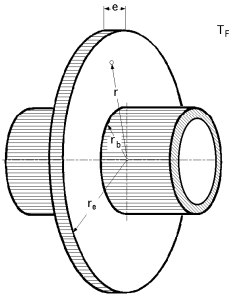
PROBLEMAS SOBRE PROTUBERANCIAS Y ALETAS

pfernandezdiez.es

IV.1.- Al realizar un estudio de calefacción se llegó a la conclusión de que era necesario utilizar aletas anulares de radio en la base r_b = 30 cm y temperatura en la base T_b=120°C, para mantener un fluido exterior a 20°C, de forma que cada aleta disipe 225,2 Kcal/hora, con un rendimiento de aleta del 40%. El material de las aletas tiene una conductividad térmica, k=50 Kcal/h.m°C



Determinar el radio exterior de la aleta y su espesor, sabiendo que el coeficiente de película es h_{cF} = 5,6 Kcal/h.m²°C

RESOLUCIÓN

Flujo de calor disipado por la aleta anular

$$Q = \pi (1 - \alpha_{an}^2)\, k\, e\, \Phi_b\, \beta_{an}^2\, G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) = \left| \begin{array}{l} \alpha_{an} = \dfrac{r_b}{r_e} \quad ; \quad \beta_{an} = \sqrt{\dfrac{2\, r_e^2\, h_{C\,ext}}{k\, e}} \\ \Phi_b = T_b - T_F = 120 - 20 = 100ºC \end{array} \right| =$$

$$= \pi \left(1 - \frac{r_b^2}{r_e^2}\right) k\, e\, \Phi_b\, \frac{2\, r_e^2\, h_{cF}}{k\, e}\, G_2(\alpha_{an}.\beta_{an}) = \pi\, (r_e^2 - r_b^2)\, \Phi_b\, 2\, h_{cF}\, G_2(\alpha_{an}.\beta_{an})$$

Despejando r_e:

$$r_e^2 = r_b^2 + \frac{Q}{2\, \pi\, \Phi_b\, h_{cF}\, G_2(\alpha_{an}\beta_{an})} = 0{,}3^2\ m^2 + \frac{225{,}4\ Kcal/h}{2\, \pi\, x\, 100ºC\, x\, 5{,}6\ Kcal/hm^2\, ºC\, x\, 0{,}4} = 0{,}25\ m^2 \ \Rightarrow\ r_e = 0{,}5\ m$$

A partir de la ecuación: $\beta_{an} = \sqrt{\dfrac{2\, r_e^2\, h_{cF}}{k\, e}}$, se obtiene el espesor de la aleta:

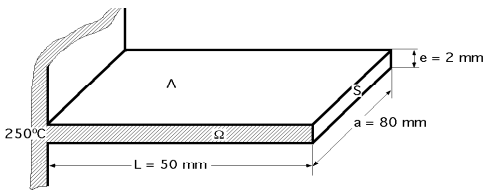
$$e = \frac{2\, r_e^2\, h_{cF}}{k\, \beta_{an}^2} = \frac{2\, x\, 0{,}5^2\, x\, 5{,}6}{50\, \beta_{an}^2} = \frac{0{,}056}{\beta_{an}^2}$$

Como: $\mu = G_2(\alpha_{an}.\beta_{an})$, es el rendimieto de la aleta anular, mediante la gráfica de G_2 se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{an} = \dfrac{r_b}{r_e} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6 \\ G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) = 0{,}4 \end{array} \right\} \ \Rightarrow\ \beta_{an} = 5{,}4 \ \Rightarrow\ e = \frac{0{,}056}{5{,}4^2} = 0{,}00192\ m$$

****

IV.2.- Una varilla de aluminio de sección transversal rectangular de 2 mm de espesor y 80 mm de anchura, (aleta de la culata de un motor, extremo libre aislado), tiene en su base de contacto con la culata una temperatura de 250°C.



Determinar

a) La temperatura en su extremo libre situado a 5 cm de la base, si se supone que la temperatura T_F del medio ambiente es de 15°C.

b) La cantidad de calor disipada al exterior y la eficiencia de la aleta

Otros datos: k = 200 Kcal/mh°C; h_{cF} = 40 Kcal/m²h°C

RESOLUCIÓN

a) Temperatura en el extremo libre de la aleta situado a 5 cm de la base, si se supone que la temperatura T_F del medio ambiente es de 15°C.

Protuberancia paralelepipédica con su extremo libre térmicamente aislado x = 1

$$T_L = T_F + \frac{T_b - T_F}{Ch\ \sqrt{Bi}} = \left| Bi = \frac{h_{cF}\ p\ L^2}{k\ S} = \frac{40\ (Kcal/hm^2\ °C)\ \{2\ (80 + 2).10^{-3}\}\ m\ x\ 0{,}05^2\ m^2}{200\ (Kcal/hmºC)\ (2\ x\ 80).10^{-6}\ m} = 0{,}5125 \right| =$$

$$= 15 + \frac{250 - 15}{Ch\ \sqrt{0{,}5125}} = 200ºC$$

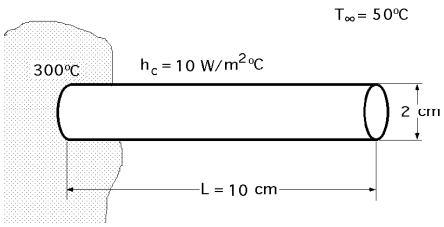
b) Calor disipado al exterior

$$Q = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\;Th\;\sqrt{Bi} = 200\,\frac{Kcal}{h\,m^oC}\,(2 \times 80).10^{-6}\,m^2\,\frac{(250 - 15)^oC}{0{,}05\ m}\,\sqrt{0{,}5125}\;Th\;\sqrt{0{,}5125} = 66{,}14\,\frac{Kcal}{hora}$$

Eficiencia de la aleta $\mu = \dfrac{Th\,\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \dfrac{Th\,\sqrt{0{,}5125}}{\sqrt{0{,}5125}} = 0{,}858$

****

IV.3.- Una protuberancia de acero inoxidable k =20 W/m.K tiene una sección recta circular con un diámetro de 2 cm y una longitud de 10 cm. La protuberancia está unida a una pared que tiene una temperatura de 300°C. El fluido que la rodea tiene una temperatura ambiente de 50°C y el coeficiente de película es de 10 W/m².°K.
El extremo de la protuberancia está aislado térmicamente. Con estos datos determinar:



a) El calor disipado por unidad de tiempo desde la protuberancia
b) La temperatura en el extremo de la protuberancia
c) La transferencia térmica por unidad de tiempo desde el área de la pared cubierta por la protuberancia si ésta no se utilizase
d) La transferencia de calor por unidad de tiempo desde una protuberancia con la misma geometría si el acero inoxidable de ésta se sustituye por un material ficticio de conductividad térmica infinita

---

RESOLUCIÓN

a) Calor disipado por unidad de tiempo desde la protuberancia con su extremo libre térmicamente aislado

$$Q = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\;Th\;\sqrt{Bi} = \left| \begin{array}{l} S = \dfrac{\pi\,d^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0{,}02^2}{4} = 10^{-4}\,\pi\,m^2 \\ Bi = \dfrac{h_{cF}\,p\,L^2}{k\,S} = \dfrac{10\ (\pi \times 0{,}02) \times 0{,}1^2}{20 \times 10^{-4}\,\pi} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{20 \times 10^{-4}\,\pi}{0{,}1}\,(300 - 50)\,\sqrt{1}\;Th\;\sqrt{1} = 11{,}96\ W$$

b) Temperatura en el extremo de la protuberancia, $\xi = 1$

$$\Phi(x) = \frac{Ch\,\{\sqrt{Bi}\ (1 - \xi)\}}{Ch\,\sqrt{Bi}} \xrightarrow{\xi = 1} \Phi(1) = \frac{Ch\,\{\sqrt{1}\ (1 - 1)\}}{Ch\,\sqrt{1}} = \frac{1}{1{,}543} = 0{,}648 = \frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} = \frac{T_L - 50}{300 - 50} \Rightarrow T_L = 212^oC$$

c) Transferencia térmica por unidad de tiempo desde el área de la pared cubierta por la protuberancia si ésta no se utilizase

El coeficiente de transmisión de calor en la superficie de la pared, cuando la protuberancia está en su sitio, le podemos suponer igual al de la protuberancia, por lo que:

$$Q = h_{cF}\,S\,(T_b - T_F) = h_{cF}\,\pi\,R^2\,(T_b - T_F) = 10\,\frac{W}{m^2.^oC} \times (\pi \times 10^{-4}\,m^2) \times (300 - 50)^oC = 0{,}785\ W$$

La presencia de la protuberancia aumenta la disipación de calor procedente del área de la superficie cubierta por la misma, siendo la mejora:

$$\text{Mejora} = \frac{11{,}96 - 0{,}785}{0{,}785} \times 100 = 1423{,}5\ \%$$

d) Transferencia de calor por unidad de tiempo desde una protuberancia con la misma geometría, si el acero inoxidable de ésta se sustituye por un material ficticio de conductividad térmica infinita

Para un material con $k = \infty$, $Bi = 0$, por lo que la protuberancia sería isoterma a T_b.

La transferencia de calor por unidad de longitud desde la protuberancia ideal es:

$$Q_{ideal} = h_{cF}\ A\,(T_b - T_F) = h_{cF}\ (\pi\,d\,L)\,(T_b - T_F) = 10\,\frac{W}{m^2\,^oC}\,(\pi \times 0{,}02 \times 0{,}1)\,m^2\,(300 - 50)^oC = 15{,}71\ W$$

que es el calor máximo posible que se podría disipar en la unidad de tiempo por la protuberancia ideal.

La protuberancia de acero inoxidable disipa: $\dfrac{15{,}71 - 11{,}96}{15{,}71} \times 100 = 24\%$

que es la cuarta parte de lo que disipa la protuberancia ideal

La eficiencia de la protuberancia es: $\mu = \dfrac{q_{real}}{q_{ideal}} = \dfrac{11{,}96 \times 100}{15{,}71} = 76{,}13\%$

****

IV.4.- Se desea construir un radiador de tubo con aletas y para ello se utiliza una tubería de cobre puro de diámetro exterior 14 mm y diámetro interior 10 mm con aletas de aluminio puro de espesor 0,2 mm y radio exterior 28 mm. Las aletas están separadas entre planos medios una distancia de 5 mm. El radiador tiene que disipar una carga térmica de 750 Kcal/hora cuando trabaja con agua a presión a la temperatura de 120°C, encontrándose el aire del medio ambiente a 20°C.

El valor del coeficiente de película h_{ce} (aleta-aire) es 25 Kcal/h.m²°C, mientras que el valor del coeficiente de película h_{ci} para el fluido que circula por el interior del tubo es de 1000 Kcal/h.m².°C.

Se sabe que la conductividad térmica del $\begin{cases} cobre\ es\ k_{cobre} = 326\ Kcal/h.m.°C \\ aluminio\ k_{aluminio} = 197\ Kcal/h.m.°C \end{cases}$

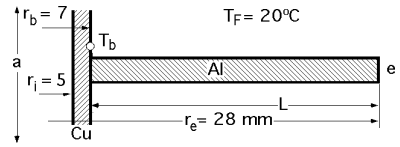
Determinar

a) La temperatura en la base de la aleta

b) El nº de aletas y la longitud del radiador necesaria para conseguir la mencionada disipación de calor

---

RESOLUCIÓN



$$Q = \frac{T_i - T_{pi}}{\frac{1}{A_i\ h_{ci}}} = \frac{T_{pi} - T_b}{\frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2\ \pi\ k_{Cu}\ a}} = \frac{T_b - T_F}{R_{aletas} + R_{tubo}} = \frac{T_b - T_F}{\frac{1}{h_{ce}\ (\mu\ A_{aletas} + A_{tubo})}}$$

a) Temperatura en la base de la aleta

Llamaremos $\begin{cases} N \text{ al nº total de aletas} \\ "a" \text{ la longitud del tubo} \end{cases}$, de forma que: $0{,}005\ N = a\ ;\ N = 200\ a$

Area de intercambio térmico (aletas + tubo) = $A_{aletas} + A_{tubo} = 2\ \pi\ (r_e^2 - r_b^2)\ N + 2\ \pi\ r_b\ (a - N\ e)$

Calor disipado el exterior:

$$Q = (\mu\ A_{aletas} + A_{tubo})\ h_{ce}\ (T_b - T_F) = [\mu\ 2\ \pi\ (r_e^2 - r_b^2)\ N + 2\ \pi\ r_b\ (a - N\ e)]\ h_{ce}\ (T_b - T_F)$$

A su vez entre el fluido interior a 120ºC y la base de la aleta se tiene:

$$Q = \frac{T_i - T_{pi}}{\frac{1}{A_i\ h_{ci}}} = \frac{T_{pi} - T_b}{\frac{1}{2\ \pi\ k_{Cu}\ a}\ \ln \frac{r_b}{r_i}} = \frac{T_i - T_b}{\frac{1}{A_i\ h_{ci}} + \frac{1}{2\ \pi\ k_{Cu}\ a}\ \ln \frac{r_b}{r_i}} = \frac{T_i - T_b}{\frac{1}{2\ \pi\ r_i\ a\ h_{ci}} + \frac{1}{2\ \pi\ k_{Cu}\ a}\ \ln \frac{r_b}{r_i}}$$

$$T_i - T_b = \frac{Q}{2\ \pi\ a}\ (\frac{1}{r_i\ h_{ci}} + \frac{1}{k_{Cu}}\ \ln \frac{r_b}{r_i}) = \frac{750}{2\ \pi\ a}\ (\frac{1}{0{,}005\ x\ 1000} + \frac{1}{326}\ \ln \frac{7}{5}) = \frac{24}{a} \quad \Rightarrow \quad T_b = 120 - \frac{24}{a}$$

$$Q_{aletas} = 2\ \pi\ \ (r_e^2 - r_b^2)\ \Phi_b\ N\ h_{ce}\ \eta_{an} = 2\ \pi\ \ (r_e^2 - r_b^2)\ \Phi_b\ N\ h_{cF}\ G_2(\alpha_{an}\ \beta_{an}) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{an} = \frac{r_b}{r_e} = \frac{7}{28} = 0{,}25 \\ \beta_{an} = \sqrt{\frac{2\ r_e^2\ h_{C\ ext}}{k\ e}} = \sqrt{\frac{2\ x\ 0{,}028^2\ x\ 25}{197\ x\ 0{,}0002}} = 0{,}9974 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad G_2\ (\alpha_{an}\beta_{an}) = 0{,}74 \\ T_b = 120 - \frac{24}{a}\ ;\ F_b = T_b - T_F = 120 - \frac{24}{a} - 20 = 100 - \frac{24}{a}\ ;\ \ 0{,}005\ N = a \ \Rightarrow \ N = 200\ a \end{array} \right| =$$

$$= 2\ \pi (0{,}028^2 - 0{,}007^2)\ (100 - \frac{24}{a})\ x\ 200\ a\ x\ 25\ x 0{,}74 = 1708{,}1\ a - 410{,}1$$

$$Q_{tubo\ sin\ aletas} = 2\ \pi\ r_b\ (a - N\ e)\ h_{ce}\ (T_b - T_F) = 2\ \pi\ r_b\ (a - 200\ a\ e)\ h_{ce}\ (T_b - T_F) =$$

$$= 2\ \pi\ x\ 0{,}007\ a\ \{1 - (200\ x\ 0{,}0002)\}\ x\ 25\ (100 - \frac{24}{a}) = 1{,}055\ a\ (100 - \frac{24}{a})$$

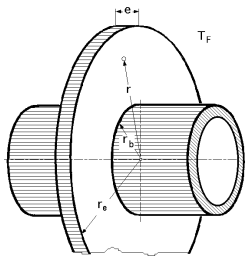
Longitud *"a"* del radiador:

$$Q = 750\ \frac{Kcal}{hora} = (1708{,}1\ a - 410{,}1) + 1{,}0555\ a\ (100 - \frac{24}{a}) = 1834{,}25\ a - 435{,}4 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}646\ m$$

$$T_b = 120 - \frac{24}{0,646} = 82,84ºC \quad ; \quad N = 200 \times 0,646 = 129 \text{ aletas}$$

****

IV.5.- Una aleta anular de perfil rectangular, de acero k = 44 Kcal/h.m.ºC y dimensiones e = 0,5 mm y L = 15 mm, se coloca en un tubo de 20 mm de diámetro exterior. La temperatura en la base de la aleta es T_b = 90ºC, la temperatura del fluido es T_F = 20ºC y el coeficiente de película h_{cF} = 100 Kcal/h.m².ºC



Determinar

a) La temperatura en el extremo de la aleta y en un radio r = 22 mm

b) La eficacia de la aleta

c) El calor transmitido al fluido desde la aleta

d) El calor transmitido al fluido desde la aleta por unidad de superficie

---

RESOLUCIÓN

a) Temperatura en el extremo de la aleta:

$$\frac{\Phi_e}{\Phi_b} = \frac{K_1(m\,r_e)\,I_0(m\,r_e) + K_0(m\,r_e)\,I_1(m\,r_e)}{K_1(m\,r_e)\,I_0(m\,r_b) + K_0(m\,r_b)\,I_1(m\,r_e)} = \left| \begin{array}{l} r_e = (10 + 15).10^{-3} = 25.10^{-3}\text{m} \\ m = \sqrt{\frac{2\,h_{cF}}{k\,e}} = \sqrt{\frac{2 \times 100}{44 \times 0,5.10^{-3}}} = 95,34 \\ m\,r_b = 95,34 \times 10.10^{-3} = 0,9534 \;\; ; \;\; m\,r_e = 95,34 \times 25.10^{-3} = 2,3836 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{K_1(2,3836)\,I_0(2,3836) + K_0(2,3836)\,I_1(2,3836)}{K_1(2,3836)\,I_0(0,9534) + K_0(0,9534)\,I_1(2,3836)} = \left| \begin{array}{l} K_1(2,3836) = 0,05456\;\pi/2 = 0,08570 \\ K_0(2,3836) = 0,04569\;\pi/2 = 0,07177 \\ K_0(0,9534) = 0,4545 \;\; ; \;\; I_0(0,9534) = 1,2429 \\ I_0(2,3836) = 3,0148 \;\; ; \;\; I_1(2,3836) = 2,2666 \end{array} \right| =$$

