 138ºC

Por ser el diámetro del cilindro muy superior a la altura, la transmisión de calor se puede interpretar se realiza principalmente en sentido axial, por lo que sería equivalente al de transmisión de calor por conducción en régimen transitorio en una placa infinita de 5 cm de espesor.

FLUJO UNIDIMENSIONAL

Condición de contorno a utilizar: $\left\{ \begin{array}{l} h_C / k = 20/4 = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{c.c. convección} \\ Bi = h_C L/k = 20 \times 0{,}025/4 = 0{,}125 > 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \text{c.c. convección} \end{array} \right.$

La temperatura de 138ºC se consigue en el plano medio de la placa.

PLACA.- Haciendo uso de la 2ª gráfica de Heysler se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Temp. adimensional en el plano medio de la placa: } \dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = \dfrac{138 - 160}{15 - 160} = 0{,}1517 \\ Bi^{-1} = 8 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad Fo = 16 = \frac{\alpha\ t}{L^2}$$

Tiempo que se tarda en alcanzar la temperatura de 138ºC: $t = \dfrac{16\ L^2}{\alpha} = \dfrac{16 \times 0{,}025^2\ m^2}{0{,}04\ m^2/hora} = 0{,}25$ horas $= 15$ minutos

b) Temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_C - T_F} = \frac{T(x,t) - 160}{138 - 160} = 0{,}93 \quad ; \quad T(x,t) = 160 + 0{,}93\ (138 - 160) = 139{,}5ºC$$

c) Calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento

$$Q_0 = m\ c_p\ \Delta T = V\ \rho\ c_p\ \Delta T = \left| \rho\ c_p = \frac{k}{\alpha} \right| = V\ \frac{k}{\alpha}\ \Delta T = (\pi\ R^2\ L)\ \frac{k}{\alpha}\ \Delta T =$$

$$= (\pi \times 0{,}15^2 \times 0{,}05)\ m^3\ \frac{4\ (Kcal/h\ mºC)}{0{,}04\ (m^2/hora)}\ (160 - 15)\ ºC = 51{,}24\ Kcal$$

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{L^2} = \frac{0{,}04\ (m^2/h) \times (36/60)\ h}{0{,}025^2\ m^2} = 38{,}4 \quad ; \quad Bi^2 Fo = 0{,}125^2 \times 38{,}4 = 0{,}6$$

y entrando en la gráfica de Gröber se obtiene: $\dfrac{Q(t)}{Q_0} = 0{,}98$; $Q = 0{,}98 \times 51{,}24\ Kcal = 50{,}21\ Kcal$

FLUJO BIDIMENSIONAL

En la intersección de un cilindro infinito y una placa infinita; la temperatura en el centro de la base de la lata se obtiene tomando como referencia el tiempo obtenido en el apartado (a), t = 0,25 horas:

$$\text{Cilindro(0,25h):} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Bi = 0{,}75 \ ; \ Bi^{-1} = 1{,}333 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{0{,}04\ (m^2/h) \times 0{,}25\ h}{0{,}15^2\ m^2} = 0{,}447 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad C(0) = \frac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}70 \\ C(R) = \dfrac{\Phi_R}{\Phi_0} = \dfrac{\Phi_R}{\Phi_C}\ \dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left\{ \dfrac{\Phi_R}{\Phi_C} = (\xi = 1) = 0{,}71 \right\} = 0{,}71 \times 0{,}7 = 0{,}497 \end{array} \right.$$

$$\text{Placa (0,25h):} \begin{cases} \begin{cases} Bi = 0{,}125 \;;\; Bi^{-1} = 8 \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{L^2} = \dfrac{0{,}04\ (m^2/h) \times 0{,}25\ h}{0{,}025^2\ m^2} = 16 \end{cases} \Rightarrow P(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}15 \\ P(L) = \dfrac{\Phi_L}{\Phi_0} = \dfrac{\Phi_L}{\Phi_C}\,\dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left\{ \dfrac{\Phi_L}{\Phi_C} = (\xi = 1) = 0{,}94 \right\} = 0{,}94 \times 0{,}15 = 0{,}141 \end{cases}$$

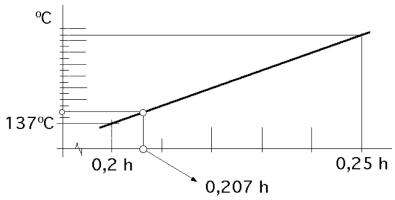
Temperatura en el c.d.g. al cabo de 0,25 h :

$T_{c.d.g} = 160 + (15 - 160)\, P(0)\, C(0) = 160 - (145 \times 0{,}15 \times 0{,}70) = 144{,}78ºC$

En una segunda aproximación lo haremos con un tiempo t = 0,2 horas

$$\text{Cilindro(0,2 h):} \begin{cases} \begin{cases} Bi = 0{,}75 \;;\; Bi^{-1} = 1{,}333 \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{R^2} = \dfrac{0{,}04\ (m^2/h) \times 0{,}2\ h}{0{,}15^2\ m^2} = 0{,}355 \end{cases} \Rightarrow C(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}79 \\ C(R) = \dfrac{\Phi_R}{\Phi_0} = \dfrac{\Phi_R}{\Phi_C}\,\dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left\{ \dfrac{\Phi_R}{\Phi_C} = (\xi = 1) = 0{,}71 \right\} = 0{,}71 \times 0{,}79 = 0{,}56 \end{cases}$$

$$\text{Placa (0,2 h):} \begin{cases} \begin{cases} Bi = 0{,}125 \;;\; Bi^{-1} = 8 \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{L^2} = \dfrac{0{,}04\ (m^2/h) \times 0{,}2\ h}{0{,}025^2\ m^2} = 12{,}8 \end{cases} \Rightarrow P(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}20 \\ P(L) = \dfrac{\Phi_L}{\Phi_0} = \dfrac{\Phi_L}{\Phi_C}\,\dfrac{\Phi_C}{\Phi_0} = \left\{ \dfrac{\Phi_L}{\Phi_C} = (\xi = 1) = 0{,}94 \right\} = 0{,}94 \times 0{,}2 = 0{,}188 \end{cases}$$



Temperatura en el c.d.g. al cabo de 0,2 h :

$T_{c.d.g} = 160 + (15 - 160)\, P(0)\, C(0) = 160 - (145 \times 0{,}2 \times 0{,}79) = 137{,}09ºC$

ligeramente por debajo de la que pide el problema (138ºC). La solución es del orden de 0,207 h

Temperatura en el centro de la base:

$T_{centro\ base} = 160 + (15 - 160)\, P(L)\, C(0) = 160 - (145 \times 0{,}188 \times 0{,}79) = 138{,}46ºC$

que difiere de los 139,5ºC obtenidos como problema unidimensional en 1ºC aproximadamente.
La aproximación unidimensional es bastante buena

****

III.32.- Se dispone de una serie de botes de conserva de diámetro d = 12 cm y longitud L = 10 cm, que inicialmente están a una temperatura de 20°C; en un momento determinado se sumerge uno de ellos en un líquido caliente a 100°C. El coeficiente de película es de 200 W/m²°C. La difusividad térmica del bote y su contenido es de 0,03 m²/hora y su conductividad térmica de 9 W/m°C.

Determinar

a) El tiempo en minutos que deberá tenerse el bote en el líquido caliente con el fin de garantizar que toda su masa se encuentre por encima de 76°C

b) La temperatura mínima que se registrará en el bote al mantenerlo sumergido 10 minutos. ¿En donde se tendrá la temperatura máxima y valor de ésta?

c) Si ahora se introducen los botes en el líquido caliente en grupos de 20, perfectamente alineados, conformando un cilindro de 12 cm de diámetro y 2 metros de longitud, hallar los supuestos pedidos en el apartado (b).

RESOLUCIÓN.- Vamos a determinar el tiempo en minutos que se deberá tener el bote en el líquido caliente con el fin de garantizar que toda su masa se encuentre por encima de 80°C; para ello calcularemos el tiempo que se tardará en alcanzar el centro del cilindro, como cilindro infinito y como placa infinita; el menor de los resultados nos orientará sobre la magnitud de este tiempo.

a) Tiempo en minutos que deberá tenerse el bote en el líquido caliente con el fin de garantizar que toda su masa se encuentre por encima de 80°C.- No se conoce el líquido, pero la relación $h_{cF}/k = 200/9 = 22$, nos indica que la condición de contorno es de convección

$$\text{Cilindro} \infty \begin{cases} Bi = \dfrac{h_{cF} R}{k} = \dfrac{200\ (W/m^2\ °C)\ 0{,}06\ m}{9\ (W/m°C)} = 1{,}333 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0{,}75 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{0{,}03\ (m^2/h)\ t\ (h)}{0{,}06^2\ m^2} = 8{,}333\ t\ (horas) = 0{,}1389\ t\ (min) \end{cases}$$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \left| \begin{array}{l} T_F = 100ºC \ ; \ T_0 = 20ºC \quad ; \quad T(0,t) = 76ºC \end{array} \right| = \frac{76 - 100}{20 - 100} = 0{,}3$$

La temperatura en el centro es T(0,t), y como toda la masa tiene que estar por encima de esta temperatura, el centro tendrá la mínima temperatura = 76ºC

Con estos resultados entramos en el diagrama de Heysler y encontramos Fo = 0,6, por lo que:

$$Fo = 0{,}6 = 0{,}1389\ t \ \Rightarrow \ t = 4{,}32 \text{ minutos}$$

$$\text{Placa} \infty \begin{cases} Bi = \dfrac{h_{cF} L}{k} = \dfrac{200\ (W/m^2\ ºC)\ 0{,}05\ m}{9\ (W/mºC)} = 1{,}111 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0{,}9 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}03\ (m^2/h)\ t\ (h)}{0{,}05^2\ m^2} = 12\ t\ (horas) = 0{,}2\ t\ (min) \end{cases}$$

en la que se ha considerado un espesor de placa igual a la altura del cilindro = $2\,L = 10$ cm $\Rightarrow$ $L = 0{,}05$ m

Con estos resultados entramos en el diagrama de Heysler y encontramos que Fo = 1,55, por lo que:

$$Fo = 1{,}55 = 0{,}2\ t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 7{,}75 \text{ minutos}}$$

y la referencia es (t = 4,32 minutos = 272 seg).