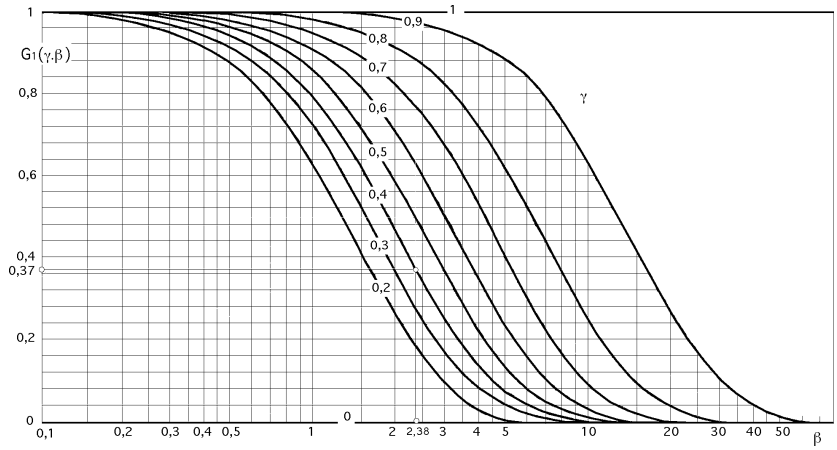
$$= \frac{(0,0857 \times 3,0148) + (2,2666 \times 0,07177)}{(0,0857 \times 1,2429) + (2,2666 \times 0,4545)} = 0,3704 = \frac{T_{extremo} - 20}{90 - 20} \quad \Rightarrow \quad T_{extremo} = 45,9ºC$$

Gráficamente

$$G_1(\gamma\,\beta) = \frac{K_1(\beta_{an})\;I_0(\beta_{an}) + K_0(\beta_{an})\;I_1(\beta_{an})}{K_1(\beta_{an})\;I_0(\gamma\,\beta_{an}) + K_0(\gamma\,\beta_{an})\;I_1(\beta_{an})} = \frac{\Phi_e}{\Phi_b} = \frac{T_e - T_F}{T_b - T_F}$$

Para: $\left| \begin{array}{l} \beta_{an} = m\,r_e = 2,3836 \\ \alpha_{an} = \frac{r_b}{r_e} = \frac{10}{25} = 0,4 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad G_1(\eta\;\beta_{an}) = 0,37 \;\; ; \;\; T_e = 20 + (0,37 \times 70) = 45,9ºC$

Para: $\left| \begin{array}{l} \beta_{an} = m\,r_e = 2,3836 \\ \alpha_{an} = \frac{r_b}{r} = \frac{10}{22} = 0,4545 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad G_1(\eta\;\beta_{an}) = 0,40 \;\; ; \;\; T_e = 20 + (0,4 \times 70) = 48ºC$



b) Eficiencia de la aleta. $\mu = \dfrac{k\ e\ \beta_{an}^2\ G_2(\alpha_{an}\,\beta_{an})}{k\ e\ \beta_{an}^2} = G_2(\alpha_{an}\,\beta_{an}) = \left| \begin{matrix} \beta_{an} = 2{,}3836 \\ \alpha_{an} = 0{,}4 \end{matrix} \right| = 0{,}51$

De otra forma: $\left\{ \begin{matrix} L\sqrt{\dfrac{2\,h_{cF}}{h\,e}} = 0{,}015\ \sqrt{\dfrac{2\ x\ 100}{44\ x\ 0{,}5.10^{-3}}} = 1{,}43 \\ \dfrac{r_e}{r_b} = \dfrac{25}{10} = 2{,}5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mu = 0{,}52$

c) El calor transmitido al fluido desde la aleta

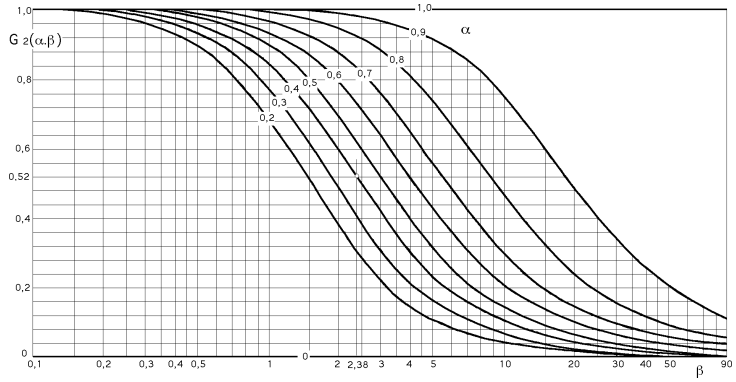
$$Q = \pi\,(1 - \alpha_{an}^2)\,k\,e\,\Phi_b\ \beta_{an}^2\ G_2\,(\alpha_{an}\beta_{an}) = \pi\,(1 - 0{,}4^2)\ x\ 44\ x\ 0{,}5.10^{-3}\,(90 - 20)\ x\ 2{,}3836^2\ x\ 0{,}52 = 12\ \frac{Kcal}{h}$$

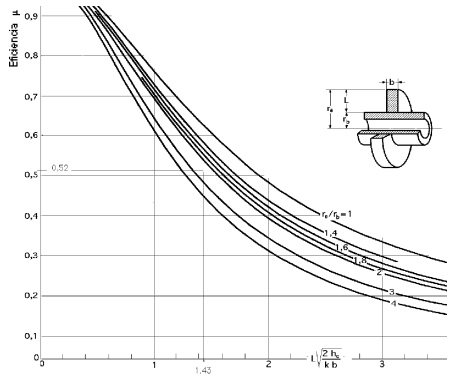
Comprobación:

$$Q = \mu\ Q_i = 0{,}52\ h_{cF}\ 2\ A\ (T_b - T_F) = 0{,}52\ x\ 100\ \frac{Kcal}{h\ m^2\ ºC}\ x\ 2\ \pi\ (25^2 - 10^2).10^{-6}\ (m^2)\ x\ 70ºC = 12\ \frac{Kcal}{hora}$$

d) El calor transmitido al fluido desde la aleta por unidad de superficie, es el flujo térmico, de valor:

$$\frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\ \pi\ (25^2 - 10^2).10^{-6}\ m^2} = \frac{12\ Kcal/hora}{0{,}003298\ m^2} = 3568\ \frac{Kcal}{h\ m^2}$$





****

IV.6.- Sobre un tubo de una determinada aleación, de 30 mm de diámetro exterior, se desea colocar aletas longitudinales de perfil triangular. La base de estas aletas tiene un espesor de 1,5 mm siendo el espacio vacío entre las bases de dos aletas consecutivas de aproximadamente 4 mm. El coeficiente de película para el tubo y las aletas es de 25 W/m²°C y la conductividad térmica del material de 75 W/m°C.

Determinar: a) La altura óptima de la aleta

b) El calor disipado al exterior por metro de longitud de tubería (en Kcal) si la temperatura exterior del tubo es de 100°C y la del aire de 25°C, en condiciones de diseño óptimo de la aleta. Mejora obtenida.

c) La temperatura en el centro de gravedad de la aleta y en su vértice.

RESOLUCIÓN

a) Altura óptima de la aleta (Se entiende que es la altura del perfil triangular)

$$b_{ópt} = 1{,}6718\ (\frac{\Omega^2\ h_{cF}}{k})^{1/3}$$

$$L_{ópt} = 1{,}196\ (\frac{\Omega\ k}{h_{cF}})^{1/3} = \frac{2\ \Omega}{b_{óp}} = 1{,}196\ (\frac{b\ L_{ópt}\ k}{2\ h_{cF}})^{1/3} = 1{,}196\ (\frac{b\ k}{2\ h_{cF}})^{1/3}\ L_{ópt}^{1/3}$$

$$L_{ópt}^{2/3} = 1{,}196\ (\frac{b\ k}{2\ h_{cF}})^{1/3} = 1{,}196\ (\frac{0{,}0015\ \ x\ \ 75}{2\ x\ 25})^{1/3} = 0{,}1567 \quad ; \quad L_{ópt} = 0{,}062\ m$$

b) Calor disipado al exterior por metro de longitud de tubería (en Kcal) si la temperatura exterior del tubo es de 100°C y la del aire de 25°C, en condiciones de diseño óptimo de la aleta:

$$Q_{1aleta} = -\Phi_b\ k\ b\ \frac{\beta_t}{2\,L}\ G_4(\beta_t) = \left| \begin{array}{l} \Phi_b = 100 - 25 = 75ºC \\ \beta_t = \sqrt{\dfrac{8\ f\ h_{cF}\ L^2}{k\ b}} = \{f = 1\} = \sqrt{\dfrac{8 \times 25 \times 0{,}062^2}{75 \times 0{,}0015}} = 2{,}614 \\ G_4(\beta_t) = G_4(2{,}614) = 0{,}77 \end{array} \right| =$$

$$= -75 \times 75 \times 0{,}0015 \times \frac{2{,}614}{2 \times 0{,}062} \times 0{,}77 = -136{,}95\ \frac{W}{m}\ \text{(calor cedido)}$$

Nº de aletas: $\pi\, d_b = (1{,}5 + 4)\, N \quad \Rightarrow \quad N = \dfrac{30\,\pi}{5{,}5} = 17{,}3 \quad \Rightarrow \quad$ (17 aletas)

$$Q_{N\ aletas} = 17 \times 136{,}95\ \frac{W}{m} = 2328{,}15\ \frac{W}{m}$$

Calor disipado por el tubo limpio de aletas: $Q_{tubo\ sin\ aletas} = 2\,\pi\, r_b\, a\, h_{cF}\,(T_b - T_F) = 2\,\pi\,\dfrac{0{,}03}{2} \times 1 \times 25 \times 75 = 176{,}71\ \dfrac{W}{m}$

Fracción de calor disipado por el tubo, cuando lleva aletas:

$$Q_{tubo} = a\, h_{cF}\,(T_b - T_F)\,(\pi\, d_b - N\, b) = 1 \times 25 \times 75\ \{0{,}03\,\pi - (17 \times 0{,}0015)\} = 128{,}9\ \frac{W}{m}$$

Calor total disipado al exterior: $Q = 128{,}9 + 2328{,}15 = 2457$ W/m $\quad \Rightarrow \quad$ Mejora $= \dfrac{2457 - 176{,}7}{176{,}7}\ 100 = 1290\%$

c) La temperatura en el centro de gravedad de la aleta es: $\dfrac{\Phi_{cdg}}{\Phi_b} = \dfrac{T_{cdg} - T_F}{T_b - T_F} = \dfrac{I_0(2\,n\,\sqrt{x})}{I_0(2\,n\,\sqrt{L})}$

$$T_{cdg} = T_F + (T_b - T_F)\ \frac{I_0(2\,n\,\sqrt{x})}{I_0(2\,n\,\sqrt{L})} = 25 + 75\ \frac{I_0(2\,n\,\sqrt{x})}{I_0(2\,n\,\sqrt{L})} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Centro de gravedad: } x = \dfrac{2\,L}{3} = \dfrac{2 \times 0{,}062}{3}\ m = 0{,}0413\ m \\ n = \sqrt{\dfrac{2\ f\ h_{cF}\ L}{k\ b}} = \{f = 1\} = \sqrt{\dfrac{2 \times 25 \times 0{,}062}{75 \times 0{,}0015}} = 5{,}25 \\ I_0(2\,n\,\sqrt{L}) = \left\{ 2\,n\,\sqrt{L} = 2 \times 5{,}25\ \sqrt{0{,}062} = 2{,}6144 \right\} = I_0(2{,}6144) = 3{,}5968 \\ I_0(2\,n\,\sqrt{x}) = \left\{ 2\,n\,\sqrt{x} = 2 \times 5{,}25\ \sqrt{0{,}0413} = 2{,}1338 \right\} = I_0(2{,}1338) = 2{,}5134 \end{array} \right| = 25 + 75\ \frac{2{,}5134}{3{,}5968} = 77{,}4ºC$$

DE OTRA FORMA

$$\frac{\Phi_{(c.d.g.)}}{\Phi_b} = G_3(\beta_t \eta_t) = \left| \begin{array}{l} \beta_t = 2{,}614\ ;\ h_t = \sqrt{\dfrac{x}{L}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = 0{,}8185 \\ \beta_t \eta_t = 2{,}614 \times 0{,}8165 = 2{,}1343 \end{array} \right| = G_3(2{,}1343) = 0{,}70 = \frac{T_{(c.d.g.)} - 25}{100 - 25} \quad \Rightarrow$$

$$T_{(c.d.g.)} = 25 + (75 \times 0{,}7) = 77{,}5ºC$$

Temperatura en el vértice de la aleta

$$\frac{\Phi_{vértice}}{\Phi_b} = \frac{T_{vértice} - T_F}{T_b - T_F} = \frac{I_0(2\,n\,\sqrt{x})}{I_0(2\,n\,\sqrt{L})} = \left| \begin{array}{l} \text{Vértice} \ \Rightarrow\ x = 0\ ;\ I_0(0) = 1 \\ I_0(2\,n\,\sqrt{L}) = I_0(2{,}6144) = 3{,}5968 \end{array} \right| = \frac{1}{3{,}5968} = 0{,}278$$

$$T_{vértice} = T_F + 0{,}278\,(T_b - T_F) = 25 + 0{,}278 \times 75 = 45{,}86ºC$$

****

IV.7.- Un determinado fluido de propiedades: ρ = 0,75 gramos/cm³; c_p = 0,35 Kcal/kgºC, se calienta desde 80ºC hasta 120ºC, a razón de 50.000 kg/hora. Para mejorar el proceso térmico se utilizan tubos de acero de 20 mm de diámetro exterior, de conductividad térmica k = 60 Kcal/h.m.ºC, con aletas longitudinales triangulares del mismo material que el tubo, de base 1,5 mm, siendo la distancia entre los centros de sus bases de 4 mm. La temperatura media de la base de las aletas se estima en 150ºC en toda la longitud del tubo. El coeficiente medio de película es: h_{CF} = 500 Kcal/h.m².ºC

Determinar:

a) La longitud óptima de las aletas (Se entiende que es la altura del perfil triangular) y rendimiento

b) La temperatura en el vértice de las aletas

c) El número de tubos, si se utilizan tubos de 3 metros de longitud

d) El número de tubos a utilizar, si se sustituyen las aletas longitudinales triangulares, por otras aletas transversales triangulares de rendimiento 60%, base 1,5 mm, y distancia entre los centros de sus bases 10 mm, sobre tubos de 3 metros de longitud, manteniendo la longitud óptima del apartado (a)

RESOLUCIÓN

ALETAS TRIANGULARES LONGITUDINALES

a) Longitud óptima de las aletas : $L_{ópt} = 1{,}196 \left(\frac{\Omega\, k}{h_{cF}}\right)^{1/3} = \frac{2\ \Omega}{b_{óp}} = 1{,}196 \left(\frac{b\, L_{ópt}\, k}{2\, h_{cF}}\right)^{1/3} = 1{,}196 \left(\frac{b\, k}{2\, h_{cF}}\right)^{1/3} L_{ópt}^{1/3}$

$$L_{ópt}^{2/3} = 1{,}196 \left(\frac{b\, k}{2\, h_{cF}}\right)^{1/3} = 1{,}196 \left(\frac{0{,}0015 \times 60}{2 \times 500}\right)^{1/3} = 0{,}0536 \quad ; \quad L_{ópt} = 0{,}0124 \text{ m} = 12{,}4 \text{ mm}$$

Rendimiento de las aletas:

$$\eta = \frac{2\, G_4(\beta_t)}{\beta_t} = \left| \begin{array}{l} n = \sqrt{\frac{2\, f\, h_{cF}\, L}{k\, b}}\ \frac{2 \times 1 \times 500 \times 12{,}41.10^{-3}}{60 \times 15.10^{-3}} = 11{,}74 \\ \beta_t = 2\,\pi\,\sqrt{L} = 2 \times 11{,}74\,\sqrt{12{,}41.10^{-3}} = 2{,}616 \Rightarrow G_4(\beta_t) = \frac{I_1(\beta_t)}{I_0(\beta_t)} = \frac{I_1(2{,}616)}{I_0(2{,}616)} = \frac{2{,}799}{3{,}602} = 0{,}775 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2 \times 0{,}775}{2{,}616} = 0{,}594 = 59{,}4\%$$

que es un resultado lógico puesto que está construida con dimensiones óptimas y en estas condiciones el rendimiento óptimo sabemos es del orden del 60%

b) Temperatura en el vértice de las aletas

$$\frac{\Phi_{vértice}}{\Phi_b} = \frac{I_0\,(2\,n\sqrt{x})}{I_0\,(2\,n\sqrt{L})} = \left| \begin{array}{l} \text{Vértice: } x = 0 \ ; \ I_0\,(0) = 1 \\ I_0\,(2\,n\sqrt{L}) = I_0\,(2{,}616) = 3{,}6 \end{array} \right| = \frac{1}{3{,}6} = 0{,}2776$$

$$T_F = \frac{80 + 120}{2} = 100ºC$$

$$T_{vértice} = T_F + 0{,}2776\,(T_b - T_F) = 100 + 0{,}2776 \times (150 - 100) = 113{,}88ºC$$

c) Número de tubos, si tienen 3 metros de longitud

Calor evacuado por una aleta longitudinal por 1 m de longitud de tubería:

$$q_{1aleta} = \mu\ h_{cF}\, A\,(T_b - T_F) = \left| A = 2 \times 0{,}0124 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 0{,}0248 \text{ m}^2 \right| = 0{,}594 \times 500 \times 0{,}0248\,(150 - 100) = 368{,}95 \ \frac{Kcal}{h\ m}$$

En 3 m de tubo el calor disipado por una aleta longitudinal es: $q_{3m\ aletas} = 368{,}95 \ \frac{Kcal}{h\ m} \times 3 \text{ m} = 1107 \ \frac{Kcal}{hora}$

Nº de aletas longitudinales: $\frac{\pi\, d_e}{(1{,}5 + 2.5).10^{-3}} = 15{,}7 \quad \Rightarrow \quad 16$

Calor evacuado por las aletas en cada tubo de 3 m de longitud = $q_{3\ m\ aletas} \times n = 1107 \times 16 = 17712 \ \frac{Kcal}{h}$

Calor evacuado por la fracción de tubo de 3 m sin aletas = $3 \text{ m} \times \{\pi\, d_e - (16 \times 0{,}0015)\} \times h_{cF}\ (150 - 100) = 2912{,}4 \ \frac{Kcal}{h}$

Calor total evacuado por el tubo de 3 m con aletas = $2912{,}4 + 17712 = 20624{,}4 \ \frac{Kcal}{hora}$

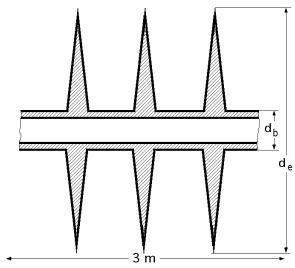
Calor total a disipar: $m\, c_p\, (T_1 - T_2) = 50000 \ \frac{kg}{hora} \times 0{,}35 \ \frac{Kcal}{kgºC} \times (120 - 80)ºC = 700000 \ \frac{Kcal}{hora}$

Nº de tubos de 3 m de longitud = $\frac{700000}{20624{,}4} = 33{,}9 \quad \Rightarrow \quad 34$ tubos

ALETAS TRIANGULARES TRANSVERSALES

d) Número de tubos a utilizar, si se sustituyen las aletas longitudinales triangulares, por otras aletas transversales triangulares de rendimiento 60%, base 1,5 mm, y distancia entre los centros de sus bases 10 mm, sobre tubos de 3 metros de longitud, manteniendo la longitud óptima del apartado (a)

$d_e = d_b + 2\, L_{ópt} = 20 + (2 \times 12{,}4) = 44{,}8$ mm



$A_a = 2\,\pi\,(r_e^2 - r_b^2) = 2\,\pi\,(22{,}4^2 - 10^2)10^{-6}\ m^2 = 0{,}00252\ m^2$

$q_{1\ aleta} = \mu\ h_{cF}\ A\ (T_b - T_F) = 0{,}6 \times 500 \times 0{,}00252 \times (150 - 100) = 37{,}86\ \frac{Kcal}{hora}$

Nº de aletas en cada tubo de 3 m de longitud $= \frac{3}{0{,}01} = 300$

Calor evacuado por las aletas en cada tubo: $300 \times 37{,}86 = 11358\ \frac{Kcal}{hora}$

Calor evacuado por el tubo por la parte que no lleva aletas:

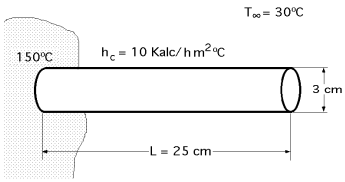
$= (\pi\, d_b \times 0{,}0085 \times 300)\, h_{cF}\, (150 - 100) = \left| d_b = 0{,}02m\ ;\ h_{cF} = 500\ Kcal/h\ m^2\ ºC \right| = 4005\ Kcal/h$

Calor total evacuado por el tubo de 3 m con aletas $= 4005 + 11358 = 15363\ \frac{Kcal}{hora}$

Número de tubos de 3 metros de longitud $= \frac{700.000}{15363} = 45{,}56 \Rightarrow$ **46 tubos**

****

IV.8.- Una aguja de 25 cm de longitud y 3 cm de diámetro sobresale de un objeto. La temperatura en la base T_b=150°C, mientras que el medio exterior se encuentra a T_∞=30°C. Suponiendo un coeficiente de película constante h_{cF} = 10 Kcal/h.m²°C, calcular para los siguientes casos:



a) Varilla de Cu: k = 332 Kcal/h.m°C

b) Varilla de acero de 0,5% C: k = 46 Kcal/h.m°C

c) Vidrio: k = 0,94 Kcal/h.m°C

1) La temperatura en los puntos situados a 1/5,2/5,3/5,4/5 y 5/5 de la distancia entre la base y el extremo, suponiendo despreciable el flujo de calor en el extremo

2) El flujo calorífico por hora cedido por la varilla, con flujo de calor en el extremo, h_{cF}= 10 Kcal/hm²°C

2b) El flujo calorífico por hora cedido por la varilla, despreciando el flujo de calor en el extremo

2c) El flujo calorífico por hora cedido por la varilla, considerándola muy larga

---

RESOLUCIÓN

1) Temperatura en los puntos situados a 1/5,2/5,3/5,4/5 y 5/5 de la distancia entre la base y el extremo, suponiendo despreciable el flujo de calor en el extremo

Para el supuesto de flujo de calor despreciable en el extremo, la distribución de temperaturas es:

$$\frac{T_x - T_F}{T_b - T_F} = \frac{Ch\{\sqrt{Bi}\ (1 - \xi)\}}{Ch\sqrt{Bi}},\ \text{siendo: } \xi = \frac{x}{L}\ ;\ p = 2\,\pi\,r\ ;\ S = \pi\,r^2$$

$$Bi = \frac{h_C\ p\ L^2}{k\ S} = \frac{1000 \times 2\,\pi \times 0{,}015 \times 0{,}25^2}{k \times \pi \times 0{,}15^2} = \frac{83{,}33}{k} \Rightarrow \begin{cases} Cu \Rightarrow k_{Cu} = 332\ Kcal/hmºC\ ;\ Bi = 0{,}25 \\ Acero\ 0{,}5\%\ C \Rightarrow k_{Acero} = 46\ Kcal/hmºC\ ;\ Bi = 1{,}81 \\ Vidrio \Rightarrow k_{Vidrio} = 0{,}94\ Kcal/hmºC\ ;\ Bi = 88{,}65 \end{cases}$$

$$T(\xi) = T_F + (T_b - T_F)\ \frac{Ch\{\sqrt{Bi}\ (1 - \xi)\}}{Ch\sqrt{Bi}} = \left| T_b - T_F = 150 - 30 = 120ºC \right| = 30 + 120\ \frac{Ch\{\sqrt{Bi}\ (1 - \xi)\}}{Ch\sqrt{Bi}}$$

Para el Cu: $Bi = 0{,}25$; $\xi_1 = \frac{1}{5}$; $T_1 = 30 + 120\ \frac{Ch\{\sqrt{0{,}25}\,(1 - \frac{1}{5})\}}{Ch\sqrt{0{,}25}} = 145{,}05ºC \Rightarrow \begin{cases} \xi_2 = 2/5\ ;\ T_2 = 141{,}24ºC \\ \xi_3 = 3/5\ ;\ T_3 = 138{,}45ºC \\ \xi_4 = 4/5\ ;\ T_4 = 136{,}95ºC \\ \xi_5 = 1\ \ ;\ T_5 = 136{,}42ºC \end{cases}$

Para el Acero: $Bi = 1{,}81$; $\xi_1 = \frac{1}{5}$; $T_1 = 30 + 120\ \frac{Ch\{\sqrt{1{,}81}\,(1 - \frac{1}{5})\}}{Ch\sqrt{1{,}81}} = 125{,}84ºC \Rightarrow \begin{cases} \xi_2 = 2/5\ ;\ T_2 = 108{,}66ºC \\ \xi_3 = 3/5\ ;\ T_3 = 96{,}94ºC \\ \xi_4 = 4/5\ ;\ T_4 = 90{,}42ºC \\ \xi_5 = 1\ \ ;\ T_5 = 88{,}3ºC \end{cases}$

Para el Vidrio: $Bi = 0{,}25$; $\xi_1 = \frac{1}{5}$; $T_1 = 30 + 120\,\frac{Ch\{\sqrt{88{,}65}\,(1 - \frac{1}{5})\}}{Ch\sqrt{88{,}65}} = 48{,}25ºC \Rightarrow \begin{cases} \xi_2 = 2/5 \ ; \ T_2 = 32{,}77ºC \\ \xi_3 = 3/5 \ ; \ T_3 = 30{,}42ºC \\ \xi_4 = 4/5 \ ; \ T_4 = 30{,}066ºC \\ \xi_5 = 1 \ ; \ T_5 = 30{,}02ºC \end{cases}$

2) Flujos caloríficos por hora cedidos por las varillas:

2a) Con flujo de calor en el extremo (Coeficiente de película en el extremo 10 Kcal/hm²°C

$$Q = \frac{k\,S\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}}{L}\,\frac{Th\sqrt{Bi} + \frac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}}{1 + \frac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}\,Th\sqrt{Bi}} = \left| \begin{array}{l} \frac{S}{p\,L} = \frac{\pi r^2}{2\,\pi\,r\,L} = \frac{r}{2\,L} = \frac{0{,}015}{2 \times 0{,}25} = 0{,}03 \\ \frac{S}{L}\,(T_b - T_F) = 0{,}34 \end{array} \right| =$$

$$= 0{,}34\,k\,\sqrt{Bi}\,\frac{Th\sqrt{Bi} + 0{,}03\,\sqrt{Bi}}{1 + 0{,}03\,\sqrt{Bi}\,Th\sqrt{Bi}}$$

Para el Cu: $Q = 0{,}34 \times 332\,\frac{Kcal}{h\,m\,ºC}\,\sqrt{0{,}25}\,\frac{Th\sqrt{0{,}25} + 0{,}03\,\sqrt{0{,}25}}{1 + 0{,}03\,\sqrt{0{,}25}\,Th\sqrt{0{,}25}} = 26{,}84\,\frac{Kcal}{hora}$

Para el acero: $Q = 0{,}34 \times 46\,\frac{Kcal}{h\,m\,ºC}\,\sqrt{1{,}81}\,\frac{Th\sqrt{1{,}81} + 0{,}03\,\sqrt{1{,}81}}{1 + 0{,}03\,\sqrt{1{,}81}\,Th\sqrt{1{,}81}} = 18{,}56\,\frac{Kcal}{hora}$

Para el vidrio: $Q = 0{,}34 \times 0{,}94\,\frac{Kcal}{h\,m\,ºC}\,\sqrt{88{,}65}\,\frac{Th\sqrt{88{,}65} + 0{,}03\,\sqrt{88{,}65}}{1 + 0{,}03\,\sqrt{88{,}65}\,Th\sqrt{88{,}65}} = 3{,}009\,\frac{Kcal}{hora}$

2b) Despreciando el flujo de calor en el extremo: $Q = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\,Th\sqrt{Bi} = 0{,}34\,k\,\sqrt{Bi}\,Th\sqrt{Bi}$

Para el Cu: $Q = 0{,}34 \times 332\,\frac{Kcal}{h\,mºC}\,\sqrt{0{,}25}\,Th\sqrt{0{,}25} = 26{,}03\,\frac{Kcal}{hora}$

Para el acero: $Q = 0{,}34 \times 46\,\frac{Kcal}{h\,mºC}\,\sqrt{1{,}81}\,Th\sqrt{1{,}81} = 18{,}33\,\frac{Kcal}{hora}$

Para el vidrio: $Q = 0{,}34 \times 0{,}94\,\frac{Kcal}{h\,mºC}\,\sqrt{88{,}65}\,Th\sqrt{88{,}65} = 3{,}003\,\frac{Kcal}{hora}$

2c) Considerando aletas muy largas: $Q = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi} = 0{,}34\,k\,\sqrt{Bi}$

Para el Cu: $Q = 0{,}34 \times 332\,\frac{Kcal}{h\,m^2\,ºC}\,\sqrt{0{,}25} = 56{,}32\,\frac{Kcal}{hora}$

Para el acero: $Q = 0{,}34 \times 46\,\frac{Kcal}{h\,mºC}\,\sqrt{1{,}81} = 21\,\frac{Kcal}{hora}$

Para el vidrio: $Q = 0{,}34 \times 0{,}94\,\frac{Kcal}{h\,mºC}\sqrt{88{,}65} = 3{,}003\,\frac{Kcal}{hora}$

A la vista de los resultados, y por lo que respecta a los calores desprendidos, se observa que cuando las conductividades son bajas, el hecho de considerar aletas muy largas es perfectamente válido.

En casi todos los casos se puede considerar el flujo de calor en el extremo despreciable.

****

IV.9.- Se desea incrementar el paso de calor desde una pared plana al medio ambiente que la rodea, instalando para ello aletas de diferentes tipos sobre dicha superficie, de tal forma que sobresalgan de la superficie de la pared una longitud de 20 cm, siendo el material utilizado un conductor de k =40 Kcal/h.m°C y suponiendo en cualquier caso un coeficiente de transmisión de calor sólido-fluido de 17 Kcal/h.m².°C.

Bajo estas condiciones se desea saber:

a) La configuración que será la más eficaz de entre las siguientes:

a.1) Aleta recta de perfil rectangular constante, de espesor e =1,25 cm y anchura unidad

a.2) Aleta triangular de similar base de apoyo a la anterior

b) Material con el que se debe construir la aleta triangular, tomando como referencia su conductividad térmica, para que en las condiciones anteriores tenga la misma efectividad que la encontrada para la aleta rectangular.

RESOLUCIÓN

a.1) Aleta recta de perfil rectangular constante, de espesor e =1,25 cm y anchura unidad

$$Bi = \frac{p\, h_{cF}\, L^2}{k\, S} = \left| \begin{array}{l} p = 2\,(e + a) = 2\,(0,0125 + 1) = 2,025 \text{ m} \\ S = e\, a = 0,0125 \times 1 = 0,0125 \text{ m}^2 \end{array} \right| = \frac{2,025 \times 17 \times 0,2^2}{40 \times 0,0125} = 2,754$$

Aleta recta, aislada térmicamente en su extremo libre:

$$\eta = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{Th\sqrt{2,754}}{\sqrt{2,754}} = 0,56$$

Aleta recta, con convección en su extremo libre:

$$\eta = \frac{\dfrac{k\,S\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}}{L}\ \dfrac{Th\sqrt{Bi} + \dfrac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}}{1 + \dfrac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}\,Th\sqrt{Bi}}}{h_{cF}\ A\,(T_b - T_F)} = \left| A = 2\,a\,L \right| = \frac{1}{\sqrt{Bi}}\ \frac{Th\sqrt{Bi} + \dfrac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}}{1 + \dfrac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}\,Th\sqrt{Bi}} =$$

$$= \left| \frac{S\sqrt{Bi}}{p\,L} = \frac{0,0125\,\sqrt{2,754}}{2,025 \times 0,2} = 0,05122 \right| = \frac{1}{\sqrt{2,754}}\ \frac{Th\sqrt{2,754} + 0,05122}{1 + 0,05122\,Th\sqrt{2,754}} = 0,547$$

Aleta triangular

$$\eta = \frac{1}{n\sqrt{L}}\ \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})} = \frac{2\,G_4(b_t)}{b_t} = \left| \begin{array}{l} f = \sqrt{1 + (\frac{b}{2L})^2} = \sqrt{1 + (\frac{0,0125}{2 \times 0,2})^2} = 1,00048 \text{ (cond. unidireccional} \\ n = \sqrt{\dfrac{2\,f\,h_{cF} L}{kb}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 1,00048 \times 17 \times 0,2}{40 \times 0,0125}} = 3,6887 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} n\sqrt{L} = 3,6878 \times \sqrt{0,2} = 1,6492 \ ; \ 2n\sqrt{L} = 2 \times 3,6878 \times \sqrt{0,2} = 3,2993 \\ I_0(2n\sqrt{L}) = I_0(3,2993) = 6,258 \ ; \ I_1(2n\sqrt{L}) = I_1(3,2993) = 5,195 \end{array} \right| = \frac{1}{1,6492}\ \frac{5,195}{6,258} = 0,5033$$

Se observa que el rendimiento de las aletas rectangulares es superior al de la aleta triangular.

b) Material con el que se debe construir la aleta triangular, tomando como referencia su conductividad térmica, para que en las condiciones anteriores tenga la misma efectividad que la encontrada para la aleta rectangular. Hay que determinar la conductividad térmica del material

La ecuación a resolver es: $0,58 = \dfrac{1}{n\sqrt{L}}\ \dfrac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})} = \left\{ n\sqrt{L} = N \right\} = \dfrac{1}{N}\ \dfrac{I_1(2N)}{I_0(2N)}$

N	0,58 N	$I_0(2N)$	$I_1(2N)$	$\frac{I_1(2N)}{I_0(2N)}$	
1	0,58	2,2796	1,5906	0,6967	0,58 < 0,6967
1,5	0,87	4,8808	3,9534	0,8099	0,87 > 0,8099
1,4	0,812	4,1573	3,3011	0,7941	0,812 > 0,794
1,3	0,754	3,5533	2,7554	0,7754	0,754 < 0,7754
1,35	0,783	3,8553	3,0282	0,7854	0,783 < 0,785

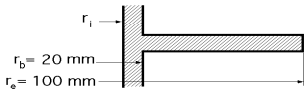
Un valor aceptable es: N = 1,35, luego:

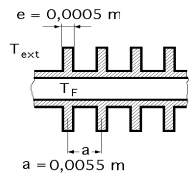
$$n = \sqrt{\frac{2\,h_{cF}\,L}{k\,b}} = \frac{N}{\sqrt{L}} \ ; \ N = \sqrt{\frac{2\,h_{cF}}{k\,b}}\,L \ ; \ k = \frac{2\,h_{cF}\,L^2}{b\,N^2} = \frac{2 \times 17 \times 0,2^2}{0,0125 \times 1,35^2} = 59,7\ \frac{\text{Kcal}}{\text{h m }^a\text{C}}$$

****

IV.10.- A un tubo de 40 mm de diámetro exterior se le adosan aletas anulares de aluminio k=197 Kcal/h m°C, de 0,5 mm de espesor y 100 mm de radio exterior separadas entre si una distancia de 5 mm. Las aletas están aisladas térmicamente en su extremo. La presencia de un fluido exterior implica la existencia de un coeficiente de película de 60 Kcal/h.m²°C.