A partir de esta referencia vamos a determinar la temperatura en el centro para diversos tiempos y a partir de su representación gráfica, y para una temperatura en el centro de 76ºC, hallar la solución:

$$\text{Para t = 200 seg:} \begin{cases} \text{Placa} \infty \ \Rightarrow \ Bi^{-1} = 0{,}9 \ ; \ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}03\ (m^2/h)\ (200/3600)\ (h/seg)}{0{,}05^2\ m^2} = 0{,}67 \ \Rightarrow \ \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}66 \\ \text{Cilindro} \infty \ \Rightarrow \ Bi^{-1} = 0{,}75 \ ; \ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{0{,}03\ (m^2/h)\ (200/3600)\ (h/seg)}{0{,}06^2\ m^2} = 0{,}463 \ \Rightarrow \ \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}51 \end{cases}$$

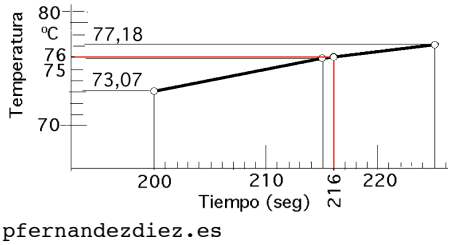
$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}66 \times 0{,}51 = 0{,}3366 \quad \Rightarrow \quad T_C = 100 + 0{,}3366\ (20 - 100) = 73{,}07ºC$$

$$\text{Para t = 225 seg:} \begin{cases} \text{Placa} \infty \ \Rightarrow \ Bi^{-1} = 0{,}9 \ ; \ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}03\ (m^2/h)\ (225/3600)\ (h/seg)}{0{,}05^2\ m^2} = 0{,}75 \ \Rightarrow \ \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}62 \\ \text{Cilindro} \infty \ \Rightarrow \ Bi^{-1} = 0{,}75 \ ; \ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{0{,}03\ (m^2/h)\ (225/3600)\ (h/seg)}{0{,}06^2\ m^2} = 0{,}52 \ \Rightarrow \ \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}46 \end{cases}$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}62 \times 0{,}46 = 0{,}285 \quad \Rightarrow \quad T_C = 100 + 0{,}285\ (20 - 100) = 77{,}18ºC$$

$$\text{Para t = 215 seg:} \begin{cases} \text{Placa} \infty \ \Rightarrow \ Bi^{-1} = 0{,}9 \ ; \ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{L^2} = \dfrac{0{,}03\ (m^2/h)\ (215/3600)\ (h/seg)}{0{,}05^2\ m^2} = 0{,}7167 \ \Rightarrow \ \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}64 \\ \text{Cilindro} \infty \ \Rightarrow \ Bi^{-1} = 0{,}75 \ ; \ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{0{,}03\ (m^2/h)\ (215/3600)\ (h/seg)}{0{,}06^2\ m^2} = 0{,}498 \ \Rightarrow \ \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}47 \end{cases}$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}64 \times 0{,}47 = 0{,}3008 \ ; \ T_C = 100 + 0{,}3008\ (20 - 100) = 75{,}93ºC$$



Haciendo la representación gráfica de los resultados obtenidos se encuentra que el tiempo que debe tenerse el bote en agua para que toda su masa se encuentre por encima de 76ºC es de 216 segundos

b) Temperatura mínima que se registrará en el bote al mantenerlo sumergido 2 y 10 minutos, respectivamente. ¿En donde se tendrá la temperatura máxima y valor de ésta?

La temperatura mínima se presenta en el centro del cilindro, mientras que la máxima se presenta en los bordes

$$\text{Placa} \propto \begin{cases} Bi^{-1} = 0{,}9 \\ Fo = 0{,}2\ t = 0{,}2 \times 2 = 0{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}82 \\ P(L) = \dfrac{\Phi(L,t)}{\Phi_0} = \left| \dfrac{x}{L} = 1 \right| = \dfrac{\Phi(L,t)}{\Phi(0,t)} \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = 0{,}515 \end{cases}$$

$$\text{Cilindro} \propto \begin{cases} Bi^{-1} = 0{,}75 \\ Fo = 0{,}1389 \times 2 = 0{,}2778 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}73 \\ C(R) = \dfrac{\Phi(R,t)}{\Phi_0} = \left| \dfrac{r}{R} = 1 \right| = \dfrac{\Phi(R,t)}{\Phi(0,t)} \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = 0{,}4162 \end{cases}$$

Temperatura mínima y máxima del cilindro al cabo de 2 minutos:

$$\text{EJE: } \frac{\Phi_{mínima}}{\Phi_0} = P(0)\,C(0) = 0{,}82 \times 0{,}73 = 0{,}5986 \quad \Rightarrow \quad T_{mín} = 100 + 0{,}5986\,(20 - 100) = 52{,}11ºC$$

$$\text{PERIFERIA: } \frac{\Phi_{máxima}}{\Phi_0} = P(L)\,C(R) = 0{,}515 \times 0{,}4162 = 0{,}2143 \quad \Rightarrow \quad T_{máx} = 100 + 0{,}2143\,(20 - 100) = 82{,}85ºC$$

Para t = 10 minutos

$$\text{Placa} \propto \begin{cases} Bi^{-1} = 0{,}9 \\ Fo = 0{,}2\ t = 0{,}2 \times 10 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}23 \\ P(L) = \dfrac{\Phi(L,t)}{\Phi_0} = \left| \dfrac{x}{L} = 1 \right| = \dfrac{\Phi(L,t)}{\Phi(0,t)} \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = 0{,}64 \times 0{,}23 = 0{,}1432 \end{cases}$$

$$\text{Cilindro} \propto \begin{cases} Bi^{-1} = 0{,}75 \\ Fo = 0{,}1389 \times 10 = 1{,}389 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}084 \\ C(R) = \dfrac{\Phi(R,t)}{\Phi_0} = \left| \dfrac{r}{R} = 1 \right| = \dfrac{\Phi(R,t)}{\Phi(0,t)} \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = 0{,}047 \end{cases}$$

Temperaturas mínima y máxima del cilindro al cabo de 10 minutos:

$$\frac{\Phi_{mínima}}{\Phi_0} = P(0)\,C(0) = 0{,}23 \times 0{,}084 = 0{,}01932 \quad \Rightarrow \quad T_{mín} = 100 + 0{,}1932\,(20 - 100) = 98{,}45ºC$$

$$\frac{\Phi_{máxima}}{\Phi_0} = P(L)\,C(R) = 0{,}1432 \times 0{,}047 = 0{,}006739 \quad \Rightarrow \quad T_{máx} = 100 + 0{,}006739\,(20 - 100) = 99{,}46ºC$$

c) Los botes se introducen en el líquido caliente en grupos de 20, perfectamente alineados, conformando un cilindro de 12 cm de diámetro y 2 metros de longitud; los supuestos pedidos en el apartado (b) se calculan como sigue:

El conjunto de los botes se puede considerar como un cilindro infinito al ser la longitud mucho mayor que el diámetro. La temperatura mínima se presenta en el eje del cilindro, mientras que la máxima se presenta en la periferia. Los datos de partida se pueden tomar del apartado (b) para el cilindro infinito.

Para t = 2 minutos

$$\text{Cilindro} \propto \begin{cases} Bi^{-1} = 0{,}75 \\ Fo = 0{,}1389 \times 2 = 0{,}2778 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}73 \\ C(R) = \dfrac{\Phi(R,t)}{\Phi_0} = \left| \dfrac{r}{R} = 1 \right| = \dfrac{\Phi(R,t)}{\Phi(0,t)} \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = 0{,}4162 \end{cases}$$

Temperatura mínima (en el eje) y máxima (en la periferia) del cilindro infinito al cabo de 2 minutos:

$$\frac{\Phi_{mínima}}{\Phi_0} = \frac{T_{eje} - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}73 \quad \Rightarrow \quad T_{eje} = 100 + 0{,}73\,(20 - 100) = 41{,}6ºC$$

$$\frac{\Phi_{máxima}}{\Phi_0} = \frac{T_R - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}4162 \quad \Rightarrow \quad T_{máx} = 100 + 0{,}4162\ (20 - 100) = 66{,}7ºC$$

Para t = 10 minutos

$$\text{Cilindro} \propto \begin{cases} Bi^{-1} = 0{,}75 \\ Fo = 0{,}1389 \times 10 = 1{,}389 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(0) = \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}084 \\ C(R) = \dfrac{\Phi(R,t)}{\Phi_0} = \left| \dfrac{r}{R} = 1 \right| = \dfrac{\Phi(R,t)}{\Phi(0,t)}\ \dfrac{\Phi(0,t)}{\Phi_0} = 0{,}047 \end{cases}$$

Temperatura mínima (eje) y máxima (periferia) del cilindro infinito al cabo de 10 minutos:

$$\frac{\Phi_{mínima}}{\Phi_0} = \frac{T_{eje} - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}084 \quad \Rightarrow \quad T_{eje} = 100 + 0{,}084\ (20 - 100) = 93{,}3ºC$$

$$\frac{\Phi_{máxima}}{\Phi_0} = \frac{T_R - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}047 \quad \Rightarrow \quad T_{máx} = 100 + 0{,}047\ (20 - 100) = 96{,}25ºC$$

****

III.33.- Una esfera de hierro, maciza, de 10 cm de diámetro, que inicialmente se encuentra a 780ºC, se enfría en aire en reposo a 20ºC, hasta que en el centro de la esfera se consigue una temperatura de 300ºC; en el instante en que se alcanza esa temperatura en el centro de la esfera, ésta se introduce en un baño de agua en movimiento, a la temperatura de 20ºC, de forma que el coeficiente de película es, h_{cF} = 1950 W/m².ºK. Propiedades físicas de la esfera, k = 40 W/mºC ; c_p = 460 Joules/kgºC ; ρ = 7850 kg/m³

Determinar

a) El tiempo (en minutos) que debe transcurrir para que en el enfriamiento en el aire seco a 20ºC se alcancen en el centro de la esfera 300ºC

b) La temperatura en el centro de la esfera, a una distancia radial de 2,5 cm y en la periferia, al cabo de 2 minutos de ser introducida la esfera en el agua. ¿Qué temperatura en el centro de la esfera se tendrá a los 5 minutos?

c) El calor evacuado al medio exterior en todo el proceso.

RESOLUCIÓN

a) El tiempo que debe transcurrir para que en el enfriamiento en el aire en reposo a 200ºC se alcancen en el centro de la esfera 300ºC

Convección natural en esferas: $Nu_d = 2 + 0{,}45\ (Gr_d Pr)^{0,25}$

Propiedades del aire a la temperatura media de película salvo el de β que lo es a la del aire:

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{780 + 20}{2} = 400ºC = 673ºK \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}051\ \frac{W}{mºC} \quad ; \quad Pr = 0{,}68 \quad ; \quad \frac{g\,\beta}{\nu^2} = \frac{9{,}8\ (1/293)}{(62{,}38.10^{-6})^2} = 8{,}595.10^6$$

$$Gr_d = \frac{g\,\beta}{\nu^2}\ \Delta T\ d^3 = \left| \begin{array}{l} \Delta T = 780 - 20 = 760ºC \\ d = 0{,}1\ m \end{array} \right| = 8{,}595.10^6 \times 760 \times 0{,}1^3 = 6{,}53.10^6 \quad \text{(laminar)}$$

$$Gr_d Pr = 6{,}53.10^6 \times 0{,}68 = 4{,}44.10^6$$

$$Nu_d = 2 + 0{,}45\ \sqrt[4]{Gr_d\ Pr} = 2 + 0{,}45\ \sqrt[4]{4{,}44.10^6} = 22{,}65$$

$$h_{cF(aire)} = \frac{22{,}65 \times 0{,}051 (W/mºC)}{0{,}1\ m} = 11{,}56\ \frac{W}{m^2\ ºC}$$

Al ser un enfriamiento en aire, es previsible una condición de contorno con resistencia térmica interna despreciable, por lo que Bi<< 0,1. En efecto:

$$Bi = \frac{h_{cF}\ (R/3)}{k} = \frac{11{,}56\ (W/m^2\ ºC)\ (0{,}05/3)\ m}{40\ (W/mºC)} = 0{,}00481 < 0{,}1$$

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{(R/3)^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho\ c_{pF}} = \frac{40\ (W/mºC)}{7850\ (kg/m^3)\ 460\ (J/kg\ ºC)} = 1{,}106.10^{-5}\ \frac{m^2}{seg} \right| = \frac{1{,}106.10^{-5}\ (m^2/seg)\ t}{(0{,}05/3)^2} = 0{,}03987\ t$$

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi\ Fo} \quad \Rightarrow \quad \frac{300 - 20}{780 - 20} = 0{,}3684 = e^{-4{,}81.10^{-3} \times 0{,}03987\ t} = e^{-1{,}92.10^{-4} t} \quad \Rightarrow \quad t = 9028 \text{ segundos}$$

b) La temperatura en el centro de la esfera, a una distancia radial de 2,5 cm y en la periferia, al cabo de 2 minutos de ser introducida la esfera en el agua.