Si existe una diferencia de temperaturas de 50°C entre la superficie del tubo y el medio exterior, determinar:





a) El calor disipado en 1 metro de longitud de tubería sin aletas
b) El calor disipado en 1 metro de longitud de tubería con aletas
c) La temperatura en el extremo aislado de la aleta
d) El aumento en % del calor disipado, por el hecho de colocar las aletas

---

RESOLUCIÓN

a) Calor disipado en cada metro de longitud de tubería sin aletas

$$q_{tubo\ (1\ m)} = (\pi\, d_b\, 1)\, h_{C\,ext}\, \Phi_b = \pi \times 0{,}04 \times 60 \times 50 = 377\ \frac{Kcal}{h\ m}$$

b) Calor disipado en cada metro de longitud de tubería con aletas

Calor disipado por una aleta:

$$q_{1\ aleta} = \pi\,(1 - \alpha_{an}^2)\, k\, e\, \Phi_b\ \beta_{an}^2\ G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) = \left| \begin{array}{l} \alpha_{an} = r_b / r_e = 0{,}02/0{,}1 = 0{,}2 \\ \beta_{an} = \sqrt{\dfrac{2\, r_e^2\ h_{C\,ext}}{k\, e}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 0{,}1^2 \times 60}{197 \times 0{,}0005}} = 3{,}49 \\ \alpha_{an}\beta_{an} = 0{,}7 \ \Rightarrow\ G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) = G_2(0{,}7) = 0{,}18 \end{array} \right| =$$

$$= \pi\,(1 - 0{,}2^2) \times 197 \times 0{,}0005 \times 50 \times 3{,}49^2 \times 0{,}18 = 32{,}56\ \frac{Kcal}{h}$$

Calor disipado por la parte de tubo correspondiente a cada aleta:

$$q_{tubo} = (\pi\, d_b\, 0{,}005)\, h_{C\,ext}\, \Phi_b = \pi \times 0{,}04 \times 0{,}005 \times 60 \times 50 = 1{,}885\ \frac{Kcal}{h}$$

Calor disipado por una aleta más el tubo correspondiente a la misma:

$$q_{tubo} + q_{aleta} = 1{,}885 + 32{,}56 = 34{,}445\ \frac{Kcal}{h\ m}$$

b) Si existe una diferencia de temperaturas de 50°C entre la superficie del tubo y el medio exterior, determinar el calor disipado por cada metro de longitud de tubería con aletas.

Nº de aletas por 1 m de longitud de tubería : $\dfrac{1}{a = 0{,}0055} = 182$

$$Q_{disipado\ por\ 1\ m\ de\ tubo\ con\ aletas} = 34{,}445 \times 182 = 6270\ \frac{Kcal}{h\ m}$$

DE OTRA FORMA:

Rendimiento de la aleta anular : $\mu = G_2(\alpha_{an}\, \beta_{an}) = 0{,}18$

$$q_{aleta\ real} = \mu\ q_{aleta\ ideal} = \mu\ h_{c\,ext}\, A\, (T_b - T_{ext}) = \left| A = 2\,\pi\,(r_e^2 - r_b^2) = 2\,\pi\,(0{,}1^2 - 0{,}02^2) = 0{,}0603\ m^2 \right| =$$

$$= 0{,}18 \times 60\ \frac{Kcal}{hm^2\ ºC} \times 0{,}0603\ m^2 \times 50ºC = 32{,}56\ \frac{Kcal}{hora}$$

$$q_{tubo} = (\pi\, d_b \times 0{,}005)\, h_{c\,ext}\, \Phi_b = \pi \times 0{,}04 \times 0{,}005 \times 60 \times 50 = 1{,}8848\ Kcal/hora$$

$$Q_{tubo\ +\ aletas} = (1{,}8848 + 32{,}57) \times 182 = 6270{,}7\ Kcal/h.m\ lineal$$

c) Temperatura en el extremo aislado de la aleta

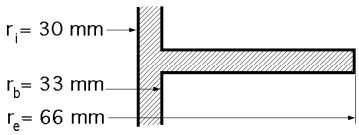
$$G_1(\alpha_{an}\beta_{an}) = \frac{\Phi_e}{\Phi_b} = G_1(0{,}7) = 0{,}06 \ \Rightarrow\ \Phi_e = 0{,}06\ \Phi_b = 0{,}06 \times 50 = 3 = T_e - T_F \ \Rightarrow\ T_e = T_F + 3$$

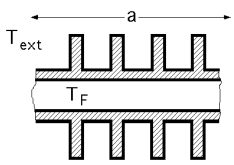
d) Aumento en % del calor disipado por el hecho de colocar las aletas

$$Mejora = \frac{0{,}689 - 0{,}04147}{0{,}04147} = 15{,}60 \ \Rightarrow\ \boxed{1560\%}$$

****

IV.11.- Al realizar un estudio para instalar calefacción en una factoría en la que se dispone de agua caliente a 85°C, se llegó a la conclusión de que había que aportar 460 Kcal/h.m para mantener la temperatura ambiente a +24°C. Dado que en la factoría se dispone de hierro fundido k = 50 Kcal/h.m°C, del calibre 60/66 y de aletas anulares del mismo material, de radio exterior 66 mm y espesor 3 mm, y considerando que los coeficientes de película son 1000 y 8 Kcal/h.m²°C, determinar el número de aletas necesario para disipar el calor indicado.





RESOLUCIÓN

Veamos si son necesarias las aletas:

$$\frac{Q}{a\,(1\ m)} = \frac{2\pi\,(T_F - T_{ext})}{\frac{1}{r_i\ h_{cF}} + \frac{1}{k}\ln\frac{r_b}{r_i} + \frac{1}{r_b\ h_{c\,ext}}} = \frac{2\pi\,(85 - 24)}{\frac{1}{0{,}06 \times 1000} + \frac{1}{50}\ln\frac{33}{30} + \frac{1}{0{,}033 \times 8}} = 100{,}25\ \frac{Kcal}{h} < 460\ \frac{Kcal}{h}$$

luego SÍ son necesarias, ya que el tubo limpio no puede aportar las calorías necesarias

Cálculo de T_b:

$$Q = \frac{T_F - T_{pF}}{\frac{1}{2\pi a\, r_i\ h_{cF}}} = \frac{T_{pF} - T_b}{\frac{1}{2\pi a k}\ln\frac{r_b}{r_i}} = \frac{T_F - T_b}{\frac{1}{2\pi a\, r_i\ h_{cF}} + \frac{1}{2\pi a k}\ln\frac{r_b}{r_i}}$$

$$T_F - T_b = \frac{Q}{2\pi a}\left(\frac{1}{r_i\ h_{cF}} + \frac{1}{k}\ln\frac{r_b}{r_i}\right) = \frac{460(Kcal/h\ m)}{2\pi \times 1}\left(\frac{1}{0{,}03 \times 1000} + \frac{1}{50}\ln\frac{33}{30}\right) = 2{,}58ºC$$

$$T_b = T_F - 2{,}58 = 85 - 2{,}58 = 82{,}42ºC$$

Calor disipado por una aleta:

$q_{1\ aleta} = \pi\,(1 - \alpha_{an}^2)\,k\,e\,\Phi_b\,\beta_{an}^2\,G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) =$

$$= \left| \begin{array}{l} \alpha_{an} = r_b / r_e = 0{,}033/0{,}066 = 0{,}5 \\ \beta_{an} = \sqrt{\frac{2\,r_e^2\ h_{C\,ext}}{k\,e}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}066^2 \times 8}{50 \times 0{,}03}} = 0{,}682 \\ \alpha_{an}\beta_{an} = 0{,}34 \ \Rightarrow\ G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) = 0{,}95 \end{array} \right| = \pi\,(1 - 0{,}5^2) \times 50 \times 0{,}003 \times (82{,}42 - 24) \times 0{,}682^2 \times 0{,}95 = 9{,}11\ \frac{Kcal}{hora}$$

ó también:

$$q_{1\ aleta} = \mu\ h_{c\,ext}\ A\ (T_b - T_{ext}) = G_2(\alpha_{an}\,\beta_{an})\ h_{c\,ext}\ 2\ \frac{\pi}{4}\ (d_e^2 - d_b^2)\ (T_b - T_{ext}) =$$

$$= 0{,}95 \times 8 \times \frac{2\pi}{4}\ (0{,}13\,2^2 - 0{,}06\,6^2) \times (82{,}42 - 24) = 9{,}11\ \frac{Kcal}{hora}$$

Para: a = 1 m habrá N aletas de espesor "e" que ocupan (Ne) metros, por lo que quedan (1 - N e) metros de tubo sin aletas

Calor total disipado:

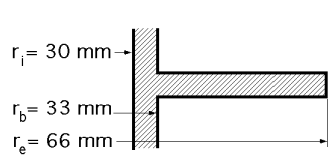
$$Q = q_{aletas} + q_{tubo\ entre\ aletas} = \left| \begin{array}{l} q_{tubo\ entre\ aletas} = \left(\frac{q}{a}\right)_{tubo}(1 - N\,e) \\ q_{aletas} = q_{1\ aleta}\,N \end{array} \right| = 460\ \frac{Kcal}{h\ m} =$$

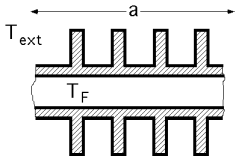
$$= \left(\frac{q}{a}\right)_{tub}(1 - N\,e) + q_{1\ aleta}\,N = 100{,}25\,(1 - N \times 0{,}003) + 9{,}11\,N \ \Rightarrow\ \boxed{N = 40{,}83 \cong 41\ aletas}$$

Separación entre aletas: $\frac{1 - (41 \times 0{,}03)}{41} = 0{,}0219$ m

****

IV.12.- Al realizar un estudio para instalar calefacción en una factoría en la que se dispone de agua caliente a 85°C, se llegó a la conclusión de que había que aportar 5000 Kcal/hora para mantener la temperatura ambiente en +24°C. Dado que en la factoría se dispone de hierro fundido k= 50 Kcal/h.m°C, de diámetros 60/66 y de aletas





anulares del mismo material, de radio exterior 66 mm, con un espesor de 3 mm, separadas 20 mm, y sabiendo que los coeficientes de película son 1000 y 8 Kcal/h.mºC, determinar el número de aletas necesario para disipar el calor indicado y la temperatura en la base de la aleta.

RESOLUCIÓN

$$Q = \frac{T_F - T_{pF}}{\frac{1}{2\pi a r_i h_{cF}}} = \frac{T_{pF} - T_b}{\frac{1}{2\pi k a}\ln\frac{r_b}{r_i}} = \frac{T_F - T_b}{\frac{1}{2\pi a r_i h_{cF}} + \frac{1}{2\pi k a}\ln\frac{r_b}{r_i}}$$

$$T_F - T_b = \frac{Q}{2\pi a}\left(\frac{1}{r_i h_{cF}} + \frac{\ln (r_b / r_i)}{k}\right) = \frac{5000\ \text{Kcal/h}}{2\pi a}\left(\frac{1}{0{,}03 \times 1000} + \frac{\ln (33/30)}{50}\right) = \frac{28{,}042}{a} \quad \Rightarrow \quad T_b = T_F - \frac{28{,}042}{a}$$

$$\Phi_b = T_b - T_{ext} = T_F - \frac{28{,}042}{a} - T_{ext} = 85 - \frac{28{,}042}{a} - 24 = 61 - \frac{28{,}042}{a}$$

Calor disipado total: $Q = Q_{N\ \text{aletas}} + Q_{\text{tubo entre aletas}}$

Calor disipado por una aleta:

$$q_{1\ \text{aleta}} = \pi (1 - \alpha_{an}^2)\, k\, e\, \Phi_b\ \beta_{an}^2\ G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) \text{ , con: } \begin{cases} \alpha_{an} = r_b / r_e = 0{,}033/0{,}066 = 0{,}5 \\ \beta_{an} = \sqrt{\frac{2 r_e^2\ h_{C\ ext}}{k\, e}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}066^2 \times 8}{50 \times 0{,}03}} = 0{,}682 \\ \alpha_{an}\beta_{an} = 0{,}34 \quad \Rightarrow \quad G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) = 0{,}95 \end{cases}$$

Calor disipado por el tubo entre aletas:

$$Q_{\text{tubo entre aletas}} = (2\pi r_b a - N\, e\, 2\pi r_b)\, h_{C\ ext}\Phi_b = 2\pi r_b a \left(1 - \frac{N\, e}{a}\right) h_{C\ ext}\Phi_b$$

$$Q = \pi (1 - \alpha_{an}^2)\, k\, e\, \Phi_b\ \beta_{an}^2\ G_2(\alpha_{an}\beta_{an})\, N + 2\pi r_b a \left(1 - \frac{N\, e}{a}\right) h_{C\ ext}\Phi_b = \left| \Phi_b = 61 - \frac{28{,}042}{a} \right| =$$

$$= \{\pi (1 - 0{,}5^2) \times 50 \times 0{,}003 \times (61 - \frac{28{,}042}{a}) \times 0{,}682^2 \times 0{,}95\ N\} + \{2\pi \times 0{,}033\ a\ (1 - \frac{0{,}003\ N}{a}) \times 8\ (61 - \frac{28{,}042}{a})\} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} N\,(0{,}020 + 0{,}003) = a \\ N = \dfrac{a}{0{,}023} = 43{,}48\ a \end{array} \right| = \{\pi (1 - 0{,}5^2) \times 50 \times 0{,}003 \times (61 - \frac{28{,}042}{a}) \times 0{,}682^2 \times 0{,}95\ N\} +$$

$$+ [2\pi \times 0{,}033\ a\ \{1 - (43{,}48 \times 0{,}003)\} \times 8\ (61 - \frac{28{,}042}{a})] = 501{,}73\ a - 230{,}65 = 5000\ \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$a = \frac{5000 + 230{,}65}{501{,}73} = 10{,}42 \quad \Rightarrow \quad \text{nº de aletas} = N = 43{,}48\ a = 43{,}48 \times 10{,}42 = 453 \text{ aletas}$$

Temperatura en la base: $T_b = 24 + 61 - \frac{28{,}042}{10{,}42} = 82{,}3ºC$

****

IV.13.- Sobre un tubo de una aleación de aluminio de 20 mm de diámetro exterior se desea colocar aletas longitudinales de perfil triangular. La base de las aletas tiene un espesor de 1 mm y la distancia entre los centros de las bases de las aletas es de 3,5 mm lo que permite mantener un coeficiente de película h_{cF} =50 Kcal/hm²°C. La conductividad térmica del material es, k = 100 Kcal/hm°C.

Determinar

a) Las dimensiones del perfil óptimo de las aletas triangulares longitudinales

b) El calor transmitido al exterior por metro de longitud de tubo si la temperatura de la base es de 125°C y la del fluido exterior de 20°C

c) La temperatura en el centro de gravedad de la aleta y en el vértice

d) El calor evacuado por una aleta

RESOLUCIÓN

a) Dimensiones del perfil óptimo de las aletas triangulares longitudinales

$$L_{ópt} = 1{,}196\,(\frac{\Omega\,k}{h_{cF}})^{1/3} = \left| \Omega = \frac{b\,L}{2} \right| = 1{,}196\,(\frac{b\,L_{ópt}\,k}{2\,h_{cF}})^{1/3} = 1{,}196\,(\frac{b\,k}{2\,h_{cF}})^{1/3}\,L_{ópt}^{1/3}$$

$$L_{ópt}^{2/3} = 1{,}196\,(\frac{b\,k}{2\,h_{cF}})^{1/3} = 1{,}196\,(\frac{0{,}001\ \text{x}\ 100}{2\ \text{x}\ 50})^{1/3} = 0{,}1196 \quad ; \quad L_{ópt} = 0{,}04136\ \text{m} = 41{,}36\ \text{mm}\ ;\ \text{Base} = 1\ \text{mm}$$

b) Calor transmitido al exterior por metro de longitud de tubo, si la temperatura de la base es de 125°C y la del fluido exterior de 20°C

$$\text{Para 1 aleta: } q_{1\ \text{aleta}} = -\,\Phi_b\ k\,b\,\frac{\beta_t}{2\,L}\,G_4(\beta_t) = \left| \begin{array}{l} \Phi_b = T_b - T_F = 125 - 20 = 105ºC \\ \beta_t = \sqrt{\dfrac{8\,f\,h_{cF}\,L^2}{k\,b}} = \{\,f = 1\,\} = \sqrt{\dfrac{8\ \text{x}\ 50\ \text{x}\ 0{,}041^2}{100\ \text{x}\ 0{,}001}} = 2{,}616 \\ G_4(\beta_t) = \dfrac{I_1(\beta_t)}{I_0(\beta_t)} = \dfrac{I_1(2{,}616)}{I_0(2{,}616)} = 0{,}775 \end{array} \right| =$$

$$= -\,105\ \text{x}\ 100\ \text{x}\ 0{,}001\ \frac{2{,}616}{2\ \text{x}\ 0{,}041}\ 0{,}775 = 257{,}35\ \frac{\text{Kcal}}{\text{m}}$$

ó también a partir de:

$$L_{ópt} = \frac{0{,}842}{h_{cF}}\,\frac{q_{1\ \text{aleta}}}{T_b - T_F} \quad ; \quad 0{,}00413 = \frac{0{,}842}{50}\,\frac{q_{1\ \text{aleta}}}{105} \quad ; \quad q_{1\ \text{aleta}} = 257{,}5\ \text{Kcal}$$

Para N aletas:

$$\text{Nº de aletas: } N = \pi\,d_e = 3{,}5\,N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{20\,\pi}{3{,}5} = 17{,}97 \quad \Rightarrow \quad 18\ \text{aletas}$$

$$Q_{N\ \text{aletas}} = 257{,}35\ (\text{Kcal/m lineal})\ \text{x}\ 18\ \text{aletas} = 4632{,}23\ \text{Kcal/m lineal}$$