Como el proceso anterior ha sido un enfriamiento en aire, con resistencia térmica interna despreciable, toda la esfera se encuentra a $T_0 = 300ºC$, que será la temperatura de partida para el enfriamiento en el líquido.

Temperatura en el centro de la esfera al cabo de 2 minutos:

$$\frac{h_{cF}}{k_{acero}} = \frac{1950\ (W/m^2\ ºC)}{40\ (W/mºC)} = 48{,}7 \quad \text{(Parece condición de contorno de convección, pero conviene hallar Fo)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_{cF} R}{k} = \dfrac{1950\ (W/m^2\ ºC)\ 0{,}05\ m}{40\ (W/mºC)} = 2{,}435 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0{,}41 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{1{,}106.10^{-5}\ (m^2/seg)\ 120\ seg}{0{,}05^2\ m^2} = 0{,}5308 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}11 \\ \dfrac{T(0,t) - 20}{300 - 20} = 0{,}11 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad T(0,t) = 50{,}8ºC$$

Al ser $Fo < 1$ puede ser también condición de contorno isotérmica; sabemos que esta condición realmente empieza a ser significativa para $Fo < 0{,}5$, por lo que también se puede intentar por este método.

Empleando la condición de contorno de convección, gráficas de Heysler:

Temperatura en r = 0,025 m al cabo de 2 minutos:

$$\frac{r}{R} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{0{,}025\ m} - 20}{50{,}8 - 20} = 0{,}82 \quad \Rightarrow \quad T_{0{,}025\ m} = 20 + 0{,}82\ (50{,}8 - 20) = 45{,}25ºC$$

Temperatura en r = 0,05 m al cabo de 2 minutos:

$$\frac{r}{R} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{0{,}025\ m} - 20}{50{,}8 - 20} = 0{,}38 \quad \Rightarrow \quad T_{0{,}025\ m} = 20 + 0{,}38\ (50{,}8 - 20) = 31{,}7ºC$$

Temperatura en el centro de la esfera al cabo de 5 minutos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0{,}41 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{1{,}106.10^{-5}\ (m^2/seg)\ 300\ seg}{0{,}05^2\ m^2} = 1{,}3272 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0{,}0035 \\ \dfrac{T(0,t) - 20}{300 - 20} = 0{,}0035 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad T(0,t) = 21ºC$$

c) Calor evacuado al medio exterior en todo el proceso.

$$Q(t) = Q_0\ (1 - e^{-Bi\ Fo}) = \left| \begin{array}{c} Q_0 = \rho\ V\ c_{pF}\ (T_0 - T_F) = \rho\ \dfrac{4\ \pi\ R^3}{3}\ c_{pF}\ (T_0 - T_F) = \\ = 7850\ (kg/m^3)\ \dfrac{4\ \pi \times 0{,}05^3}{3}\ m^3 \times 460\ (J/kgºC) \times (780 - 20)ºC = 1{,}437.10^6\ J = 343{,}27\ Kcal \end{array} \right| =$$

$$= 343{,}27\ Kcal\ (1 - 0{,}3684) = 216{,}8\ Kcal$$

Calor evacuado al agua al cabo de 5 minutos:

En la esfera quedan almacenados: $Q_0^* = 343{,}27 - 216{,}8 = 126{,}45$ Kcal

$$\left. \begin{array}{l} Bi^2 Fo = 2{,}435 \times 1{,}3272 = 7{,}87 \\ Bi = 2{,}435 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Gröber}} \frac{Q}{Q_0^*} = 1$$

luego al agua iría prácticamente toda la energía almacenada.

****

III.34.- Una esfera de hierro maciza de 10 cm de diámetro se encuentra inicialmente a una temperatura de 780ºC y se enfría en dos etapas. En la primera etapa se utiliza un chorro de aire a 5 m/seg y 20ºC, hasta que en el centro adquiere una temperatura de 300ºC, y a continuación, en la segunda etapa, se introduce en un baño de mercurio a 20ºC a una velocidad de 0,1 m/seg.

Determinar

a) El tiempo que debe transcurrir para el enfriamiento en el aire

b) La temperatura en el centro de la esfera, y en la periferia al cabo de los 10 primeros segundos y al cabo de 1 minuto una vez introducida la esfera en el mercurio
Datos: Propiedades térmicas de la esfera: k = 40 W/mºC ; c_p = 460 J/kgºC ; ρ = 7850 kg/m³

RESOLUCIÓN
a) Enfriamiento en aire en convección forzada, u = 5 m/seg
Cálculo de la temperatura media del aire para determinar sus propiedades

$$\text{3. PROB. Propiedades del aire a } \hat{T} = \frac{T_{inicial} + T_{final}}{2} = \left| \begin{array}{l} T_{inicial} = \frac{T_i + T_F}{2} = \frac{780 + 20}{2} = 400 \\ T_{final} = \frac{T_f + T_F}{2} = \frac{300 + 20}{2} = 160 \end{array} \right| = \frac{400 + 160}{2} = 280ºC$$

o también:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Temperatura media de la pared: } \frac{780 + 300}{2} = 540ºC \\ \text{Temperatura del fluido (aire) = 20ºC} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \hat{T}_{aire} = \frac{540 + 20}{2} = 280ºC$$

a esta temperatura se tiene:

$$\rho = 0{,}6423 \ \frac{kg}{m^3} \ ; \ c_p = 1{,}04 \ \frac{kJ}{kgºC} \ ; \ \nu = 44{,}34.10^{-6} \ \frac{m^2}{seg} \ ; \ k = 0{,}0436 \ \frac{W}{mºC} \ ; \ \alpha = 0{,}6532.10^{-4} \ \frac{m^2}{seg} \ ; \ Pr = 0{,}68$$

Cálculo del coeficiente de convección para el flujo del aire sobre la esfera:

$$Nu = 0{,}37 \ Re^{0{,}6} = \left| \begin{array}{l} 17 < Re < 70000 \\ Re = \frac{d \ u_F}{\nu} = \frac{0{,}1 \ x \ 5}{44{,}34.10^{-6}} = 11276 \end{array} \right| = 0{,}37 \ x \ 11276^{0{,}6} = 99{,}88$$

$$h_{C \ aire} = \frac{Nu \ k}{d} = \frac{99{,}88 \ x \ 0{,}0436}{0{,}1} = 43{,}55 \ \frac{W}{m^2 \ ºC}$$

Con este dato se puede determinar la condición de contorno correspondiente; como se trata del enfriamiento de un metal en aire, parece lógico que la condición de contorno sea de resistencia térmica interna despreciable, para lo cual Bi < 0,1.

$$Bi = \frac{h_{cF} \ R}{k} = \frac{43{,}55 \ x \ 0{,}05}{40} = 0{,}054 < 0{,}1 \text{ (Condición de contorno con R.T.I.D), por lo que:}$$

$$Bi = \frac{h_{cF} \ (R/3)}{k} = \frac{43{,}55 \ (0{,}1/6)}{40} = 0{,}018$$

$$Fo = \frac{a \ t}{(R/3)^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho \ c_p} = \frac{40}{7850 \ x \ 460} \ 1{,}106.10^{-5} \ \frac{m^2}{seg} \right| = \frac{1{,}106.10^{-5} \ t}{(0{,}1/3)^2} = 0{,}03987 \ t$$

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi \ Fo} \quad \Rightarrow \quad \frac{300 - 20}{780 - 20} = e^{-(0{,}018 \ x \ 0{,}03987 \ t)} = e^{-7{,}235.10^{-4} t} \quad \Rightarrow \quad t = 1391 \text{ seg}$$

b) Enfriamiento en mercurio en convección forzada, u = 0,1 m/seg
Por tratarse de mercurio, en este enfriamiento la condición de contorno es isotérmica. La ecuación particular a utilizar para calcular Nu dice que la temperatura para determinar las propiedades del fluido será la media entre la pared y el fluido y en condiciones isotérmicas esa temperatura es T_F
Propiedades del mercurio a 20ºC

$$\rho = 13579 \ \frac{kg}{m^3} \ ; \ c_p = 139{,}4 \ \frac{kJ}{kgºC} \ ; \ \nu = 0{,}114.10^{-6} \ \frac{m^2}{seg} \ ; \ k = 8{,}69 \ \frac{W}{mºC} \ ; \ \alpha = 46{,}06.10^{-7} \ \frac{m^2}{seg} \ ; \ Pr = 0{,}0249$$

$$Nu = 2 + 0{,}386 \ \sqrt{Re \ Pr} = \left| \begin{array}{l} 30000 < Re < 150000 \\ Re = \frac{d \ u_F}{\nu} = \frac{0{,}1 \ x \ 0{,}1}{0{,}114.10^{-6}} = 87720 \end{array} \right| = 2 + 0{,}386 \ \sqrt{87720 \ x \ 0{,}0249} = 20{,}04$$

$$h_{C\ mercurio} = \frac{Nu\ k}{d} = \frac{20{,}04 \times 8{,}69}{0{,}1} = 1741{,}5\ \frac{W}{m^2\ ºC}$$

Temperatura en el centro de la esfera al cabo de los 10 primeros segundos una vez introducida la esfera en el mercurio

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{R^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho\ c_p} = \frac{40(W/mºC)}{7850(kg/m^3) \times 460\ (J/kgºC)} = 1{,}106.10^{-5}\ \frac{m^2}{seg} \right| = \frac{1{,}106.10^{-5}\ t}{0{,}05^2} = 0{,}00442\ t$$

Al ser Fo = 0,0442 < 0,2 , hay que tomar varios sumandos del desarrollo:

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} = \left| \lambda_n = \frac{\pi\ n}{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=1\ ;\ \lambda_1 = 1\ \pi/0{,}05 = 62{,}83 \\ n=2\ ;\ \lambda_2 = 2\ \pi/0{,}05 = 125{,}61 \\ n=3\ ;\ \lambda_3 = 3\ \pi/0{,}05 = 188{,}5 \\ n=4\ ;\ \lambda_4 = 4\ \pi/0{,}05 = 251{,}32 \end{array} \right| =$$

$$= -2\ (-e^{-62{,}83^2 \times 1{,}107.10^{-5} \times 10} + e^{-125{,}61^2 \times 1{,}107.10^{-5} \times 10} - e^{-188{,}5^2 \times 1{,}107.10^{-5} \times 10} + ...) = 0{,}98237$$

$$T_C = T_F + (T_0 - T_F) \times 0{,}98237 = 20 + (300 - 20) \times 0{,}98237 = 295{,}06ºC$$

Temperatura en el centro al cabo de 1 minuto una vez introducida la esfera en el mercurio

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2\ (-e^{-62{,}83^2 \times 1{,}107.10^{-5} \times 60} + e^{-125{,}61^2 \times 1{,}107.10^{-5} \times 60} - e^{-188{,}5^2 \times 1{,}107.10^{-5} \times 60} + ...) = 0{,}1452$$

$$T_C = T_F + (T_0 - T_F) \times 0{,}1452 = 20 + (300 - 20) \times 0{,}1452 = 60{,}67ºC$$

La temperatura de la periferia de la esfera, en cualquier instante es la temperatura del fluido = 20ºC.