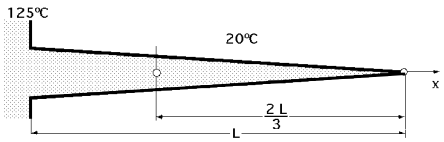
Calor disipado por la fracción de tubo sin aletas: $q_{tubo} = (2\,\pi\,r_e - N\,b)\ a\ h_{cF}\,(T_b - T_F) =$

$$= \{(2\,\pi\ \text{x}\ 0{,}01) - (18\ \text{x}\ 0{,}001)\}\ \text{x}\ 1\ \text{m}\ \text{x}\ 50\ (\text{Kcal/hm}^2\ ºC)\ \text{x}\ 105ºC = 235{,}4\ (\text{Kcal/m. lineal})$$

$$q_{Total(1\ \text{m lineal})} = 4632{,}23 + 235{,}4 = 4867{,}63\ \frac{\text{Kcal}}{\text{m lineal}}$$

$$\text{Rendimiento de la aleta: } \eta = \frac{2\ G_4(\beta_t)}{\beta_t} = \frac{2\ \text{x}\ 0{,}775}{2{,}616} = 0{,}5925 = 59{,}25\%\ \text{(Del orden del 60\%)}$$

c) Temperatura en el centro de gravedad de la aleta:



$$\frac{\Phi}{\Phi_b} = G_3(\beta_t\,\eta_t) = \left| \begin{array}{l} \beta_t = 2{,}616 \ ; \ h_t = \sqrt{\dfrac{x}{L}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = 0{,}8165 \\ \beta_t\,\eta_t = 2{,}616\ \text{x}\ 0{,}8165 = 2{,}1388 \end{array} \right| = 0{,}69$$

$$\frac{T_{c.d.g.} - T_F}{T_b - T_F} = 0{,}69 \quad ; \quad \frac{T_{c.d.g.} - 20}{125 - 20} = 0{,}69 \quad \Rightarrow \quad T_{c.d.g.} = 92{,}45ºC$$

DE OTRA FORMA:

$$\frac{\Phi}{\Phi_b} = \frac{I_0(2\,n\,\sqrt{x})}{I_0(2\,n\,\sqrt{L})} = \left| \begin{array}{c} L = 0{,}04136\ \text{m} \quad ; \quad \text{Centro de gravedad: } x = 2\,L/3 = 0{,}02757\ \text{m} \\ n = \sqrt{\dfrac{2\,f\,h_{cF}\,L}{k\,b}} = \{f = 1\} = \sqrt{\dfrac{2\ \text{x}\ 50\ \text{x}\ 0{,}04136}{100\ \text{x}\ 0{,}001}} = 6{,}43 \\ I_0(2\,n\sqrt{L}) = \left\{ 2\,n\sqrt{L} = 2\ \text{x}\ 6{,}431\ \sqrt{0{,}04136} = 2{,}6153 \right\} = I_0(2{,}6153) = 3{,}60 \\ I_0(2\,n\sqrt{x}) = \left\{ 2\,n\sqrt{x} = 2\ \text{x}\ 6{,}431\ \sqrt{0{,}02757} = 2{,}1356 \right\} = I_0(2{,}1356) = 2{,}522 \end{array} \right| =$$

$$T_{cdg} = T_F + (T_b - T_F)\,\frac{I_0(2\,n\sqrt{x})}{I_0(2\,n\sqrt{L})} = 20 + (125 - 20)\ \frac{2{,}522}{3{,}6} = 93{,}55ºC$$

Temperatura en el vértice de la aleta: $T_{vértice} = T_F + (T_b - T_F)\,\frac{I_0(2\,n\sqrt{0})}{I_0(2\,n\sqrt{L})} = 20 + (125 - 20)\,\frac{1}{3{,}6} = 49{,}16ºC$

****

IV.14.- Un tubo de una determinada aleación k = 80 W/m°K tiene un diámetro interior de 25 mm y un diámetro exterior de 30 mm, y sobre el mismo se han dispuesto 20 aletas rectas longitudinales, del mismo material que el tubo, uniformemente distribuidas, con su extremo libre aislado térmicamente, de espesor e =3 mm y longitud transversal L = 30 mm.El medio exterior (aire), se encuentra en reposo a la temperatura de 20°C, siendo de 100°C la temperatura de la superficie exterior del tubo.

Suponiendo el mismo coeficiente de película en el tubo y en las aletas, determinar:

a) El aumento en % que supone la disipación de calor con aletas, frente al tubo sin aletas

b) Temperatura en el centro de gravedad de cada aleta y en su extremo libre.

RESOLUCIÓN

Propiedades del aire exterior: Temperatura de película:

$$T = \frac{100 + 20}{2} = 60ºC \xrightarrow{\text{Propiedades del aire}} \begin{cases} \rho = 1{,}025\ kg/m^3 \ ;\ c_{pF} = 1017\ J/kgºK \ ;\ k = 0{,}0279\ W/mºC \\ \nu = 19{,}4.10^{-6}\ m^2/seg \ ;\ Pr = 0{,}71 \ ;\ \dfrac{g\,\beta}{\nu^2} = 0{,}782.10^8 \end{cases}$$

$$Gr = \frac{g\,\beta\,\Delta T\,L^3}{\nu^2} = \left| \begin{matrix} \Delta T = 100 - 20 = 80ºC \\ L = d = 0{,}03\ m \end{matrix} \right| = 0{,}782 \times 10 \times 80 \times 0{,}03 = 168.912$$

$$Gr\,Pr = 168.912 \times 0{,}71 = 119927{,}5$$

El coeficiente de película se puede calcular a partir de:

$$\text{Para flujo laminar: } Nu_d = 0{,}36 + \frac{0{,}518\ Ra_d^{1/4}}{\{1 + (\frac{0{,}56}{Pr})^{9/16}\}^{4/9}} = 0{,}36 + \frac{0{,}518\ \sqrt[4]{119927{,}5}}{\{1 + (\frac{0{,}56}{0{,}71})^{9/16}\}^{4/9}} = 7{,}64 \ \Rightarrow\ h_{cF} = 7{,}1\ \frac{W}{m^2\,ºC}$$

a) Aumento en % que supone la disipación de calor con aletas, frente al tubo sin aletas

Calor desprendido por metro lineal de tubería sin ninguna aleta:

$$q_{1m\ lineal} = h_{cF}\,A_L\,\Delta T = 7{,}1\ \frac{W}{m^2\,ºC} \times 0{,}03\ \pi\ (m^2)\ (100 - 20)ºC = 53{,}53\ \frac{W}{\text{metro de tubo}}$$

Espacio de tubo no ocupado por las aletas = $0{,}03\ \pi - (20 \times 0{,}003) = 0{,}03425$ m

$$\text{Calor por metro lineal a través de la fracción de tubo no ocupado por las aletas} = \frac{0{,}03425 \times 53{,}53}{0{,}03\ \pi} = 19{,}45\ \frac{W}{m}$$

Aleta con su extremo libre termicamente aislado:

$$q_{N\ aletas} = k\,S\ \frac{T_b - T_F}{L}\ \sqrt{Bi}\ \ Th\sqrt{Bi}\ \ N = \left| \begin{matrix} S = 0{,}003 \times 1 = 0{,}003\ m^2 \ ;\ p = 2\ (1 + 0{,}003) = 2{,}006\ m \\ Bi = \dfrac{h_{cF}\,p\,L^2}{k\,S} = \dfrac{7{,}1 \times 2{,}006 \times 0{,}03^2}{80 \times 0{,}003} = 0{,}0534 \end{matrix} \right| =$$

$$= 80 \times 0{,}003\ \frac{100 - 20}{0{,}03}\ \sqrt{0{,}0534}\ \ Th\sqrt{0{,}0534} \times 20 = 671{,}6\ \frac{W}{m}$$

Calor disipado total = 19,45 + 671,6 = 691 (W/m)

$$\text{Aumento en \%} = \frac{691 - 53{,}53}{53{,}53}\ 100 = 1191\%$$

b) Temperatura en el c.d.g. de cada aleta y en su extremo libre:

$$\Phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_b - T_F} = \frac{Ch\ \{\sqrt{Bi}\ (1 - \xi)\}}{Ch\ \sqrt{Bi}}$$

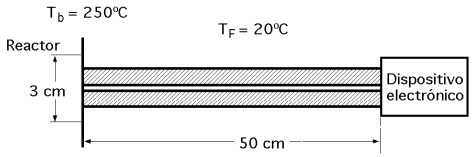
$$\text{Temperatura en el c.d.g. de la aleta } (\xi = 0{,}5): \ \frac{T_{c.d.g.} - 20}{100 - 20} = \frac{Ch\{\sqrt{0{,}0571}(1 - 0{,}5)\}}{Ch\sqrt{0{,}0571}} = 0{,}98 \ \Rightarrow\ T_{c.d.g.} = 98{,}32ºC$$

$$\text{Temperatura en el extremo libre de la aleta } (\xi = 1): \ \frac{T_{\xi=1} - 20}{100 - 20} = \frac{1}{Ch\sqrt{0{,}0571}} \ \Rightarrow\ T_{\xi=1} = T_L = 97{,}77ºC$$

****

IV.15.- Para realizar el control del calentamiento de un determinado reactor, que no debe sobrepasar los 250°C, se hace uso de un tubo especial de acero k = 45 W/m°C, en cuyo interior se ha hecho el vacío, que conecta el interior

del reactor con un dispositivo electrónico exterior acoplado en su otro extremo y que no debe sobrepasar los 60°C.



Si el tubo se asimila a un cilindro de 50 cm de longitud y 3 cm de diámetro, y el medio exterior se encuentra a 20°C, determinar:

a) El coeficiente de película existente entre el cilindro y el medio exterior

b) Sistema de refrigeración que habrá que utilizar en el cilindro

c) La temperatura en la mitad del cilindro

RESOLUCIÓN

El tubo de acero, cuyo diámetro interior no se da, y en cuyo interior se ha hecho el vacío (no existe convección en el interior), se puede asimilar a una protuberancia cilíndrica de 3 cm de diámetro, con uno de sus extremos a 250ºC y el otro extremo, sobre el que va el dispositivo electrónico que no permite intercambio térmico por el extremo, que consideraremos térmicamente aislado a 60ºC.

a) Coeficiente de película existente entre el cilindro y el medio exterior

$$\frac{T_b - T_F}{T(1) - T_F} = Ch\sqrt{Bi} \quad ; \quad \frac{250 - 20}{60 - 20} = 5{,}75 = Ch\sqrt{Bi} \quad ; \quad Bi = 5{,}9277$$

$$Bi = \frac{h_{cF}\, p\, L^2}{k\, S} = \frac{h_{cF}\, (p\, d)\, L^2}{k\, (p\, d^2/4)} = \frac{4\, h_{cF} L^2}{k\, d} = \frac{4\, h_{cF} \times 0{,}5^2}{45 \times 0{,}03} = 5{,}9277 \quad \Rightarrow \quad h_{cF} = 8\ \frac{W}{m^2\,ºC}$$

b) Sistema de refrigeración que habrá que utilizar en el cilindro

Con este valor de h_{cF} la convección es natural y no es necesario ningún otro tipo o medio de refrigeración

c) Temperatura en la mitad del cilindro:

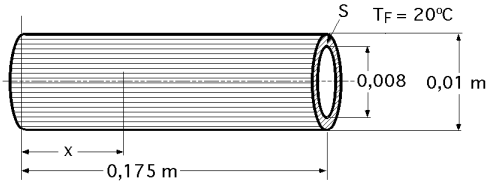
$$\Phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_b - T_F} = \frac{Ch\,\{\sqrt{Bi}\,(1 - \xi)\}}{Ch\,\sqrt{Bi}}$$

Temperatura en la mitad del cilindro ($\xi = 0{,}5$) : $\dfrac{T(0{,}5) - 20}{250 - 20} \dfrac{Ch\{\sqrt{5{,}9277} \times (1 - 0{,}5)\}}{Ch\{\sqrt{5{,}9277}} \quad \Rightarrow \quad T_{\xi = 0{,}5} = 93{,}5ºC$

****

IV.16.- Un cazo metálico contiene agua hirviendo a 100ºC. El mango metálico del mismo, es un tubo cilíndrico, de diámetro exterior d_e= 0,01 m, longitud L = 0,175 m, espesor 1 mm y conductividad térmica k = 40 W/mºK, y lleva en su extremo libre un aislamiento térmico. La temperatura del aire del medio exterior y del hueco del tubo es de 20ºC y el coeficiente de película correspondiente h_c = 10 W/m²ºC.

a) Determinar a partir de qué distancia en el tubo del mango la temperatura es inferior a 50ºC. Calor evacuado a través del mango y rendimiento.



b) Suponiendo que el flujo térmico en la parte interior del tubo del mango es despreciable, determinar a partir de qué posición en el mango la temperatura es inferior a 50ºC. Calor evacuado a través del mango y rendimiento.

c) Si se considera el mango macizo, calcular a partir de qué posición la temperatura sería inferior a 50ºC.

RESOLUCIÓN

a) A partir de qué distancia en el tubo del mango la temperatura es inferior a 50ºC.

Distribución de temperaturas: $\Phi(\xi) = \dfrac{T(\xi) - T_F}{T_b - T_F} = \dfrac{Ch\,\{\sqrt{Bi}\,(1 - \xi)\}}{Ch\,\sqrt{Bi}}$

$$Bi = \frac{h_{cF}\, p\, L^2}{k\, S} = \left| \begin{array}{l} p = \pi\,(d_e + d_i) = \pi\,(0{,}01 + 0{,}008) = 0{,}05655\ m \\ S = \dfrac{\pi}{4}\,(d_e^2 - d_i^2) = \dfrac{\pi}{4}\,(0{,}01^2 - 0{,}008^2) = 2{,}827.10^{-5}\,m^2 \end{array} \right| = \frac{10 \times 0{,}05655 \times 0{,}175^2}{40 \times 2{,}827.10^{-5}} = 15{,}31$$

La temperatura en la base de la protuberancia, entronque con el cazo, es de 100ºC, ya que el coeficiente de película del agua en ebullición es muy elevado, por lo que la temperatura del agua y la del cazo será prácticamente la misma. Si llamamos ***x*** a la distancia a partir de la cual la temperatura del mango es inferior a 50ºC, se tiene:

$$\frac{50 - 20}{100 - 20} = 0{,}375 = \frac{\text{Ch}\{\sqrt{25{,}31}\ (1 - \frac{x}{0{,}175})\}}{\text{Ch}\sqrt{25{,}31}} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}0439 \text{ m}$$

Calor evacuado a través del mango y rendimiento

$$q = k\,S\,\frac{T_b - T_L}{L}\,\sqrt{Bi}\ \text{Th}\ \sqrt{Bi} = 40 \text{ x } 2{,}827.10^{-5}\,\frac{80}{0{,}175}\,\sqrt{15{,}31}\ \text{Th}\ \sqrt{15{,}31} = 2{,}02 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{\text{Th}\ \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{\text{Th}\ \sqrt{15{,}31}}{\sqrt{15{,}31}} = 0{,}2523 = 25{,}23\%$$

b) Suponiendo que el flujo térmico en la parte interior del tubo del mango es despreciable, determinar a partir de qué posición en el mango la temperatura es inferior a 50ºC.

$$Bi = \frac{h_{cF}\ p\ L^2}{k\,S} = \left| \begin{array}{l} p = \pi\, d_e = \pi \text{ x } 0{,}01 = 0{,}0314 \text{ m} \\ S = \frac{\pi}{4}\,(d_e^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4}\,(0{,}01^2 - 0{,}008^2) = 2{,}827.10^{-5} \text{m}^2 \end{array} \right| = \frac{10 \text{ x } 0{,}0314 \text{ x } 0{,}175^2}{40 \text{ x } 2{,}827.10^{-5}} = 8{,}5$$

$$\frac{50 - 20}{100 - 20} = 0{,}375 = \frac{\text{Ch}\{\sqrt{8{,}5}\ (1 - \frac{x}{0{,}175})\}}{\text{Ch}\sqrt{8{,}5}} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}06 \text{ m}$$

Calor evacuado a través del mango y rendimiento:

$$q = k\,S\,\frac{T_b - T_L}{L}\,\sqrt{Bi}\ \text{Th}\ \sqrt{Bi} = 40 \text{ x } 2{,}827.10^{-5}\,\frac{80}{0{,}175}\,\sqrt{8{,}5}\ \text{Th}\ \sqrt{8{,}5} = 1{,}4985 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{\text{Th}\ \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{\text{Th}\ \sqrt{8{,}5}}{\sqrt{8{,}5}} = 0{,}3409 = 34{,}09\%$$

c) Si se considera el mango macizo, calcular a partir de qué posición la temperatura sería inferior a 50ºC.

$$Bi = \frac{h_{cF}\ p\ L^2}{k\,S} = \left| \begin{array}{l} p = \pi\, d_e = \pi \text{ x } 0{,}01 = 0{,}0314 \text{ m} \\ S = \pi\, d_e^2 / 4 = \pi \text{ x } 0{,}01^2 / 4 = 7{,}85.10^{-5} \text{m} \end{array} \right| = \frac{10 \text{ x } 0{,}0314 \text{ x } 0{,}175^2}{40 \text{ x } 7{,}85.10^{-5}} = 3{,}06$$

$$\frac{50 - 20}{100 - 20} = 0{,}375 = \frac{\text{Ch}\{\sqrt{3{,}06}\ (1 - \frac{x}{0{,}175})\}}{\text{Ch}\sqrt{3{,}06}} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}128 \text{ m}$$

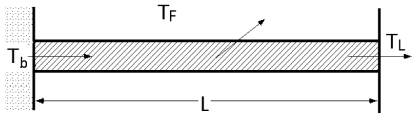
Calor evacuado a través del mango y rendimiento

$$q = k\,S\,\frac{T_b - T_L}{L}\,\sqrt{Bi}\ \text{Th}\sqrt{Bi} = 40 \text{ x } 2{,}827.10^{-5}\,\frac{80}{0{,}175}\,\sqrt{3{,}06}\ \text{Th}\sqrt{3{,}06} = 2{,}366 \text{ W}$$

$$\mu = \frac{\text{Th}\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{\text{Th}\sqrt{3{,}06}}{\sqrt{3{,}06}} = 0{,}538 = 53{,}8\%$$

****

IV.17.- Se tiene un cilindro de espesor uniforme k = 10 Kcal/h.m.ºC, de 120 mm de longitud y 20 mm de diámetro, entre dos paredes, que se encuentra a 300ºC y 100ºC respectivamente. Se supondrá que el fluido exterior aire) está a una temperatura de 10ºC, y que el coeficiente de película es h_C = 15 Kcal/h.m².ºC.