****

III.35.- Una esfera maciza de acero de diámetro 10 cm se encuentra a una temperatura de 890ºC y se introduce en una corriente de aire a 10 m/seg y 10ºC. Las propiedades del acero son: k = 25 Kcal/m.h.ºC, ρ = 7800 kg/m³ ; c_p = 0,11 Kcal/kgºC. Con estos datos determinar:

a) El coeficiente de convección

b) La temperatura en el centro de la esfera al cabo de 1 segundo y al cabo de 15 segundos.

c) El tiempo que tardará en coger en el centro 300ºC

d) La temperatura de un punto situado a una distancia radial de 2,5 cm al cabo de 15 segundos y el calor evacuado en ese tiempo.

RESOLUCIÓN

Propiedades del aire a: $T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{890 + 10}{2} + 273 = 723ºK$

$$\rho = 0{,}4882\ \frac{kg}{m^3}\ ;\ c_{pF} = 1{,}08\ \frac{kJ}{kgºC}\ ;\ \nu = 6{,}964.10^{-5}\ \frac{m^2}{seg}\ ;\ k = 0{,}05358\ \frac{W}{mºC}\ ;\ Pr = 0{,}6854$$

$$Nu = 0{,}37\ Re^{0{,}6} = \left| \begin{array}{c} 17 < Re < 70000 \\ Re = \frac{d\ u_F}{\nu} = \frac{0{,}1\ m \times 10\ (m/seg)}{6{,}964.10^{-5}\ (m^2/seg)} = 14357 \end{array} \right| = 0{,}37 \times 14357^{0{,}6} = 115{,}47$$

a) Coeficiente de convección

$$h_{cF} = \frac{115{,}47 \times 0{,}05348}{0{,}1} = 61{,}86\ \frac{W}{m^2\ ºC}$$

b.1) Temperatura en el centro de la esfera al cabo de 1 segundo

Al ser un enfriamiento en aire, lo más probable es que sea un caso con resistencia térmica interna despreciable, por lo que si Bi < 0,1 se confirma.

$$Bi = \frac{h_{cF}\ (R/3)}{k} = \frac{61{,}86\ (W/m^2\ ºC)\ (0{,}1/6)\ m}{25 \times 1{,}163\ (W/mºC)} = 0{,}035 < 0{,}1 \Rightarrow \text{(Se confirma la condición de contorno)}$$

$$Fo_{1seg} = \frac{\alpha\ t}{(R/3)^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho\ c_{pF}} = \frac{25(Kcal/h\ m^2\ ºK)}{7800\ (kg/m^3)\ x\ 0,11\ (Kcal/kgºK)} = 0,02914\ \frac{m^2}{hora} = 8,0937.10^{-6}\ \frac{m^2}{seg} \right| = 0,0291$$

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi\ Fo} \quad \Rightarrow \quad T_{1\ seg} = 10 + (890 - 10)\ e^{-0,035\ x\ 0,0291} = 889ºC$$

b.2) La temperatura en el centro de la esfera al cabo de 15 segundos.

$$T_{15\ seg} = \left| Fo = 0,0291\ x\ 15 = 0,437 \right| = 10 + (890 - 10)\ e^{-0,035\ x\ 0,437} = 876,6nC$$

c) Tiempo que tardará en coger en el centro 300ºC (y por la condición de contorno, en cualquier punto de la esfera)

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{(R/3)^2} = \frac{8,0937.10^{-6}\ t}{(0,05/3)^2} = 0,0291\ t$$

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi\ Fo} \ ; \ \frac{300 - 10}{890 - 10} = e^{-0,035\ x\ 0,0291\ t} \ \Rightarrow \ t = 1088\ seg$$

d) La temperatura de un punto situado a una distancia radial de 2,5 cm al cabo de 15 segundos

$$T_{15\ seg;\ 2,5\ cm} = 876,6ºC$$

El calor evacuado en ese tiempo es:

$$Q(t) = h_{cF}\ A\ (T_0 - T_F)\ t\ \frac{1 - e^{-Bi\ Fo}}{Bi\ Fo} = 61,86\ x\ 4\ \pi\ x\ 0,05^2\ x\ (890 - 10)\ x\ 15\ \frac{1 - e^{-0,035\ x\ 0,4371}}{0,035\ x\ 0,4371} = 25,46\ kW$$

****

III.36.- Una esfera de acero de diámetro 2 cm se encuentra a una temperatura de 800ºC, y se introduce con una velocidad de 0,2 m/seg, en un recipiente que contiene mercurio a 20ºC. Las propiedades del acero son: k = 25 Kcal/h.m.ºC; ρ = 7800 kg/m³ ; c_p = 0,11 Kcal/kgºC

Determinar

a) La temperatura a la que hay que tomar las propiedades del mercurio, y calcular el coeficiente de convección correspondiente.

b) La ecuación de la distribución de temperaturas en el centro de la esfera, en función del tiempo.

c) Haciendo uso del apartado (b) la temperatura en el centro de la esfera al cabo de 1, 2, 10 y 25 segundos.

d) La temperatura de un punto situado a una distancia radial de 0,5 cm al cabo de 2 segundos

e) El calor evacuado al exterior al cabo de 10 segundos

RESOLUCIÓN

a) Temperatura a la que hay que tomar las propiedades del mercurio.-

Al ser el medio de enfriamiento un metal líquido, con toda seguridad se va a tener una condición de contorno ISOTÉRMICA, por lo que la temperatura a la que hay que considerar las propiedades del fluido son a T_F, en este caso a 20ºC, por lo que:

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{20 + 20}{2} = 20ºC$$

es decir, prácticamente en el mismo instante de introducir la esfera en el metal líquido, su superficie adquiere la temperatura del medio de enfriamiento (metal líquido).

Datos del mercurio a 20ºC: $\nu = 0,114.10^{-6}\ \frac{m^2}{seg}$; $k = 8,69\ \frac{W}{mºC}$; $Pr = 0,0249$

$$Re = \frac{u\ d}{\nu} = \frac{0,2\ x\ 0,02}{0,114.10^{-6}} = 35088$$

Coeficiente de convección: $Nu = 2 + 0,386\ (Re\ Pr)^{0,5} = 2 + 0,386\ (35088\ x\ 0,0249)^{0,5} = 13,41$

$$h_{cF} = \frac{Nu\ k}{d} = \frac{13,4\ x\ 8,69}{0,02} = 5826\ \frac{W}{m^2\ ºC} = \frac{5,826}{1,163}\ \frac{Kcal}{hm^2\ ºC} = 5010\ \frac{Kcal}{hm^2\ ºC}$$

b) Ecuación de la distribución de temperaturas en el centro de la esfera, en función del tiempo.

$$Fo = \frac{\alpha\, t}{R^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho\, c_p} = \frac{25\ (Kcal/hm^2\ ºC)}{7800\ (kg/m^3)\ 0{,}11\ (Kcal/kgºC)} = 0{,}0291\ \frac{m^2}{hora} \right| = \frac{0{,}0291\ (m^2/h)\ t}{0{,}01^2\, m^2} = 0{,}08\ t \quad (t \text{ en seg})$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -\,2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\ e^{-\lambda_n^2 \alpha\, t}, \quad \text{con:} \begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi\, n}{R} = \dfrac{\pi\, n}{0{,}01} = 314{,}16\ n \\ \alpha = \dfrac{k}{\rho\, c_p} = \dfrac{25\ (Kcal/h\ mºC)}{7800\ (kg/m^3)\ 0{,}11\ (Kcal/kgºC)} = 0{,}029\ \dfrac{m^2}{hora} \end{cases}$$

$$\frac{T_C - 20}{800 - 20} = -\,2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(314{,}16\ n)^2\ 0{,}029\ t} = -\,2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2862\ n^2 t}$$

$$T_C = 20 - 2 \times 780 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(314{,}16\ n)^2\ 0{,}029\ t} = 20 - 1560 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2862\ n^2 t}$$

c) Haciendo uso del apartado (b) la temperatura en el centro de la esfera al cabo de 1 segundo.- (Para tiempos de 1 y 2 seg harán falta varios sumandos por ser Fo < 0,2)

$$T_{C\ (1\ seg)} = 20 - 2 \times 780 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2862\ n^2 t} = \left| t = 1\ seg = \frac{1}{3600}\ h \right| = 20 - 1560 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2862\ n^2 \frac{1}{3600}} =$$

$$= 20 - 1560 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-0{,}795\ n^2} = 20 - 1560\ (-\,e^{-0{,}795} + e^{-0795 \times 4} - e^{-0795 \times 9} + \ldots) =$$

$$= 20 - 1560\ (-\,0{,}451 + 0{,}04158 - 0{,}00078 + \ldots) = 20 + 638 = 658ºC$$

En la misma forma se obtendría para 2, 10 y 25 segundos, $\begin{cases} T_{C(2\ seg)} = 336ºC \\ T_{C(20\ seg)} = 20{,}55ºC \\ T_{C(25\ seg)} = 20{,}000003ºC \end{cases}$

d) Temperatura en un punto situado a una distancia radial de 0,5 cm, al cabo de 2 segundos