Determinar

a) El calor evacuado al exterior

b) La temperatura en la mitad de la aguja

RESOLUCIÓN

Aleta con sus extremos a temperaturas T_b y T_L

a) El calor evacuado al exterior es la diferencia de los calores que pasan por las bases.

$$q = q_{\xi=0} - q_{\xi=1} = -\frac{k\,S}{L}(T_b - T_F)\sqrt{Bi}\;\frac{(1 - Ch\sqrt{Bi})\{F(1)+1\}}{Sh\sqrt{Bi}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_{cF}\;p\,L^2}{k\,S} = \left\{ \begin{array}{l} p = \pi\,d = \pi \times 0{,}02 = 0{,}0628\ m \\ S = \pi\,d^2/4 = \pi \times 0{,}02^2/4 = 3{,}14.10^{-4}\,m^2 \end{array} \right\} = \dfrac{15 \times 0{,}0628 \times 0{,}12^2}{10 \times 3{,}14.10^{-4}} = 4{,}32 \\ \Phi(1) = \dfrac{100 - 10}{300 - 10} = 0{,}31 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{10 \times 3{,}14.10^{-4}}{0{,}12}(300 - 10)\sqrt{4{,}32}\;\frac{(1 - Ch\sqrt{4{,}32})\{0{,}31+1\}}{Sh\sqrt{4{,}32}} = 16\;\frac{Kcal}{h}$$

b) Temperatura en la mitad de la aguja

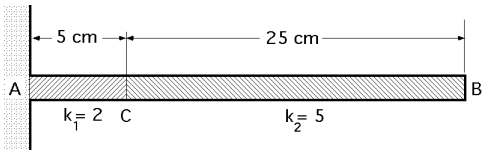
$$\Phi_{(\xi=0{,}5)} = \frac{Sh\{\sqrt{Bi}(1-\xi)\} + \Phi(1)\,Sh(\sqrt{Bi}\;\xi)}{Sh\sqrt{Bi}} = \frac{Sh\{\sqrt{4{,}32}(1-0{,}5)\} + 0{,}31\,Sh(\sqrt{4{,}32} \times 0{,}5)}{Sh\sqrt{4{,}32}} = 0{,}4119$$

$$T_{\xi=0{,}5} = 10 + (300 - 10) \times 0{,}4119 = 129{,}45ºC$$

****

V.18.- Se tiene un cilindro de espesor uniforme, de 30 cm de longitud y 2 cm de diámetro, que sobresale de una superficie plana A que se encuentra a 400ºC. El cilindro está conformado por dos tipos de material, de forma que los 5 primeros cm más cercanos a la pared tienen una conductividad térmica k_1 = 2 Kcal/h.m.ºC, y el resto una conductividad térmica, k_2 = 5 Kcal/h.m.ºC. Se supondrá que el fluido exterior (aire) está a una temperatura de 20ºC, y que el coeficiente de película lateral y en el extremo libre B es h_C = 10 Kcal/h.m².ºC.

Determinar



a) La temperatura T_C de unión de los materiales que conforman el cilindro
b) El calor evacuado al exterior
c) La temperatura en el extremo libre B

RESOLUCIÓN

El cilindro se puede considerar, con conducción unidimensional, conformado por una aleta (AC) entre 2 temperaturas y una aleta (CB) con convección por el extremo libre.

Aleta con convección en el extremo libre y base a T_C

El calor disipado q_2 es el que entra por la base C

$$q_2 = \frac{k_2\;S\,(T_C - T_F)\sqrt{Bi_2}}{L_2}\;\frac{Th\sqrt{Bi_2} + \dfrac{S\sqrt{Bi_2}}{p\,L_2}}{1 + \dfrac{S\sqrt{Bi_2}}{p\,L_2}\,Th\sqrt{Bi_2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} Bi_2 = \dfrac{h_{cF}\;p\,L_2^2}{k_2\;S} = \left\{ \begin{array}{l} p = \pi\,d = \pi \times 0{,}02 = 0{,}0628\ m\ ;\ L_2 = 0{,}25 \\ S = \pi\,d^2/4 = \pi \times 0{,}02^2/4 = 3{,}14.10^{-4}\,m^2 \end{array} \right\} = \dfrac{10 \times 0{,}0628 \times 0{,}25^2}{5 \times 3{,}14.10^{-4}} = 25 \\ \Phi_C = T_C - T_F \end{array} \right| =$$

$$= \frac{5\;\dfrac{Kcal}{hmºC} \times 0{,}000314\ m^2 \times \Phi_C\ ºC \times 5}{0{,}25m}\;\frac{Th\,5 + \dfrac{0{,}000314 \times 5}{0{,}06283 \times 0{,}25}}{1 + \dfrac{0{,}000314 \times 5}{0{,}06283 \times 0{,}25}\,Th\,5} = 0{,}0314\,\Phi_C$$

Aleta con sus extremos a temperaturas T_A y T_C

El calor que atraviesa la base C es: $Q = -\dfrac{k_1\;S}{L_1}(T_A - T_F)\sqrt{Bi_1}\;\dfrac{-Ch\{\sqrt{Bi_1}(1-x)\} + F(1)\,Ch(\sqrt{Bi_1}\;x)}{Sh\sqrt{Bi_1}} =$

$$= \left| \begin{array}{l} \Phi(1) = \dfrac{T_C - T_F}{T_A - T_F} = \dfrac{F}{400 - 20} = \dfrac{F}{380} \\ L_1 = 0{,}05 \text{ m} \ ; \ x = 1 \\ Bi_1 = \dfrac{p\, L_1^2\, h_C}{k_1\, S} = \dfrac{0{,}06283 \text{ x } 0{,}05^2 \text{ x } 10}{2 \text{ x } 0{,}000314} = 2{,}5 \ \Rightarrow \ \sqrt{Bi_1} = 1{,}581 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2\ \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.ºC}} \text{ x } 0{,}000314 \text{ m}^2}{0{,}05 \text{ m}} (400 - 20)\text{ºC} \text{ x } 1{,}581 \text{ x } \frac{-1 + \frac{\Phi}{380}\ \text{Ch } 1{,}581}{\text{Sh } 1{,}581} = 3{,}2445 - 0{,}02162\ \Phi$$

Igualando los dos calores:

$0{,}0314\ \Phi = 3{,}2445 - 0{,}02162\ \Phi \ \Rightarrow \ \Phi = 61{,}2\text{ºC} = T_C - 20 \ \Rightarrow \ T_C = 81{,}2\text{ºC}$

b) Calor evacuado al exterior

El calor evacuado al exterior por el cilindro, es el mismo que penetra por la base A; por lo tanto:

$$q_A = -\frac{k_1 S}{L_1}(T_A - T_F)\sqrt{Bi_1}\ \frac{-\text{Ch}\{\sqrt{Bi_1}(1 - \xi)\} + \Phi(1)\,\text{Ch}(\sqrt{Bi_1}\ \xi)}{\text{Sh}\sqrt{Bi_1}} = \left| \begin{array}{l} \Phi(1) = \dfrac{T_C - T_F}{T_A - T_F} = \dfrac{61{,}2}{400 - 20} = 0{,}161 \\ x = 0 \ ; \ \xi = 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2\ \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.ºC}} \text{ x } 0{,}000314 \text{ m}^2}{0{,}05 \text{ m}} (400 - 20)\text{ºC} \text{ x } 1{,}581 \text{ x } \frac{-\text{Ch } 1{,}581 + 0{,}161}{\text{Sh } 1{,}581} = 7{,}69\ \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

c) Temperatura en el extremo libre B $\Rightarrow$ $\xi = 1$ (Aleta con convección en el extremo libre)

$$\Phi(1) = \frac{\text{Ch } 0 + 0}{\text{Ch}\sqrt{Bi_2} + \frac{S\sqrt{Bi_2}}{p\,L^2}\ \text{Sh}\sqrt{Bi_2}} = \frac{1}{\text{Ch } 5 + \frac{0{,}000314 \text{ x } 5}{0{,}06283 \text{ x } 0{,}25}\ \text{Sh } 5} = 0{,}00674 = \frac{T_b - 20}{81{,}2 - 20} \ \Rightarrow \ T_b = 20{,}4\text{ºC}$$

****

IV.19.- Un soldador consiste, (a efectos térmicos), en una varilla cilíndrica metálica que se calienta eléctricamente por un extremo B alcanzándose en el otro extremo A (punta del soldador) una cierta temperatura. La temperatura del medio exterior es de 20ºC. Datos del soldador: $k = 80$ W/mºK ; $h_C = 20$ W/m²ºK ; $\alpha = 1{,}93 \text{ x } 10^{-4}$ m²/seg

Las dimensiones del soldador son: Longitud L= 80 mm; Diámetro d = 5 mm

Determinar, considerando sólo efectos convectivos:

a) La temperatura en el extremo B cuando la temperatura en el extremo A sea de 400ºC (en régimen estacionario), y la potencia eléctrica a aplicar en B en estas condiciones

b) Si se supone que al soldador se le aplica por el extremo B la potencia calculada en el apartado (a) y que el calentamiento se realiza uniformemente, hallar el tiempo que se tardará en conseguir en el mismo una temperatura de 300ºC, supuesto el medio exterior a 20ºC. ¿Qué temperatura máxima se podría conseguir en estas circunstancias?

RESOLUCIÓN

a) Temperatura en el extremo B cuando la temperatura en el extremo A sea de 400ºC (en régimen estacionario)

Se trata de una aguja cilíndrica (protuberancia) que intercambia calor con el medio exterior, con convección por el extremo libre: Se conoce: $T_A = 277\text{ºC}$; $\xi = 1$

$$\frac{T(x) - T_F}{T_B - T_F} = \frac{\sqrt{Bi}\ \text{Ch}[(1 - \xi)\sqrt{Bi}] + \frac{h_C L}{k}\text{Sh}[(1 - \xi)\sqrt{Bi}]}{\sqrt{Bi}\ \text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}\text{Sh}\sqrt{Bi}} \ ; \ \frac{400 - 20}{T_B - 20} = \frac{\sqrt{Bi}\ \text{Ch}(0) + 0}{\sqrt{Bi}\ \text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}\text{Sh}\sqrt{Bi}}$$

$$Bi = \frac{h_{cF}\ p\, L^2}{k\, S} = \left| p = \pi d = 0{,}005\ \pi = 0{,}0157 \text{ m} \ ; \ S = \frac{\pi d^2}{4} = 1{,}96.10^{-5} \text{ m}^2 \right| = \frac{20 \text{ x } 0{,}0157 \text{ x } 0{,}08^2}{80 \text{ x } 1{,}96.10^{-5}} = 1{,}2816$$

$$\frac{400 - 20}{T_B - 20} = \frac{\sqrt{1,28}}{\sqrt{1,28}\ Ch\sqrt{1,28} + \frac{20 \text{ x } 0,08}{80}\ Sh\sqrt{1,28}} = 0,576 \quad \Rightarrow \quad T_B = 679,6ºC$$

Potencia eléctrica a aplicar en B en estas condiciones

Hay que determinar una cantidad de calor igual a la que se desprende a través de toda la varilla

$$q_{conv} = \frac{k\ S\ (T_C - T_F)\ \sqrt{Bi}}{L}\ \frac{Th\sqrt{Bi} + \frac{S\sqrt{Bi}}{p\ L}}{1 + \frac{S\sqrt{Bi}}{p\ L}\ Th\sqrt{Bi}} = \frac{80 \text{ x } 1,96.10^{-5}\ (679,6 - 20)\sqrt{1,28}}{0,08}\ \frac{Th\sqrt{1,28} + \frac{1,96.10^{-5}\ \sqrt{1,28}}{0,0157 \text{x} 0,08}}{1 + \frac{1,96.10^{-5}\ \sqrt{1,28}}{0,0157 \text{ x } 0,08}\ Th\sqrt{1,28}} = 12 \text{ W}$$

DE OTRA FORMA

A partir de la eficiencia de la aleta se tiene:

$$q_{conv} = h_C\ A\ (T_B - T_A)\ \eta_{aleta} = \left| \eta_{aleta} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{Th\sqrt{1,28}}{\sqrt{1,28}} = 0,7172 \ ; \ A = 1,276.10^{-3} m^2 \right| =$$

$$= 20 \text{ x } 1,276.10^{-3}\ (679,6 - 20) \text{ x } 0,7172 = 12 \text{ W}$$

b) Si se supone que al soldador se le aplica por el extremo B la potencia calculada en el apartado (a) y que el calentamiento se realiza uniformemente, hallar el tiempo que se tardará en conseguir en el mismo una temperatura de 300ºC, supuesto el medio exterior a 20ºC

Al realizarse el calentamiento uniformemente, se trata de un caso con condición de contorno con RESISTENCIA TÉRMICA INTERNA DESPRECIABLE, por lo que:

$$t = \frac{\rho\ L\ c_p}{h_{CF}}\ \ln\ \frac{q}{q - h_{cF} A\ (T - T_F)} = \frac{V\ k}{A\ h_{CF}\ a}\ \ln\ \frac{q}{q - h_{cF} A\ (T - T_F)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{V}{A} = \frac{(\pi\ d^2\ /4)\ L}{\pi\ d\ L + (\pi\ d^2\ /4)} = \frac{d\ L}{4\ L + d} = \frac{0,005 \text{ x } 0,08}{(4 \text{ x } 0,08) + 0,005} = 0,00123 \text{ m} \\ A = \pi\ d\ L + (\pi\ d^2\ /4) = (\pi \text{ x } 0,005 \text{ x } 0,08) + (\pi \text{ x } 0,005^2\ /4) = 0,001276 \text{ m}^2 \\ Bi = \frac{h_C\ (V/A)}{k} = \frac{20 \text{ x } 0,00123}{80} = 0,000307 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{0,00123 \text{ m x } 80\ (W/mºC)}{20\ (W/m^2\ ºC) \text{ x } 1,93.10^{-4}\ (m^2\ /seg)}\ \ln\ \frac{12 \text{ W}}{12 \text{ W} - 20\ (W/m^2\ ºC) \text{ x } 20 \text{ m}^2\ (300 - 20)ºC} = 23,07 \text{ seg}$$

Temperatura máxima que se podrá conseguir en estas circunstancias

Para: $t \rightarrow \infty$; $q = h_C A\ (T_{máx} - T_F) \quad \Rightarrow \quad T_{máx} = T_F + \frac{q}{h_C A} = 20 + \frac{12}{1,276.10^{-3} \text{ x } 20} = 490,2ºC$

****

IV.20.- En una sala de maquinaria se desea mantener una temperatura uniforme de 20ºC y para ello se dispone de un sistema de calefacción, por agua caliente a presión, a una temperatura media de 100ºC, que consiste en un tubo de acero, k = 42 W/mºC, de diámetro interior d_i = 4 cm, diámetro exterior d_b =5 cm, y aletas longitudinales triangulares, de altura 4 cm y espesor en la base sobre el tubo de 0,785 cm, colocadas a una distancia entre centros de 15,7 mm, del mismo material que el tubo

La velocidad del agua caliente es de 1,5 m/seg. La longitud del tubo con aletas es de 300 m. El tubo se encuentra en posición horizontal y la nave tiene 100 m de longitud.

Determinar

a) El calor disipado por una aleta

b) El calor cedido a la sala por la instalación de calefacción

c) La caída de temperatura del agua calefactora que circula por el interior del tubo, y temperatura de la misma a la entrada del tubo

d) La eficiencia de este sistema de calefacción, como intercambiador de calor

e) La temperatura en el extremo de la aleta, y en su centro de gravedad, en el punto medio de la tubería.

Datos del agua caliente: $\rho = 958{,}4\ kg/m^3$; $c_p = 4{,}211\ kJ/kg^oC$; $k = 0{,}682\ W/m^oC$; $\nu = 0{,}294.10^{-6}\ m^2/seg$; $Pr = 1{,}75$; $g\,\beta/\nu^2 = 85{,}09\ (1/^oK.m^3)$

Datos del aire:

$\rho = 1\ kg/m^3$; $c_p = 1{,}01\ kJ/kg^oC$; $k = 0{,}03\ W/m^oC$; $\nu = 20{,}76.10^{-6}\ m^2/seg$; $Pr = 0{,}7$; $\alpha = 0{,}3.10^{-4}\ m^2/seg$

RESOLUCIÓN

El problema se puede plantear como un intercambiador de calor compuesto por (tubo + aletas), por lo que se puede aplicar el concepto de (LMTD) una vez conocido el valor de (UA).

Para hallar (UA) hay que conocer el nº de aletas: $N = \dfrac{d_b\ \pi}{l} = \dfrac{50\ mm \times \pi}{15{,}7} = 10$

Cálculo de $h_{c\ ext}$ (aire en reposo), En primera aproximación se puede suponer una temperatura de pared de 99,5ºC, que habrá que comprobar a posteriori.

$$Gr = \frac{g\,\beta\,\Delta T\,d_{base}^3}{\nu^2} = \left| \begin{array}{l} \Delta T = 99{,}5 - 20 = 79{,}5^oC \ ; \ d_{base} = 0{,}05\ m \\ \dfrac{g\,\beta}{\nu^2} = \dfrac{9{,}8\ \dfrac{m}{seg^2}\ \dfrac{1}{273+20}\ (1/^oK)}{(20{,}76.10^{-6})^2\ (m^2/seg)} = 7{,}76.10^7\ \dfrac{1}{m^3\ ^oK} \end{array} \right| = 7{,}76.10^7 \times 79{,}5 \times 0{,}05^3 = 771.150$$

$Gr\,Pr = 771.150 \times 0{,}7 = 539.805 < 10^7$ (laminar)

$\Phi_b = T_b - T_F = 99{,}5 - 20 = 79{,}5^oC$

a) Calor disipado por una aleta triangular

No se conoce la temperatura en la base T_b, pero podemos suponer vale 99,5ºC, que es un poco inferior a la temperatura media del agua caliente, por ser k = 42 W/mºC.

$q_{1\ aleta\ long} = \eta\ h_{c(ext)}\ A_{lateral\ aleta} (T_b - T_{ext})$

$A_{lateral\ aleta} = 2\ (L^* \times 300\ m) = 2\ (0{,}04 \times 300) = 24\ m^2$

$\Phi_b = T_b - T_F = 99{,}5 - 20 = 79{,}5^oC$

$$\beta_t = \sqrt{\frac{8\ f\ h_{cF}\ L^2}{k\ b}} = \sqrt{\frac{8 \times 1 \times 7{,}45 \times 0{,}04^2}{42 \times 0{,}785.10^{-2}}} = 0{,}5378 \ \Rightarrow\ G_4(\beta_t) = 0{,}241$$

$$\eta = \frac{2\ G_4(\beta_t)}{\beta_t} = \frac{2 \times 0{,}24}{0{,}5378} = 0{,}8925$$

$q_{1\ aleta\ long.} = 0{,}8925 \times 7{,}45 \times 24{,}1 \times (99{,}5 - 20) = 12750\ W$

Calor disipado por todas las aletas triangulares:

$q_{N\ aletas\ long.} = 12.750 \times 10 = 127.503\ W$

b) Calor cedido a la sala por la instalación de calefacción

$$q_{tubo} = h_{c\ (ext)} A_{tubo} (T_b - T_{ext}) = \left| A_{tubo} = (\pi\ d_b - 10 \times 0{,}00783)\ a_{tubo} = (0{,}05\ \pi - 10 \times 0{,}00783) \times 300 = 23{,}57\ m^2 \right| =$$

$$= 7{,}45 \times 23{,}57 \times (99{,}5 - 20) = 13.962\ W$$

$Q_{total} = q_{tubo} + q_{aletas} = 13.962 + 127.503 = 141.465\ W = (A_{tubo} + h\ A_{aletas})\ h_{c(ext)}\ (T_b - T_{ext})$

DE OTRA FORMA:

$$Q = \frac{T_F - T_{ext}}{\dfrac{1}{A_i\ h_{Ci}} + \dfrac{1}{2\ \pi\ k\ a}\ \ln\dfrac{r_b}{r_i} + \dfrac{1}{(\mu\ A_{aletas} + A_{tubo})\ h_{c\ (ext)}}} = \left| \begin{array}{l} \eta = 0{,}8925 \\ A_{aletas} = 24 \times 10 = 240\ m^2 \ ; \ A_{tubo} = 23{,}57\ m^2 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} Re_{d_i} = \dfrac{u_F\ d_i}{\nu_{agua}} = \dfrac{1{,}5 \times 0{,}04}{0{,}294.10^{-6}} = 204080 \\ Nu = 0{,}023\ Re^{0,8}\ Pr^{0,3} = 0{,}023 \times 204080^{0,8} \times 1{,}75^{0,3} = 481{,}4 \ \Rightarrow\ h_{ci} = 8207\ W/m^2\ ^oC \end{array} \right| =$$

$$= \frac{100 - 20}{\frac{1}{\pi \text{ x } 0{,}04 \text{ x } 300 \text{ x } 8207} + \frac{1}{2\,\pi \text{ x } 42 \text{ x } 300} \ln \frac{0{,}5}{0{,}4} + \frac{1}{\{(0{,}8925 \text{ x } 240) + 23{,}57\} \text{ x } 7{,}45}} = 140.608 \text{ W}$$

De aquí se puede obtener la temperatura de la pared exterior T_b del tubo:

$$Q_{total} = \frac{T_F - T_b}{\frac{1}{A_i\ h_{Ci}} + \frac{1}{2\,\pi\,k\,a} \ln \frac{r_b}{r_i}} = \frac{100 - T_b}{\frac{1}{2\,\pi \text{ x } 0{,}04 \text{ x } 300 \text{ x } 8207} + \frac{1}{2\,\pi \text{ x } 42 \text{ x } 300} \ln \frac{0{,}5}{0{,}4}} = \frac{100 - T_b}{1{,}616.10^{-6} + 2{,}819.10^{-6}} =$$

$$= 140.608 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad T_b = 99{,}39ºC$$

que es una aproximación más que suficiente el haber considerado la temperatura de 99,5ºC.

c) Caída de la temperatura del agua calefactora que circula por el interior del tubo

$$Q_{total} = 141.465 \text{ W} = G_{agua}\ c_{p\ agua}\ (T_{entrada} - T_{salida}) = (\Omega_i\ u_F\ \rho_i)\ c_{p\ agua}\ \Delta T^* =$$

$$= \left| \Omega_i = \frac{\pi\, d_i^2}{4} = \frac{\pi \text{ x } 0{,}04^2}{4} = 0{,}001257 \text{ m}^2 \right| = 0{,}001257 \text{ m}^2 \text{ x } 1{,}5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \text{ x } 958{,}4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ x } 4211 \frac{\text{J}}{\text{kgºC}} \text{ x } \Delta T^*\text{ºC} = 7607{,}3\ \Delta T^*$$

Temperatura del agua a la entrada y salida del tubo:

$$\Delta T^* = \frac{141465}{7607{,}3} = 18{,}6ºC \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_{ent} = 100 + (18{,}6/2) = 109{,}3ºC \\ T_{sal} = 100 - (18{,}6/2) = 90{,}7ºC \end{cases}$$

d) Eficiencia de este sistema de calefacción como intercambiador de calor

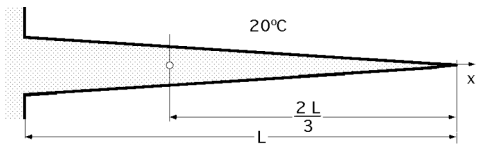
$$NTU = \frac{U\,A}{C_{mín}} = \left| \begin{array}{l} U\,A\,(T_F - T_{ext}) = 141.465 \text{ W} = U\,A\,(100 - 20) \quad \Rightarrow \quad U\,A = 1768{,}3 \text{ W/mºC} \\ C_{mín} = G_{agua}\, c_{p\ agua} = 7607{,}3 \text{ W/ºC} \end{array} \right| = \frac{1768{,}3}{7607{,}3} = 0{,}2324$$

$$\varepsilon = 1 - e^{-(NTU)} = 1 - e^{-\ 0{,}2324} = 0{,}2074 = 20{,}74\%$$

Comprobación:

$$Q_{total} = \varepsilon\ C_{mín}\ (T_{C1} - T_{F1}) = \varepsilon\ C_{mín}\ (T_{entrada\ agua} - T_{ext}) = 0{,}2474 \text{ x } 7607{,}3\ (109{,}3 - 20) = 140.900 \text{ W}$$

e) Temperatura en el vértice de la aleta situada en el centro de la tubería



$$\Phi_{vértice} = \Phi_b\ \frac{I_0\,(\beta_t \eta_t)}{I_0\,(\beta_t)} = (99{,}5 - 20)\ \frac{I_0\,(0)}{I_0\,(0{,}5378)} = 79{,}5ºC\ \frac{1}{1{,}076} = 0{,}93$$

$$T_{vértice} = 20 + (0{,}93 \text{ x } 79{,}5) = 93{,}9ºC$$

Temperatura en el centro de gravedad de la aleta:

$$\Phi_{cdg} = \Phi_b \frac{I_0\,(\beta_t \eta_t)}{I_0\,(\beta_t)} = \left| \begin{array}{l} \beta_t = 0{,}5378 \ ; \ \eta_t = \sqrt{\frac{x}{L}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}812 \\ \beta_t \eta_t = 0{,}5378 \text{ x } 0{,}812 = 0{,}4367 \end{array} \right| = (99{,}5 - 20)\ \frac{I_0\,(0{,}4367)}{I_0\,(0{,}5378)} = 79{,}5ºC\ \frac{1{,}0499}{1{,}076} = 77{,}56ºC$$

$$T_{cdg} = T_F + 77{,}56ºC = 20ºC + 77{,}56ºC = 97{,}56ºC$$

****

IV.21.- En una sala de maquinaria se desea mantener una temperatura uniforme de 20ºC y para ello se dispone de un sistema de calefacción, por agua caliente a presión, a una temperatura media de 100ºC, que consiste en un tubo de acero, k = 42 W/mºC, de diámetro interior d_i = 4 cm, diámetro exterior d_b =5 cm, y aletas anulares del mismo material que el tubo, de diámetro exterior d_e = 15 cm y espesor en la base sobre el tubo de 0,3 cm, colocadas a una distancia entre centros de 4 cm.

La velocidad del agua caliente es de 0,5 m/seg. La longitud del tubo con aletas, horizontal, es de 50 metros.

Las aletas están aisladas térmicamente en su extremo libre.

Se puede suponer una temperatura en la base de 99,5ºC

Determinar

a) El calor disipado por una aleta

b) El calor cedido a la sala por la instalación de calefacción

c) La caída de temperatura del agua calefactora que circula por el interior del tubo, y temperatura de la misma a la entrada del tubo

d) La eficiencia de este sistema de calefacción, como intercambiador de calor

e) La temperatura en el extremo aislado de las aletas

Datos del agua caliente: $\rho = 958{,}4\ kg/m^3$; $c_p = 4{,}211\ kJ/kg^oC$; $k = 0{,}682\ W/m^oC$; $\nu = 0{,}294 \times 10^{-6}\ m^2/seg$; $Pr = 1{,}75$; $g\beta/\nu^2 = 85{,}09\ 1/^oK.m^3$

Datos del aire: $\rho = 1\ kg/m^3$; $c_p = 1{,}01\ kJ/kg^oC$; $k = 0{,}03\ W/m^oC$; $\nu = 20{,}76.10^{-6}\ m^2/seg$; $Pr = 0{,}7$

RESOLUCIÓN

El problema se puede plantear como un intercambiador de calor compuesto por (tubo + aletas), por lo que se puede aplicar el concepto de (LMTD) una vez conocido el valor de (UA).

Para hallar (UA) hay que conocer el nº de aletas en el tubo: $N = \dfrac{50\ m}{0{,}04\ m} = 1250$ aletas

Cálculo de $h_{c\ ext}$ (aire en reposo)

$$Gr = \frac{g\ \beta\ \Delta T\ d_{base}^3}{\nu^2} = \left| \begin{array}{l} \Delta T = 99{,}5 - 20 = 79{,}5^oC \ \ ; \ \ d_{base} = 0{,}05\ m \\ \dfrac{g\,\beta}{\nu^2} = \dfrac{9{,}8\ \dfrac{m}{seg^2}\ \dfrac{1}{273+20}\ \dfrac{1}{^oK}}{(20{,}76.10^{-6})^2 m^2/seg} = 7{,}76.10^7\ \dfrac{1}{m^3\ ^oK} \end{array} \right| = 7{,}76.10^7 \times 79{,}5 \times 0{,}05^3 = 771.150$$

$Gr.Pr = 394830 \times 0{,}7 = 539805 < 1\ 0^7$ (laminar)

$$h_{c\ ext} = 1{,}18\ \sqrt[4]{\frac{\Delta T}{d_b}} = 1{,}18\ \sqrt[4]{\frac{79{,}5}{0{,}05}} = 7{,}45\ \frac{W}{m^2\ ^oC}$$

DE OTRA FORMA

El coeficiente de convección se puede calcular con la fórmula:

Para flujo laminar: $Nu_d = 0{,}36 + \dfrac{0{,}518\ Ra_d^{1/4}}{\{1 + (\frac{0{,}56}{Pr})^{9/16}\}^{4/9}}$, con: $\begin{cases} 10^{-6} < Ra_d < 10^9 \\ Pr > 0{,}5 \end{cases}$

$$Nu_d = 0{,}36 + \frac{0{,}518\ (539805)^{1/4}}{\{1 + (\frac{0{,}56}{0{,}7})^{9/16}\}^{4/9}} = 10{,}96 \ \Rightarrow \ h_{c\ ext} = \frac{k\ Nu}{d} = \frac{0{,}03 \times 10{,}96}{0{,}05} = 6{,}58\ \frac{W}{m^2\ nC}$$

a) Calor disipado por una aleta con su extremo libre térmicamente aislado:

$q_{1\ aleta} = \eta\ h_{c\ ext} A_{lateral\ aleta} (T_b - T_{ext})$

$A_{lateral\ aleta} = 2\pi\ (r_e^2 - r_b^2) = \left| \begin{array}{l} r_e = 7{,}5\ cm \\ r_b = 2{,}5\ cm \end{array} \right| = 2\pi\ (0{,}075^2 - 0{,}025^2) = 0{,}031416\ m^2$

$\Phi_b = T_b - T_F = 99{,}5 - 20 = 79{,}5^oC$

Rendimiento de la aleta: $\eta = G_2 (\alpha_{an}\beta_{an}) = \left| \begin{array}{l} \alpha_{an} = \dfrac{r_b}{r_e} = \dfrac{0{,}025}{0{,}075} = 0{,}333 \\ \beta_{an} = \sqrt{\dfrac{2\ h_{c\ ext} r_e^2}{k\ e}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 6{,}58 \times 0{,}075^2}{42 \times 0{,}03}} = 0{,}766 \end{array} \right| = 0{,}84$

$q_{1aleta} = \eta\ h_{c\ ext} A (T_{pF} - T_F) = 0{,}84 \times 6{,}58\ (W/m^2\ ^oC) \times 0{,}031416\ m^2 \times (99{,}5 - 20)^oC = 15{,}63\ W$

Calor disipado por todas las aletas:

$q_{N\ aletas} = 15{,}63\ W \times 1250 = 18756\ W$

b) Calor cedido a la sala por la instalación de calefacción:

$q_{tubo} = h_{c\ ext} A_{tubo} (T_b - T_{ext}) = \left| A_{tubo} = \pi\ d_b\ (0{,}04 - 0{,}003) = 5{,}812.10^{-3} m^2 \right| =$

$= 5{,}812.10^{-3} m^2 \times 6{,}58\ (W/m^2\ ^oC)\ (99{,}5 - 20)\ ^oC = 3{,}04\ W$

$q_{tubo\ total} = 1250 \text{ x } 3,04 \text{ W} = 3648,4 \text{ W}$

$Q_{total} = q_{tubo} + q_{aletas} = 20000 + 3648,4 = 23648,4 \text{ W}$

DE OTRA FORMA:

$$Q_{total} = \frac{T_F - T_{ext}}{\frac{1}{A_i h_{ci}} + \frac{1}{2\pi k a} \ln \frac{r_b}{r_i} + \frac{1}{N(\eta A_{aletas} + A_{tubo}) h_{c\,ext}}} = \left| \begin{array}{l} \eta = 0,84 \\ A_{aletas} = 0,031416 \text{ m}^2 \ ; \ A_{tubo} = 0,005812 \text{ m}^2 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} Re_{d_i} = \frac{u_F \ d_i}{\nu_{agua}} = \frac{0,5 \text{ x } 0,04}{0,294.10^{-6}} = 68027 \\ Nu = 0,023 \ Re^{0,8} \ Pr^{0,3} = 0,023 \text{ x } 68027^{0,8} \text{ x } 1,75^{0,3} = 200 \quad \Rightarrow \quad h_{ci} = \frac{200 \text{ x } 0,682}{0,04} = 3410 \ \frac{W}{m^2 ºC} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{100 - 20}{\frac{1}{\pi \text{ x } 0,04 \text{ x } 50 \text{ x } 3410} + \frac{1}{2\pi \text{ x } 42 \text{ x } 50} \ln \frac{0,5}{0,4} + \frac{1}{1250 \{(0,84 \text{ x } 0,031416) + 0,005812\} \text{ x } 6,58}} = 20964 \text{ W}$$

c) Caída de la temperatura del agua calefactora que circula por el interior del tubo

$$Q_{total} = 20964 \text{ W} = G_{agua} c_{p\,agua} (T_{entrada} - T_{salida}) = (\Omega_i \ u_F \ r_i) \ c_{p\,agua} \Delta T^* =$$

$$= \left| \Omega_i = \frac{\pi \text{ x } 0,04^2}{4} = 0,001257 \text{ m}^2 \right| = 0,001257 \text{ x } 0,5 \text{ x } 958,4 \text{ x } 4211 \text{ x } \Delta T^* = 2525,8 \ \Delta T^*$$

Temperatura del agua a la entrada y salida del tubo

$$\Delta T^* = \frac{23648}{2535,8} = 9,32ºC \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{entrada} = 100 + \frac{9,32}{2} = 104,66ºC \\ T_{salida} = 100 - \frac{9,32}{2} = 95,34ºC \end{array} \right.$$

d) La eficiencia de este sistema de calefacción, como intercambiador de calor

$$e = 1 - e^{-(NTU)} = \left| NTU = \frac{U A}{C_{mín}} = \left\{ \begin{array}{l} 23648 = U A (100 - 20) \ \Rightarrow \ U A = 295,6 \ \frac{W}{ºC} \\ C_{mín} = G_{agua} c_{p\,agua} = 2535,8 \ \frac{W}{ºC} \end{array} \right\} = \frac{295,6}{2535,8} = 0,1166 \right| =$$

$$= 1 - e^{-0,1166} = 0,11$$

Comprobación:

$$Q_{total} = \varepsilon \ C_{mín} \ (T_{C_1} - T_{F_1}) = \varepsilon \ C_{mín} \ (T_{entrada\ agua} - T_{ext}) = 0,11 \text{ x } 2535,8 \ (104,66 - 20) = 23614 \text{ W}$$

e) Temperatura en el extremo aislado de la aleta central

$$\Phi_e = \Phi_b \ G_1(\alpha_{an}\beta_{an}) = \left| \begin{cases} \alpha_{an} = 0,33 \\ \beta_{an} = 0,809 \end{cases} \Rightarrow \ G_1(\alpha_{an}\beta_{an}) = 0,83 \right| = 0,83 \ \Phi_b$$

$$T_e = 20 + (0,83 \text{ x } 79,5) = 86ºC \text{ (aleta central)} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{e\ primera\ aleta} = 20 + 0,83 \ \{(104,66 - 0,5) - 20\} = 89,85ºC \\ T_{e\ última\ aleta} = 20 + 0,83 \ \{(95,34 - 0,5) - 20\} = 82,1ºC \end{array} \right.$$

****

IV.22.- En una habitación se dispone de un sistema de calefacción por agua caliente que consiste en un tubo de acero de diámetro interior d_i = 4 cm y exterior d_b = 4,4 cm, y aletas anulares de diámetro exterior d_e = 10 cm y espesor 0,1 cm, colocadas a una distancia entre centros de 5 cm. El coeficiente k = 42 Kcal/hm°C
La longitud del tubo es de 12 metros. El coeficiente de película al exterior es, $h_{c\,ext}$ = 5 Kcal/hm²°C
El coeficiente de película por el interior del tubo correspondiente al {agua caliente-pared interior del tubo} es h_{ci} = 1000 Kcal/hm²°C

Las aletas están aisladas térmicamente en su extremo. Se puede suponer que la temperatura exterior del tubo es igual a la temperatura en la base de la aleta T_b; Temperatura del aire, $T_{ext} = 20°C$

Determinar

a) El valor U A

b) La temperatura de salida del agua calefactora que circula por el interior del tubo y el calor cedido a la habitación, si circulan 10 litros/minuto de agua, que entra en la tubería a 60°C

c) La temperatura en el extremo aislado de la primera aleta

Datos del agua, $\rho = 1000\ kg/m^3$; $c_p = 1\ Kcal/kg°C$

RESOLUCIÓN

El problema se puede plantear como un intercambiador de calor compuesto por (tubo + aletas), por lo que se puede aplicar el concepto de (LMTD) una vez conocido el valor de (UA).