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = -\,\frac{2\,R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-\lambda_n^2 \alpha\, t)}{n\, r} \operatorname{sen} \frac{\pi\, n\, r}{R}$$

$$\frac{T - 20}{800 - 20} = -\,\frac{2 \times 0{,}01}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-2862\ n^2 t)}{0{,}005\ n} \operatorname{sen} \frac{\pi\, n\ 0{,}005}{R} = \left| t = \frac{1}{3600}\ h \right| =$$

$$= -\,6{,}366.10^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ e^{-1{,}59\ n^2}}{0{,}005\ n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\, n}{2}\right) = -\,6{,}366.10^{-3} \left\{ \frac{e^{-1{,}59 \times 1^2}}{0{,}005} + \frac{e^{-1{,}59 \times 3^2}}{0{,}005 \times 3} - \frac{e^{-1{,}59 \times 5^2}}{0{,}005 \times 5} + \ldots \right\} =$$

$$= -\,6{,}366.10^{-3}\ \{-\,40{,}78 + 0{,}0000406 - \ldots) = 0{,}2596 \quad \Rightarrow \quad T_{r\,=\,0{,}5cm} = 20 + (780 \times 0{,}2596) = 222{,}5ºC$$

e) Calor evacuado al exterior al cabo de 10 segundos

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-\lambda_n^2 \alpha\, t)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp\left(-\frac{2862}{360}\ n^2\right)}{n^2} =$$

$$= \frac{6}{\pi^2} \left\{ \frac{1 - \exp\left(-\frac{2862}{360}\ 1^2\right)}{1^2} + \frac{1 - \exp\left(-\frac{2862}{360}\ 2^2\right)}{2^2} + \frac{1 - \exp\left(-\frac{2862}{360}\ 3^2\right)}{3^2} + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\ (0{,}9996 + 0{,}25 + 0{,}111 + 0{,}0625 + 0{,}04 + \ldots) = 0{,}90642$$

$$Q = 0{,}90642\ Q_0 = \left| \begin{array}{c} Q_0 = m\, c_p\ \Delta T = V\, \rho\, c_p \Delta T = \dfrac{4}{3}\ \pi R^3 \rho\, c_p \Delta T = \\ = \dfrac{4}{3}\ \pi\, 0{,}01^3 m^3 \times 7800\ \dfrac{kg}{m^3} \times 0{,}11\ \dfrac{Kcal}{kgºC} \times 780ºC = 2{,}8\ Kcal \end{array} \right| = 0{,}9 \times 2{,}8 = 2{,}52\ Kcal$$

****

III.37.- Se desea hacer un tratamiento térmico de unas bolas de diámetro d = 3 cm construidas con acero al Cr-Ni (20/10), α = 0,415 x10^{-5} m^2/seg, k = 15,1 W/m.ºK, y para ello se calientan a una temperatura de 975ºC. A continuación se enfrían en un baño de mercurio que se encuentra a la temperatura de 20ºC, sometiéndolas a un movimiento de agitación dotado de una velocidad media de 0,5 m/seg.

Determinar: a) El coeficiente de transferencia de calor

b) El tiempo necesario para que las bolas alcancen la temperatura de 200ºC en el centro

c) El calor disipado en ese tiempo

RESOLUCIÓN

a) Coeficiente de transferencia de calor.- Al ser el medio de enfriamiento un metal líquido, casi con toda seguridad se va a tener una condición de contorno ISOTÉRMICA

Datos de Mercurio a 20ºC:

$$\rho = 13579\ \frac{kg}{m^3}\ ;\ c_p = 139{,}4\ \frac{kJ}{kg°C}\ ;\ \nu = 0{,}114.10^{-6}\ \frac{m^2}{seg}\ ;\ k = 8{,}69\ \frac{W}{m°C}\ ;\ \alpha = 46{,}06.10^{-7}\ \frac{m^2}{seg}\ ;\ Pr = 0{,}0249$$

$$Re = \frac{u_F\ d}{\nu} = \frac{0{,}5\ (m/seg)\ x\ 0{,}03\ m}{0{,}114.10^{-6}\ (m^2/seg)} = 131.578 \quad ; \quad Fo = \frac{\alpha\ t}{R^2} = \frac{46{,}06.10^{-7}\ (m^2/seg)\ t}{0{,}015^2\ m^2} = 0{,}02\ t$$

$$Nu = 2 + 0{,}386\ (Re\ Pr)^{0,5}\ ;\ \text{campo de aplicación : } (3\ x\ 10^4 < Re < 1{,}5\ x\ 10^5)\ \text{(válida)}$$

$$Nu = 2 + 0{,}386\ (Re\ Pr)^{0,5} = 2 + 0{,}386\ (131579\ x\ 0{,}0249)^{0,5} = 24{,}1$$

$$h_{cF} = \frac{Nu\ k}{d} = \frac{24{,}1\ x\ 8{,}69}{0{,}03} = 6981\ \frac{W}{m^2.ºK}$$

b) Tiempo necesario para que las bolas alcancen la temperatura de 200ºC en el centro

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ e^{-\lambda_n^2 \alpha\ t} = \left| \lambda_n = \frac{\pi\ n}{R}\ ;\ \alpha = 0{,}415.10^{-5}\ \frac{m^2}{hora} \right| = \frac{200 - 20}{975 - 20} = 0{,}1884$$

$$0{,}094 = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ e^{-\lambda_n^2\ x\ 0{,}415.10^{-5}\ \frac{m^2}{hora}\ t} = \ldots = \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = \pi/R = \pi/0{,}015 = 209{,}44 \\ \lambda_2 = 2\pi/R = 2\pi/0{,}015 = 418{,}88 \\ \lambda_3 = 3\pi/R = 3\pi/0{,}015 = 628{,}34 \end{array} \right| =$$

$$= \{(-1)\ e^{-209{,}44^2\ x\ 0{,}415.10^{-5} t} + (1)\ e^{-418{,}88^2\ x\ 0{,}415.10^{-5} t} + (-1)\ e^{-628{,}3^2\ x\ 0{,}415.10^{-5} t} + \ldots\} =$$

$$= \{(-1)\ e^{-209{,}44^2\ x\ 0{,}415.10^{-5} t} + (1)\ e^{-418{,}88^2\ x\ 0{,}415.10^{-5} t} + (-1)\ e^{-628{,}3^2\ x\ 0{,}415.10^{-5} t} + \ldots\} = e^{-0{,}182\ t} - e^{-4\ x\ 0{,}182\ t} + e^{-9\ x\ 0{,}182\ t} + \ldots$$

observándose que el desarrollo en serie converge muy rápidamente.

Como: Fo = 0,02x12,37 = 0,253 > 0,2, resolviendo con sólo el primer sumando se obtiene: $\left\{ \begin{array}{l} 0{,}1052 = e^{-0{,}182\ t} \\ t = 12{,}37\ seg \end{array} \right.$

c) Calor disipado en ese tiempo

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}\frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha\ t}}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{1 - e^{-\lambda_1^2 \alpha\ t}}{1^2} + \frac{1 - e^{-\lambda_2^2 \alpha\ t}}{2^2} + \frac{1 - e^{-\lambda_3^2 \alpha\ t}}{3^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots - \left(\frac{e^{-\lambda_1^2 \alpha\ t}}{1^2} + \frac{e^{-\lambda_2^2 \alpha\ t}}{2^2} + \frac{e^{-\lambda_3^2 \alpha\ t}}{3^2} + \ldots\right)\right\} = \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1\ldots}\frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha\ t}}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{e^{-0{,}182\ x\ 12{,}37}}{1^2} + \frac{e^{-4\ x\ 0{,}182\ x\ 12{,}37}}{2^2} + \frac{e^{-9\ x\ 0{,}182\ x\ 12{,}37}}{3^2} + \ldots\right)\right\} = \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}10523 - 0{,}000031\right) = 0{,}89$$

$$Q = 0{,}89\ Q_0 = \left\{ \begin{array}{l} Q_0 = m\ c_p\ \Delta t = V\ \rho\ c_p\ \Delta t = \left| \rho\ c_p = \frac{k_{esf}}{\alpha_{esf}} \right| = \frac{4\ \pi\ R^3}{3}\ \frac{k\ \Delta T}{\alpha} = \\ \quad = \frac{4\ \pi\ 0{,}015^3}{3}\ m^3\ \frac{15{,}1\ (W/mºK)\ x\ 955nºK}{0{,}415.10^{-5}\ (m^2/seg)} = 49{,}124\ kJ \end{array} \right\} = 43{,}72\ kJ$$

****

III.38.- Una esfera de hierro macizo de diámetro 4 cm, se encuentra a la temperatura de 390ºC y tiene las siguientes constantes físicas: k = 65 W/m.ºC ; c_p = 460 Joules/kgºC ; ρ =7800 kg/m³

Se la somete a un enfriamiento en un medio exterior que se encuentra a 20ºC y se desea saber:

a) En el supuesto de que el medio de enfriamiento sea aire en reposo, hallar al cabo de 1 minuto la temperatura en el centro y en la periferia. ¿Qué tiempo tardaría en alcanzar en el centro la temperatura de 100ºC?

b) Si se supone que el medio de enfriamiento es una corriente de agua que circula a 1 m/seg, determinar la temperatura en el centro y en la periferia al cabo de 10 segundos y de 1 minuto

---

RESOLUCIÓN

a) Temperatura en el centro y en la periferia, para enfriamiento en aire en reposo, al cabo de 1 minuto

Coeficiente de convección para el aire

Las propiedades del aire se calculan a: $T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{390 + 20}{2} + 273 = 478ºK$

$$\rho = 0{,}744\ \frac{kg}{m^3}\ ;\ c_{pF} = 1{,}025\ \frac{kJ}{kgºC}\ ;\ k = 0{,}03872\ \frac{W}{mºC}\ ;\ \nu = 34{,}8.10^{-6}\ \frac{m^2}{seg}\ ;\ Pr = 0{,}68$$

$$\frac{g\,\beta}{\nu^2} = \frac{9{,}8\ (1/293ºK)}{(34{,}8.10^{-6})^2} = 2{,}76.10^7$$

$$Gr = \frac{g\,\beta}{\nu^2}\,\Delta T\,d^3 = \left| \begin{array}{l} \Delta T = 390 - 20 = 370ºC \\ d = 0{,}04\ m \end{array} \right| = 2{,}76.10^7 \times 370 \times 0{,}04^3 = 654.000$$

$$Ra = Gr\,Pr = 654.000 \times 0{,}68 = 444.725$$

$$Nu_d = 2 + 0{,}45\ Ra_d^{0,25} = 2 + 0{,}45 \times 444725^{0,25} = 13{,}62 \quad \Rightarrow \quad h_{cF} = \frac{Nu_d\ k}{d} = \frac{13{,}62 \times 0{,}03872}{0{,}04} = 13{,}185\ \frac{W}{m^2\,ºC}$$

Al ser aire el medio de enfriamiento es de prever una condición de contorno con resistencia térmica interna despreciable, por lo que:

$$Bi = \frac{h_{cF}\,(R/3)}{k_{hierro}} = \frac{13{,}185 \times (0{,}02/3)}{65} = 0{,}00135$$

$$\text{Para, } t = 1\ min \ \Rightarrow \ Fo_{1\ min} = \frac{\alpha\ t}{(R/3)^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho\ c_{pF}} = \frac{65}{7800 \times 460} = 1{,}81.10^{-5}\ (m^2/seg) \right| = \frac{1{,}81.10^{-5}\ (m^2/seg)\ 60\ seg}{(0{,}02/3)^2} = 24{,}43$$

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-\,Bi\,Fo} \quad ; \quad \frac{T(x,t) - 20}{390 - 20} = e^{-\,1{,}219.10^{-3} \times 24{,}43} = 0{,}9706 \quad \Rightarrow \quad T(x\ ,t) = 379{,}14ºC$$

Tiempo que se emplea en alcanzar en el centro la temperatura de 100ºC

$$\frac{100 - 20}{390 - 20} = 0{,}2162 = e^{-\frac{1{,}81.10^{-5}\ t}{(0{,}02/3)^2} \times 0{,}00135} = e^{-\,5{,}507.10^{-4}\,t} \quad \Rightarrow \quad t = 2781\ seg = 46{,}35\ min$$

b) Si se supone que el medio de enfriamiento es una corriente de agua que circula a 1 m/seg, determinar la temperatura en el centro y en la periferia al cabo de 1 minuto

FLUJO EN CONVECCIÓN FORZADA.- Propiedades del agua a 20ºC, para aplicar la ecuación de Whitaker:

$$\nu = 1{,}006.10^{-6}\ \frac{m^2}{seg}\ ;\ k = 0{,}579\ \frac{W}{mºK}\ ;\ Pr = 7$$

$$Re = \frac{u_F\,d}{\nu} = \frac{1\ m/seg \times 0{,}04\ m}{1{,}006.10^{-6}\ m^2/seg} = 39761$$

$$Nu = 2 + (0{,}4\ \sqrt{Re}\ + 0{,}06\ Re^{2/3})\ Pr^{0,4}\ \sqrt[4]{\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}}\ ,\ \text{válida en: } \begin{cases} 3{,}5 < Re < 80.000 \\ 0{,}7 < Pr < 380 \end{cases}$$

η_{pF} se calcula a la temperatura media de la pared: 390ºC = 205ºC ; η_{pF} =132.10⁻⁶ Nseg/m²

η_F se calcula a la temperatura media del fluido 20ºC ; η_F = 1004.10⁻⁶ Nseg/m²

$$Nu = 2 + (0{,}4\ \sqrt{39761} + 0{,}06 \times 39761^{2/3})\ 7^{0{,}4} \sqrt[4]{\frac{1004}{132}} = 542{,}9$$

$$h_{cF} = \frac{Nu\ k}{d} = \frac{542{,}9 \times 0{,}597}{0{,}04} = 8100\ \frac{W}{m^2\ ºC}$$

Temperatura en el centro y en la periferia de la esfera al cabo de 10 segundos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h_{cF}}{k} = \dfrac{8100}{65} = 124{,}6\ ;\ Bi = \dfrac{h_{cF}\ R}{k} = \dfrac{8100 \times 0{,}02}{65} = 2{,}5 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{R^2} = \dfrac{1{,}81.10^{-5} \times 10}{0{,}02^2} = 0{,}4525 < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Condición de contorno isotérmica}$$

Temperatura en la periferia: 20ºC (Por la condición de contorno isotérmica)

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n^2 \alpha\ t} = \left| \begin{array}{c} \text{Basta con el primer término del desarrollo} \\ \lambda_n = \dfrac{\pi\ n}{R} = \dfrac{\pi\ n}{0{,}02} \Rightarrow \lambda_1 = 157{,}08\ ;\ \lambda_2 = 314{,}16 \end{array} \right| =$$

$$= -2\ (-e^{-157{,}08^2 \times 1{,}81.10^{-5} \times 10} + ...) = 2\ (e^{-4{,}466} - e^{-17{,}86}) = 0{,}022986 = \frac{T_C - 20}{390 - 20} \Rightarrow T_C = 28{,}5ºC$$

Temperatura en el centro y en la periferia de la esfera al cabo de 60 segundos

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{R^2} = \frac{1{,}81.10^{-5} \times 60}{0{,}02^2} = 2{,}715$$

El proceso pierde la condición isotérmica por lo que con este valor y $Bi^{-1} = 0{,}4$ se obtiene:

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha\ t}\ \frac{sen\ (\lambda_n R) - (\lambda_n R) \cos (\lambda_n R)}{\lambda_n R - sen\ (\lambda_n R) \cos (\lambda_n R)\}} \Rightarrow \frac{T_C - 20}{390 - 20} = 3{,}5.10^{-8} \Rightarrow T_C = 20ºC$$

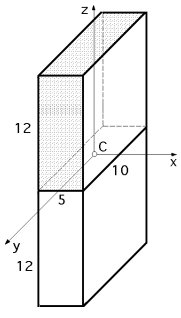
****

III.39.- Un ladrillo macizo de (5 x 10 x 12) cm se extrae de un horno que se encuentra a 400ºC y se coloca en una mesa en posición vertical (apoyado sobre la base menor). El coeficiente de película medio para todo el ladrillo puede suponerse del orden de 25 Kcal/h.m².ºC. La temperatura del ambiente es de 20ºC.
Datos del material: $\alpha = 0{,}002\ m^2/hora$; $k = 1\ Kcal/h.m.ºC$
Determinar, al cabo de 1 hora:

a) La temperatura en el centro de la cara apoyada en la mesa y en el centro del ladrillo
b) La temperatura en el centro de la cara del ladrillo opuesta a la apoyada en la mesa
c) La temperatura en el centro de la cara del ladrillo de dimensiones (10 x 12) cm

---

RESOLUCIÓN



α) Temperatura en el centro de la cara apoyada en la mesa
Veamos la condición de contorno:
Disipa calor en las tres direcciones; al duplicar la longitud (por el plano apoyado sobre la base menor, que se convierte en un plano adiabático y, por lo tanto, de simetría), parece que podría hacerlo sólo en una, hecho que habrá que comprobar.
Condición de contorno a utilizar:

$$\left\{\begin{array}{l} h_C/k = 25/1 = 25 \Rightarrow \text{c.c. convección} \\ Bi = \dfrac{h_C\ (V/A)}{k} = 25 \times (0{,}012/0{,}082)/1 = 0{,}366 > 0{,}1 \Rightarrow \text{c.c. convección} \end{array}\right.$$

Dirección Cx:
$$\left\{\begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_{cF}\ x}{k} = \dfrac{25(0{,}05/2)}{1} = 0{,}625\ ;\ Bi^{-1} = 1{,}6 \\ Fo = \dfrac{\alpha\ t}{x^2} = \dfrac{0{,}002 \times 1}{(0{,}05/2)^2} = 3{,}2 \end{array}\right. \Rightarrow P_x(0) = 0{,}23$$

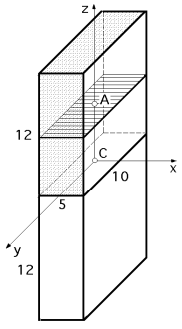
Dirección Cy: $\begin{cases} Bi = \dfrac{h_{cF}\, y}{k} = \dfrac{25(0,1/2)}{1} = 1,25 \;;\; Bi^{-1} = 0,8 \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{y^2} = \dfrac{0,002 \times 1}{(0,1/2)^2} = 0,8 \end{cases} \Rightarrow \; P_y(0) = 0,53$

Dirección Cz: $\begin{cases} Bi = \dfrac{h_{cF}\, z}{k} = \dfrac{25(0,24/2)}{1} = 3 \;;\; Bi^{-1} = 0,333 \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{z^2} = \dfrac{0,002 \times 1}{(0,24/2)^2} = 0,1389 \end{cases} \Rightarrow \; P_z(0) = 0,91$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,23 \times 0,53 \times 0,91 = 0,111 \;\Rightarrow\; T_C = 20 + 0,111\,(400 - 20) = 62,18ºC$$

Se observa que el elemento corrector en la dirección Cz es prácticamente la unidad

Temperatura en el centro del ladrillo T_A



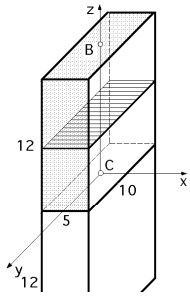
En la dirección Cx no hay corrección por cuanto el punto A corresponde al plano (y,z).- Parámetro de posición 0 ; Heysler $\Rightarrow$ 1

En la dirección Cy no hay corrección por cuanto el punto A corresponde al plano (x,z).- Parámetro de posición 0 ; Heysler $\Rightarrow$ 1

$\begin{cases} \text{En la dirección Cz sí hay corrección: } Bi = 3 \;;\; Fo = 0,1389 \\ \text{Parámetro de posición: } \left| \dfrac{z}{L} = 0,5 \;;\; Bi^{-1} = 0,33 \right| \Rightarrow \text{Heysler } 0,83 \end{cases}$

$$\frac{T_A - T_F}{T_C - T_F} = 1 \times 1 \times 0,83 = 0,83 \;;\; T_A = 20 + 0,83\,(62,18 - 20) = 55ºC$$

b) La temperatura en el centro de la cara del ladrillo opuesta a la apoyada en la mesa, punto B



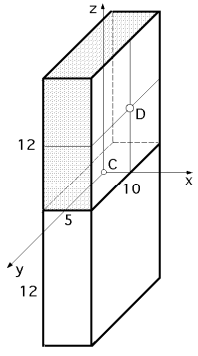
En la dirección Cx no hay corrección por cuanto el punto B corresponde al plano (y,z).- Parámetro de posición 0 ; Heysler $\Rightarrow$ 1

En la dirección Cy no hay corrección por cuanto el punto B corresponde al plano (x,z).- Parámetro de posición 0; Heysler $\Rightarrow$ 1

$\begin{cases} \text{En la dirección Cz sí hay corrección: } Bi = 3 \;;\; Fo = 0,1389 \\ \text{Parámetro de posición: } \left| \dfrac{z}{L} = 1 \;;\; Bi^{-1} = 0,33 \right| \Rightarrow \text{Heysler } 0,38 \end{cases}$

$$\frac{T_B - T_F}{T_C - T_F} = 1 \times 1 \times 0,38 = 0,38 \;;\; T_B = 20 + 0,38\,(62,18 - 20) = 36,03ºC$$

c) Temperatura en el centro D de la cara del ladrillo de dimensiones (10 x 12) cm



$\begin{cases} \text{En la dirección Cx sí hay corrección: } Bi = 0,625 \;;\; Bi^{-1} = 1,6 \\ \text{Parámetro de posición: } \left| \dfrac{x}{L} = 1 \;;\; Bi^{-1} = 1,6 \right| \Rightarrow \text{Heysler } 0,73 \end{cases}$

En la dirección Cy no hay corrección por cuanto el punto D corresponde al plano (x,z).- Parámetro de posición 0 ; Heysler $\Rightarrow$ 1

$\begin{cases} \text{En la dirección Cz sí hay corrección: } Bi = 3 \;;\; Fo = 0,1389 \\ \text{Parámetro de posición: } \left| \dfrac{z}{L} = 0,5 \;;\; Bi^{-1} = 0,33 \right| \Rightarrow \text{Heysler } 0,83 \end{cases}$

$$\frac{T_D - T_F}{T_C - T_F} = 0,73 \times 1 \times 0,83 = 0,6059 \;\Rightarrow\; T_D = 20 + 0,6059\,(62,18 - 20) = 45,56ºC$$

****

III.40.- Un ladrillo macizo de dimensiones (10 x 12 x 5) cm, se extrae de un horno que se encuentra a 400ºC, y se coloca encima de una mesa, en un ambiente tal que el coeficiente de película vale h_c = 40 Kcal/h.m^2.ºC, siendo la temperatura de dicho ambiente de 20ºC. El ladrillo se ha apoyado en la mesa sobre la cara de (10x12) cm y se supone que la cantidad de calor transmitida a la mesa es despreciable.

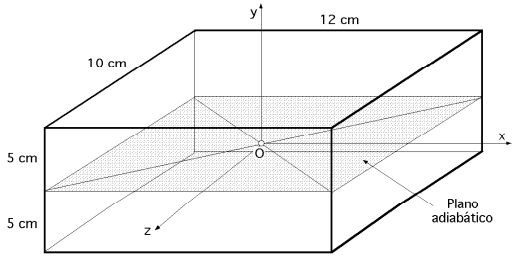
Determinar al cabo de 1 hora

a) La temperatura superficial en el centro de la cara de (5 x 10) cm.

b) La temperatura de uno de los vértices en contacto con la mesa

Datos del material: α = 0,002 m^2/hora ; k = 0,6 Kcal/h.m.ºC

RESOLUCIÓN



Como a través de la mesa el flujo de calor es cero, se puede considerar a la superficie del ladrillo en contacto con la mesa como un plano adiabático, por lo que se puede suponer a la pieza de espesor doble (2 x 5) cm, es decir, se somete una pieza de espesor doble a la acción del medio exterior, con lo que el ladrillo ficticio será de (10 x 12 x 10) cm, disipando calor por todas las caras laterales.

a) Temperatura superficial en el centro de la cara de (5 x 10) cm.
Aplicando el método de superposición: Temperatura en el centro O

$$\text{Dirección Ox,} \left\{ \begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_C\, L_x}{k} = \dfrac{40(0,12/2)}{6} = 4 \quad \Rightarrow \quad Bi^{-1} = 0,25 \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{L_x^2} = \dfrac{0,002 \times 1}{(0,12/2)^2} = 0,555 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad P_x(0) = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,42$$

$$\text{Dirección Oy,} \left\{ \begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_C\, L_y}{k} = \dfrac{40(0,1/2)}{6} = 3,33 \quad \Rightarrow \quad Bi^{-1} = 0,3 \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{L_y^2} = \dfrac{0,002 \times 1}{(0,1/2)^2} = 0,8 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad P_y(0) = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,35$$

$$\text{Dirección Oz,} \left\{ \begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_C\, L_z}{k} = \dfrac{40(0,1/2)}{6} = 3,33 \quad \Rightarrow \quad Bi^{-1} = 0,3 \\ Fo = \dfrac{\alpha\, t}{L_z^2} = \dfrac{0,002 \times 1}{(0,1/2)^2} = 0,8 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad P_z(0) = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,35$$

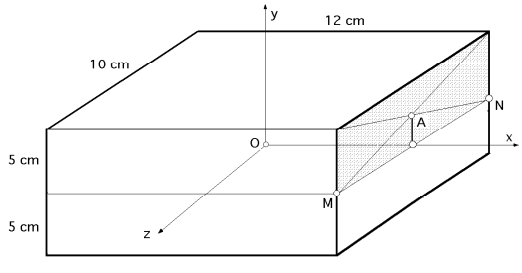
$$\text{luego: } \frac{T(0,t) - 20}{400 - 20} = 0,42 \times 0,35 \times 0,35 = 0,05145 \quad \Rightarrow \quad T(0,t) = 39,55ºC$$

TEMPERATURA EN EL PUNTO A

$$\text{Dirección Ox,} \left\{ \begin{array}{c} Bi = 4 \;;\; Bi^{-1} = 0,25 \\ \text{Parámetro de posición, } \dfrac{x}{L_x} = \dfrac{\text{Distancia al centro}}{\text{Semiespesor}} = \dfrac{0,06}{0,06} = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{T(x,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = 0,3$$

$$\text{Dirección Oy,} \left\{ \begin{array}{c} Bi = 3,33 \quad \Rightarrow \quad Bi^{-1} = 0,3 \\ \text{Parámetro de posición, } \dfrac{y}{L_y} = \dfrac{0,025}{0,05} = 0,5 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{T(y,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = 0,82$$

Dirección (Oz).- Respecto a esta dirección no hay corrección por cuanto el punto A pertenece al plano (x,y). (Parámetro de posición 0)



luego: $\frac{T_A - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{T_A - 20}{39,55 - 20} = 0,3 \times 0,82 \times 1 = 0,246 \quad \Rightarrow \quad T_A = 24,8ºC$

De otra forma: $\frac{T_A - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_A - 20}{400 - 20} = (0,42 \times 0,3)\,(0,35 \times 0,82)\,(0,35 \times 1) = 0,0127 \quad \Rightarrow \quad T_A = 24,8ºC$

b) Temperatura de cada uno de los vértices en contacto con la mesa

Dirección Ox: $\left\{ \begin{array}{c} Bi = 4 \quad \Rightarrow \quad Bi^{-1} = 0,25 \\ \text{Parámetro de posición: } \frac{x}{L_x} = \frac{\text{Distancia al centro}}{\text{Semiespesor}} = \frac{0,06}{0,06} = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{T(x,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = 0,3$

Dirección (Oy).- Respecto a esta dirección no hay corrección por cuanto el punto M pertenece al plano (x,z). (Parámetro de posición $\xi/L = 0$)

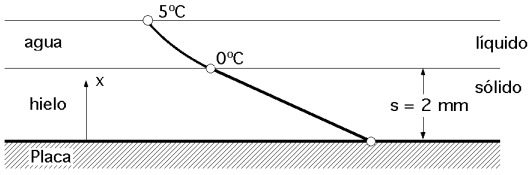
Dirección Oz: $\left\{ \begin{array}{c} Bi = 3,33 \quad \Rightarrow \quad Bi^{-1} = 0,3 \\ \text{Parámetro de posición: } \frac{z}{L_z} = \frac{0,05}{0,05} = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{T(z,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = 0,35$

luego: $\frac{T_M - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{T_M - 20}{39,55 - 20} = 0,3 \times 1 \times 0,35 = 0,105 \quad \Rightarrow \quad T_M = 22,05ºC$

****

III.41.- En un proceso de fabricación de hielo el agua fluye a 5ºC sobre una placa a -10ºC enfriada por un refrigerante. Cuando la capa de hielo alcanza los 2 mm de espesor, se raspa para quitarla de la placa, repitiéndose el proceso. Determinar el tiempo que transcurre entre dos raspaduras.
Datos: Coeficiente global de transmisión de calor del refrigerante a la superficie de contacto entre la placa y el hielo es de 900 W/m²ºK
Calor latente de fusión del hielo: 335 kJ/kg; $k_{hielo\ a\ 0ºC} = 2,22\ W/mºK$; $\rho_{hielo} = 910\ kg/m^3$

RESOLUCIÓN.



Se puede considerar solidificación unidimensional; las pérdidas de calor sensible del agua al pasar de -5ºC a 0ºC son pequeñas comparadas con el calor latente del cambio de estado.
Haciendo un balance de energía en la superficie de separación del agua y el hielo, el calor cedido por el hielo por conducción más el calor latente del cambio de estado, tiene que ser igual al calor cedido al agua (calor sensible), por lo que:

$$k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\rangle_{hielo} + G\, r_{agua\text{-}hielo} = k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\rangle_{agua}$$

El calor sensible del agua se desprecia $\Rightarrow k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\rangle_{agua} = 0$

El calor sensible del hielo es: $k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\rangle_{hielo} = \frac{T_{sup.\ separación\ agua\text{-}hielo} - T_{placa}}{\frac{s}{k_{hielo}} + \frac{1}{U_{placa\text{-}hielo}}}$

Cantidad de hielo producido, por unidad de anchura, en dt: $G = -\rho \frac{\partial s}{\partial t}$

$$k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\rangle_{hielo} + G\, r_{agua\text{-}hielo} = 0 \quad ; \quad \frac{T_{sup.\ separación\ agua\text{-}hielo} - T_{placa}}{\frac{s}{k_{hielo}} + \frac{1}{U_{placa\text{-}hielo}}} - \rho \frac{\partial s}{\partial t}\, r_{agua\text{-}hielo} = 0$$

$$k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\rangle_{hielo} + G\, r_{agua\text{-}hielo} = 0 \quad ; \quad \frac{T_{sup.\ separación\ agua\text{-}hielo} - T_{placa}}{r\, r_{agua\text{-}hielo}}\, dt = \left(\frac{s}{k_{hielo}} + \frac{1}{U_{placa\text{-}hielo}}\right) ds$$

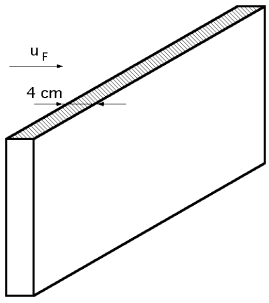
Como para: $t = 0$, $s = 0$, integrando se obtiene:

$$\frac{T_{sup.\ separación\ agua\text{-}hielo} - T_{placa}}{\rho\ r_{agua\text{-}hielo}}\ t = \frac{s^2}{2\ k_{hielo}} + \frac{s}{U_{placa\text{-}hielo}}\ ;\ \frac{0 - (-10)}{910 \times 335.10^3}\ t = \frac{0{,}002^2}{2 \times 2{,}22} + \frac{0{,}002}{900} \Rightarrow t = 95\ seg$$

****

III.42.- Calcular el tiempo necesario para alcanzar la temperatura de -l°C, punto de congelación, en el núcleo de un paquete paralelepipédico de pescado, de 4 cm de espesor, siendo su temperatura inicial de +20°C. El enfriamiento se verificará por inmersión del paquete en salmuera a -20°C.
Se considerará la transmisión de calor unidireccional.
Datos salmuera:
c_p= 0,671 Kcal/kg°K; ρ= 1260 kg/m³; η = 0,0119 kg/m.seg; k = 0,457 Kcal/h.m°C ; u = 0,1 m/seg
Datos pescado sin congelar: c_p^* = 0,85 Kcal/kg°C ; ρ^* = 1060 kg/m³ ; k^* = 0,445 Kcal/h.m°C

RESOLUCIÓN
Tiempo para pasar de 20ºC a -1ºC en la superficie



$$Re = \frac{L\ u_F}{\nu} = \frac{0{,}04\ m \times 0{,}1\ (m/seg)}{0{,}0119\ (kg/m.seg)/1260\ (kg/m^3)} = 423{,}5\ (reg.\ laminar)$$

$$Pr = \frac{\eta\ c_F}{k} = \frac{0{,}0119\ (kg/m\ seg) \times 0{,}671\ (Kcal/kg^oC)}{0{,}457(Kcal/hm^oC)} \times 3600\ \frac{seg}{hora} = 62{,}9$$

Para placa plana:

$$h_{cF} = \frac{0{,}664\ k\ \sqrt{Re_L}\ Pr^{1/3}}{L} = \frac{0{,}664 \times 0{,}457\sqrt{435{,}5} \times 62{,}9^{1/3}}{0{,}04} = 620\ \frac{Kcal}{hm^2\ ^oC}$$

$$\frac{h_{cF}}{k^*} = \frac{620}{0{,}457} = 1356{,}67\ (C.\ c.\ isotérmica)$$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{(-1) - (-20)}{20 - (-20)} = \frac{19}{40} = 0{,}475 \Rightarrow Fo = 0{,}098$$

$$Fo = \frac{\alpha^*\ t}{L^2} = \left| \alpha^* = \frac{k^*}{\rho^*\ c_{pF}^*} = \frac{0{,}445}{1060 \times 0{,}85} = 0{,}000494\ \frac{m^2}{hora} \right| = \frac{0{,}000494\ t}{0{,}04^2} = 0{,}31\ t = 0{,}098 \Rightarrow \begin{cases} t = 0{,}3174\ horas \\ ó\ 19\ min\ 26\ seg \end{cases}$$

SI EN EL PAQUETE DE PESCADO SE DESEA CONTINUAR EL ENFRIAMIENTO HASTA ALCANZAR LA TEMPERATURA DE -15°C EN EL CENTRO DEL PAQUETE, DETERMINAR:
a) El tiempo que tardará en congelarse el pescado.- Una vez se ha logrado -1ºC en el núcleo del paquete, se procede de la siguiente forma: En un instante determinado de la congelación supondremos un plano (2) a la distancia d que se encuentra a la temperatura -1ºC y que además está en contacto con el pescado no congelado.
La pared exterior está en contacto con la salmuera a -20ºC. El resto del paquete hasta el plano central (3) se encuentra a la temperatura -1ºC pero no ha congelado.
Supondremos que en un tiempo dt, el calor dQ disipado a través del plano exterior (1) es capaz de congelar un espesor dd del paquete; así se tendrá:

$$dQ = U\ A\ (T_{cong} - T_F)\ dt = \left| U = \frac{1}{(1/h_{cF}) + (\delta/k)} \right| = \frac{A\ (T_{cong} - T_F)\ dt}{(1/h_{cF}) + (\delta/k)}$$

por cuanto se ha considerado que entre los planos (2) y (3), (L - δ), no hay diferencia de temperaturas y, en consecuencia, no existe conducción de calor entre dichos planos.
Por otro lado, la cantidad de calor dQ a extraer, y necesaria para producir la congelación del espesor dd del paquete, se puede poner en la forma:

$$dQ = r_{líq\text{-}sól}\ dG = r_{líq\text{-}sól}\ x\ (A\ d\delta)\ \rho$$

en la que: $dG = x(A\ d\delta)\rho$, es la masa a congelar en el tiempo dt

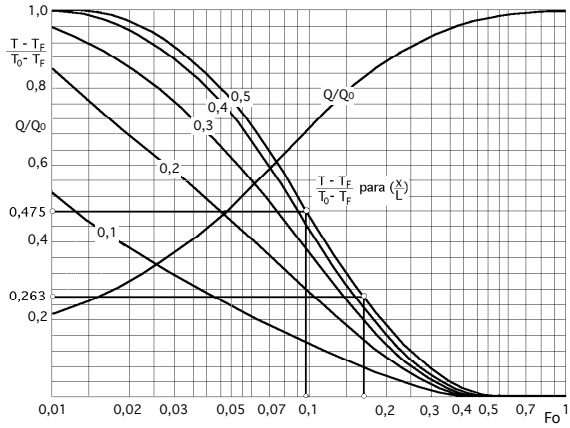
x, es el % d agua contenida en el pescado, que es la que hay que congelar, ya que el resto es sólido y no experimentará cambio de estado

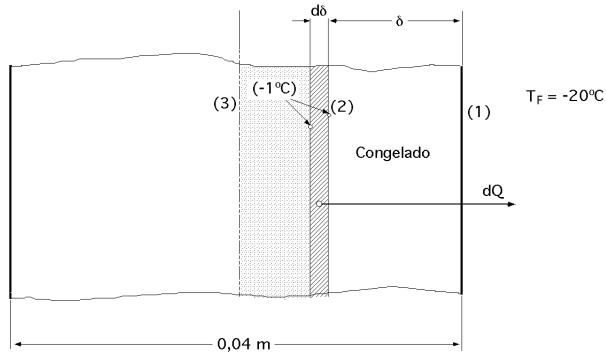
$r_{líq\text{-}sól}$ es el calor latente de la congelación del agua, del orden de 80 Kcal/kg

$$dQ = r_{líq\text{-}sól}\,(A\,d\delta)\,\rho = \frac{A\,(T_{cong} - T_F)\,dt}{(1/h_{cF}) + (\delta/k)} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{r_{líq\text{-}sól}\,(A\,d\delta)\,r}{\dfrac{A\,(T_{cong} - T_F)}{(1/h_{cF}) + (\delta/k)}} = \frac{r_{líq\text{-}sól}\,(A\,d\delta)\,r}{A\,(T_{cong} - T_F)}\,\left(\frac{1}{h_{cF}} + \frac{\delta}{k}\right)$$

$$t = \frac{r_{líq\text{-}sól} \times \rho}{T_{cong} - T_F}\int_0^{L/2}\left(\frac{1}{h_{cF}} + \frac{\delta}{k}\right)d\delta = \frac{r_{líq\text{-}sól} \times \delta}{T_{cong} - T_F}\left(\frac{\delta}{h_{cF}} + \frac{\delta^2}{2\,k}\right)_0^{L/2} = \frac{r_{líq\text{-}sól} \times \delta}{T_{cong} - T_F}\left(\frac{L/2}{h_{cF}} + \frac{(L/2)^2}{2\,k}\right) =$$

$$= \frac{80\ (\text{Kcal/kg}) \times 0{,}75 \times 1000\ (\text{kg/m}^3)}{(-1) - (-20)}\left(\frac{0{,}02\ \text{m}}{620\ (\text{Kcal/hm}^2\,^{\circ}\text{C})} + \frac{0{,}02^2\ \text{m}^2}{2 \times 1{,}5\ (\text{Kcal/hm}^{\circ}\text{C})}\right) = 0{,}65\ \text{horas} = 39\ \text{min}\ 36\ \text{seg}$$





b) El tiempo que se tardará en alcanzar los -15°C en el núcleo, después de congelado el pescado
Datos, Pescado congelado: c_p = 0,475 Kcal/kg°C ; ρ = 1000 kg/m³ ; k = 1,15 Kcal/h.m°C
Composición: agua=75% , materia sólida=25% . Se considerará que la transmisión de calor es unidireccional

h_{cF} (pescado-salmuera) = 620 (Kcal/h m² ºC) ; $\dfrac{h_{cF}}{k} = \dfrac{620}{1{,}15} = 539{,}13$ (C. c. isotérmica)

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{(-15) - (-20)}{(-1) - (-20)} = 0{,}263 \quad \Rightarrow \quad Fo = 0{,}168$$

$$Fo = \frac{\alpha\ t}{L^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho\ c_{pF}} = \frac{1{,}15}{1000 \times 0{,}475} = 0{,}00242\ \frac{m^2}{hora} \right| = \frac{0{,}00242\ t}{0{,}04^2} = 1{,}513\ t = 0{,}168 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 0{,}111\ h & \text{ó} \\ 6\ \text{min}\ 40\ \text{seg} \end{cases}$$

****

III.43.- Se tiene una chapa de palastro de 40 mm de espesor, en contacto con un muro de material relativamente aislante de espesor 30 cm. Propiedades físicas del palastro: k = 43 W/m°C ; $\alpha = 1{,}2.10^{-5}$ m²/seg
Propiedades físicas del material del muro: k = 3 W/m°C ; $\alpha^* = 0{,}75.10^{-5}$ m²/seg*
La temperatura inicial del conjunto es de 400°C. Se refrigera la chapa de palastro en forma instantánea de modo que su temperatura superficial desciende a 40°C
Determinar analítica y gráficamente la temperatura que se tiene en la superficie de contacto y a una distancia de 9,5 cm de dicha zona (en el muro), al cabo de 2 minutos 13 segundos.
Representar el proceso en papel milimetrado

RESOLUCIÓN
El intervalo que tomamos en el palastro es: Δx_1 = 2 cm.- Aplicando Binder-Schmidt se obtiene el tiempo correspondiente a cada intervalo:

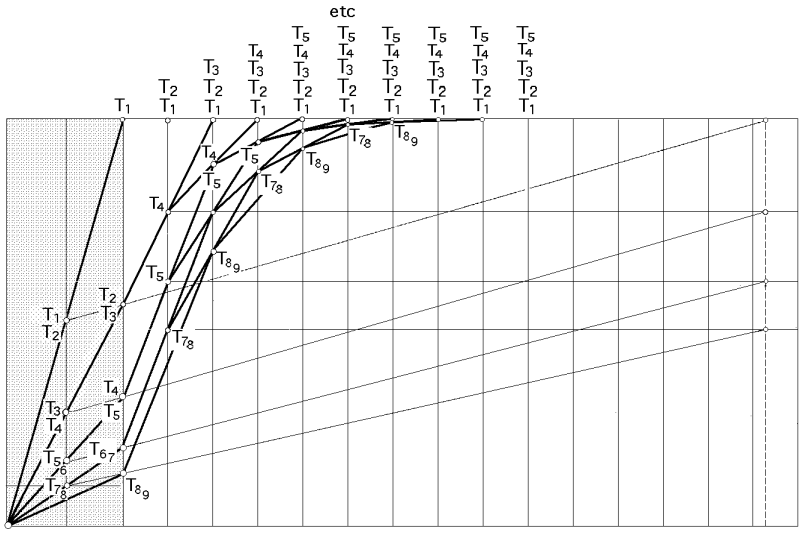
$$Fo = 0{,}5 = \frac{\alpha\ \Delta t}{\Delta x_1^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta x_1^2}{2\,\alpha} = \frac{0{,}02^2}{2 \times 1{,}2.10^{-5}} = 16{,}66\ \text{seg}$$

por lo que el intervalo Δx_2 del muro de material aislante es: $\Delta x_2 = \sqrt{2\,\alpha^*\Delta t} = \sqrt{2 \times 0{,}75.10^{-5} \times 16{,}66} = 0{,}0158$ m

Para determinar la temperatura en la superficie de contacto se hace una rehubicación de los nodos inmediatos a la misma, en el palastro o en el material del muro, de forma que el intervalo para estos nodos es:

$$\frac{T_0^{t+\Delta t} - T_1^t}{\Delta x_1} = \frac{T_2^t - T_0^{t+\Delta t}}{\frac{k_1}{k_2}\Delta x_2} \quad ; \quad \frac{k_1}{k_2}\Delta x_2 = \frac{43}{3} \times 15{,}8 = 226{,}58 \text{ mm} \quad \text{(En el muro)}$$

Como: 2 min 13 seg = 133 seg $\Rightarrow \frac{133}{16{,}66} = 7{,}98 = 8$ incrementos de tiempo



****