Para hallar (UA) hay que conocer el nº de aletas: $N = \frac{12\ m}{0{,}05} = 240$

Calor disipado por una aleta

No se conoce la temperatura en la base T_b

$q_{1\ aleta\ anular} = \eta\ h_{c\ ext}\ A_{lateral\ aleta} (T_b - T_{ext})$

$$A_{lateral\ aleta} = 2\pi (r_e^2 - r_b^2) = \left| \begin{matrix} r_e = 5\ cm \\ r_b = 2{,}2\ cm \end{matrix} \right| = 2\pi (0{,}05^2 - 0{,}022^2) = 0{,}0127\ m^2$$

$$\eta = G_2 (\alpha_{an} \beta_{an}) = \left| \alpha_{an} = \frac{r_b}{r_e} = \frac{0{,}022}{0{,}05} = 0{,}44 \ ; \ \beta_{an} = \sqrt{\frac{2\ r_e^2\ h_{C\ ext}}{k\ e}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}05^2 \times 5}{42 \times 0{,}001}} = 0{,}77 \right| = 0{,}92$$

$$q_{1\ aleta} = 0{,}92 \times 5\ \frac{Kcal}{h.m^2.ºC} \times 0{,}01276\ m^2 \times (T_b - 20)ºC = 0{,}05842\ (T_b - 20)\ \frac{Kcal}{hora}$$

$$q_{tubo\ (para\ 1\ aleta)} = h_{c\ ext}\ A_{tubo}\ (T_b - T_{ext}) = \left| A_{tubo} = \pi \times 0{,}044 \times 0{,}049 = 0{,}0068\ m^2 \right| =$$

$$= 5\ \frac{Kcal}{h.m^2.ºC} \times 0{,}0068\ m^2 \times (T_b - 20)ºC = 0{,}034\ (T_b - 20)\ \frac{Kcal}{hora}$$

a) Valor de (U A)

$$Q_{total} = N (q_{tubo} + q_{aletas}) = 240 \times \{0{,}05842\ (T_b - 20) + 0{,}034 \times (T_b - 20)\} = \frac{T_b - 20}{0{,}04508}\ \frac{Kcal}{hora}$$

$$Q_{total} = \frac{T_F - T_i}{\frac{1}{2\pi a\ r_i h_{ci}}} = \frac{T_i - T_b}{\frac{1}{2\pi k\ a} \ln \frac{r_b}{r_i}} = \frac{T_b - 20}{0{,}04508} = \frac{T_F - 20}{\frac{1}{2\pi a\ r_i h_{ci}} + \frac{1}{2\pi k\ a} \ln \frac{r_b}{r_i} + 0{,}04508} =$$

$$= \frac{T_F - 20}{\frac{1}{2\pi \times 0{,}02 \times 12 \times 1000} + \frac{1}{2\pi \times 42 \times 12} \ln \frac{22}{20} + 0{,}04508} = \frac{T_F - 20}{0{,}045773} = U\ A\ (T_F - 20) \ \Rightarrow \ U\ A = 21{,}847\ \frac{Kcal}{hora}$$

b) Temperatura de salida del agua calefactora que circula por el interior del tubo (que entra en la tubería a 60°C si circulan 10 litros/minuto de agua

$$G_{agua} = V \rho = 10 \times 60\ \frac{litros}{hora} \times 1000\ \frac{kg}{m^3} = 600\ \frac{kg}{hora}$$

$$Q_{total} = G_{agua} c_{p_{agua}} (T_{ent} - T_{sal}) = 600\ \frac{kg}{h} \times 1\ \frac{Kcal}{kgºC} \times (60 - T_{sal})ºC$$

$$Q_{total} = U\ A\ \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \left| \begin{matrix} \Delta T_2 = T_{ent} - T_{ext} = 60 - 20 = 40 \\ \Delta T_1 = T_{sal} - T_{ext} = T_{sal} - 20 \end{matrix} \right| = 21{,}847\ \frac{60 - T_{sal}}{\ln \frac{40}{T_{sal} - 20}}$$

Igualando las ecuaciones anteriores de Q_{total} se obtiene:

$$500\ \frac{Kcal}{h} \times (60 - T_{sal})ºC = 21{,}847\ \frac{Kcal}{h}\ \frac{60 - T_{sal}}{\ln \frac{40}{T_{sal} - 20}} \ \Rightarrow \ T_{sal} = 58{,}56ºC$$

Calor cedido a la habitación

$$Q_{total} = G_{agua}\, c_{p_{agua}}\, (T_{ent} - T_{sal}) = 600\ \frac{kg}{h} \times 1\ \frac{Kcal}{kg ºC} \times (60 - 58{,}56) ºC = 858{,}2\ \frac{Kcal}{hora}$$

DE OTRA FORMA:

$$\varepsilon = 1 - e^{-NTU} = \left| NTU = \frac{U\,A}{C_{mín}} = \left\{ C_{mín} = G_{agua}\, c_{p\ agua} = 600\ \frac{kg}{h} \times 1\ \frac{Kcal}{kg\ ºC} = 600\ \frac{Kcal}{h\ ºC} \right\} = \frac{21{,}847}{600} = 0{,}03641 \right| =$$

$$= 1 - e^{-0{,}03641} = 0{,}035756 = 3{,}57\%$$

$$Q_{total} = \varepsilon\ C_{mín}\ (T_{C1} - T_{F1}) = \varepsilon\ C_{mín}\ (T_{entrada\ agua} - T_{ext}) = 0{,}035756 \times 600 \times (60 - 20) = 858{,}16\ \frac{Kcal}{hora}$$

c) Temperatura en el extremo aislado de la primera aleta

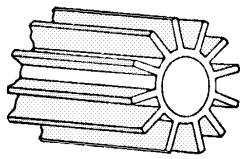
$$\Phi_e = \Phi_b G_1(\alpha_{an}\beta_{an}) = \left| G_1(\alpha_{an}\beta_{an}) = G_1(0{,}44 \times 0{,}77) = 0{,}90 \right| = 0{,}90\ \Phi_b \quad \Rightarrow \quad T_e - T_{ext} = 0{,}90\ (T_b - T_{ext})$$

1ª Aleta ($T_F = 60ºC$) ; $\frac{T_b - 20}{0{,}04508} = \frac{T_F - 20}{0{,}045773} = \frac{60 - 20}{0{,}045773} = 873{,}877$; $T_b = 59{,}4ºC$

$$T_e = T_{ext} + 0{,}90 \times (T_b - T_{ext}) = 20 + 0{,}90 \times (59{,}4 - 20) = 55{,}45ºC$$

****

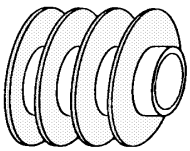
IV.23.- En un tubo de acero que tiene una conductividad térmica de 40 Kcal/hm°C y diámetro exterior d_e=30 mm, se han dispuesto 20 aletas longitudinales de sección transversal constante, de 2 mm de espesor y altura 20 mm Las aletas se considerarán con su extremo libre aislado térmicamente.



Se supondrá que el fluido que envuelve al conjunto se encuentra a una temperatura de 20°C, que la superficie exterior del tubo está a 90°C y que el coeficiente de película es h_c=30 Kcal/h.m².°C.

Si las aletas se encuentran uniformemente distribuidas sobre la superficie exterior del tubo, determinar:

a) El calor disipado y el aumento en % que supone esta disipación mediante aletas, frente al tubo sin aletas.



b) Valor del coeficiente máximo de película que debería existir entre el tubo y el fluido, para que dejase de ser interesante el uso de superficies adicionales.

c) El calor disipado, cuando en otro tubo de las mismas características se colocan 100 aletas anulares por metro lineal de tubo, de espesor constante igual a 2 mm, y radio exterior de 35 mm; el diámetro del tubo es de 30 mm. Las condiciones térmicas son las del enunciado.

RESOLUCIÓN

a) Calor disipado y el aumento en % que supone esta disipación mediante aletas, frente al tubo sin aletas.

Para el caso de no existir aletas, el calor desprendido por el tubo limpio, por metro lineal es:

$$q = h_{cF}\, A\, \Delta T = 30\ \frac{Kcal}{h\ m^2\ ºC} \times 0{,}03\ \pi\ m^2\ (90 - 20) ºC = 197{,}92\ \frac{Kcal}{h\ m}$$

Calor disipado a través del espacio de tubo no ocupado por las aletas:

$$q_1 = \frac{197{,}92\ \frac{Kcal}{h\ m_{tub}} \times \text{Fracción tubo}}{0{,}03\ \pi} = \left| \text{Fracción tubo} = 0{,}03\ \pi - (20 \times 0{,}002) = 0{,}054 \right| = \frac{197{,}92 \times 0{,}054}{0{,}03\ \pi} = 113{,}9\ \frac{Kcal}{hm.lineal}$$

Las aletas son longitudinales con el extremo térmicamente aislado; el calor disipado por las mismas es:

$$q_2 = k\ S\ \frac{T_b - T_F}{L}\ \sqrt{Bi}\ Th\sqrt{Bi}\ n = \left| \begin{array}{l} k = 40\ \frac{Kcal}{h\ mºC}\ ;\ S = 0{,}002 \times 1 = 0{,}002\ m^2\ ;\ L = 0{,}2\ m \\ T_b - T_F = 90 - 20 = 70ºC\ ;\ p = 2\ (1 + 0{,}002) = 2{,}004\ m \\ n = 20\ \text{aletas}\ ;\ Bi = \frac{h_c\, p\, L^2}{k\ S} = \frac{30 \times 2{,}004 \times 0{,}02^2}{40 \times 0{,}002} = 0{,}3006 \end{array} \right| =$$

$$= 40 \times 0{,}002\ \frac{70}{0{,}02}\ \sqrt{0{,}3006}\ Th\sqrt{0{,}3006} \times 20 = 1533\ Kcal/h\ m$$

$q_{disipado} = q_1 + q_2 = 113,92 + 1533 = 1646,92$ Kcal/h m

Aumento en % = $\dfrac{1646,92 - 197,92}{197,92} \times 100 = 732,1\%$

b) Valor del coeficiente máximo de película que debería existir entre el tubo y el fluido, para que dejase de ser interesante el uso de superficies adicionales.

$$\frac{h_{cF} e}{2 k} < 1 \quad ; \quad h_{cF} < \frac{2 k}{e} \quad ; \quad h_{cF} < \frac{2 \times 40}{0,002} \quad ; \quad h_{cF} < 40000 \ \frac{Kcal}{h\ m^2\ ºC}$$

luego se justifica el uso de aletas cuando h_{cF} sea menor de 40000 Kcal/hm²ºC

c) El calor disipado, cuando en otro tubo de las mismas características se colocan 100 aletas anulares por metro lineal de tubo, de espesor constante igual a 2 mm, y radio exterior de 35 mm; el diámetro del tubo es de 30 mm. Las condiciones térmicas son las del enunciado.

q_1 = calor disipado a través del tubo = {1 - (100 x 0,002)} q = 0,8 x 197,92 = 158,3 Kcal/h m

q_2 = Calor disipado a través de 100 aletas por metro = $\pi\ (1 - \alpha_{an}^2)\ k\ e\ \Phi_b\ \beta_{an}^2\ G_2\ (\alpha_{an}\beta an)\ n$ =

$$= \left| \begin{array}{l} \alpha_{an} = \dfrac{r_b}{r_e} = \dfrac{15}{35} = 0,4286 \\ \beta_{an} = \sqrt{\dfrac{2\ h_{cF} r_e^2}{k\ e}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 30 \times 0,035^2}{40 \times 0,002}} = 0,9585 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad G_2\ (0,4286 \times 0,9585) = 0,87 \left| \right. =$$

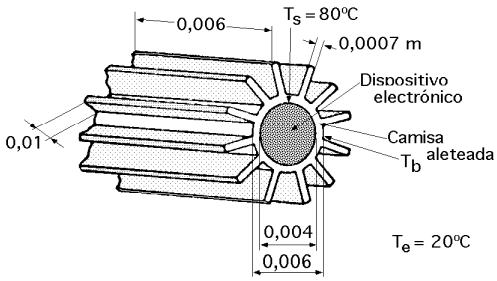
$$= \pi\ (1 - 0,4286^2) \times 40 \times 0,002 \times 70 \times 0,9585^2 \times 0,87 \times 100 = 1147,86 \text{ Kcal/h m}$$

$q_{disipado} = q_1 + q_2 = 158,3 + 1147,86 = 1306,2$ Kcal/h m

****

IV.24.- Un pequeño dispositivo electrónico que genera calor por efecto Joule, lo disipa durante su funcionamiento al exterior. Este dispositivo se puede considerar como un cilindro de dimensiones, radio R_i = 0,002 m y altura, a = 0,006 m.

Para que su funcionamiento sea lo más correcto posible se le inserta una camisa aleteada de aluminio k = 200 W/ mºK con 12 aletas longitudinales en su superficie exterior, que tienen su extremo libre térmicamente aislado. Los datos de la camisa aleteada son, diámetro exterior D_e = 0,006 m, espesor de las aletas, e = 0,0007 m, y longitud de las aletas, L = 0,01 m.



La resistencia de contacto (dispositivo electrónico-camisa aleteada) es muy importante, y vale, 10^{-3} m².ºK/W

El coeficiente de película al exterior es, h_{cF} = 25 W/m²ºK. La temperatura exterior es T_e = 20ºC

La camisa aleteada se ha diseñado para que la superficie del dispositivo electrónico no supere los 80ºC.

Determinar:

a) El calor disipado al exterior

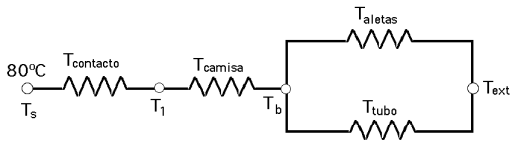
b) La temperatura que adquiriría la superficie del dispositivo electrónico si no se utilizase la camisa aleteada.

c) La temperatura de los diámetros interior y exterior de la camisa aleteada y en el extremo de la aleta

---

RESOLUCIÓN

El circuito térmico se puede poner en la forma:



El calor evacuado es: $Q = \dfrac{T_s - T_{ext}}{R_{contacto\ (dispositivo\text{-}camisa)} + R_{camisa} + R_{aletas\ +\ tubo}}$

a) Calor disipado al exterior

Calor disipado por la (aleta + tubo) = $h_{cF}\ (A_{tubo} + \mu\ A_{aletas})\ (T_b - T_{ext}) = \dfrac{T_b - T_{ext}}{\dfrac{1}{h_{cF}\ (A_{tubo} + \mu\ A_{aletas})}}$

$$Bi = \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \left| \begin{array}{l} p = 2\ (a + e) = 2\ (0{,}006 + 0{,}0007) = 0{,}0134\ m \\ S = a\ e = 0{,}006 \times 0{,}0007 = 4{,}2.10^{-6}\ m^2 \end{array} \right| = \frac{25 \times 0{,}0134 \times 0{,}01^2}{200 \times 4{,}2.10^{-6}} = 0{,}03988$$

$$\mu_{aleta} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{Th\sqrt{0{,}03988}}{\sqrt{0{,}03988}} = 0{,}9869$$

$$A_{tubo} = (D_e \pi - 12\ e) \times 0{,}006 = [0{,}006\ \pi - (12 \times 0{,}0007)] \times 0{,}006 = 6{,}27 \times 10^{-5}\ m^2$$

$$A_{aletas} = 2\ (L \times a) \times 12 = 2\ (0{,}01 \times 0{,}006) \times 12 = 1{,}44 \times 10^{-3}\ m^2$$

$$\text{Resistencia asociada a las aletas} = \frac{1}{25\ \{6{,}27.10^{-5} + 0{,}9869\ (1{,}44.10^{-3})\}} = 26{,}96\ \frac{ºK}{W}$$

$$\text{Resistencia contacto dispositivo-camisa: } \frac{10^{-3}\ (m^2\ ºK/W)}{2\ \pi\ R\ a\ (m^2)} = \frac{10^{-3}}{2\ \pi \times 0{,}002 \times 0{,}006}\ \frac{ºK}{W} = 13{,}26\ \frac{ºK}{W}$$

$$\text{Resistencia conductiva de la camisa: } \frac{1}{2\ \pi\ k\ a}\ \ln\frac{R_e}{R_i} = \frac{1}{2\ \pi \times 200 \times 0{,}006}\ \ln\frac{0{,}003}{0{,}002} = 0{,}05377\ \frac{ºK}{W}$$

$$Q = \frac{80 - 20}{13{,}26 + 0{,}05377 + 26{,}96} = 1{,}49\ W$$

b) Temperatura que adquiere la superficie del dispositivo electrónico si no se utiliza la camisa aleteada

En estas circunstancias el dispositivo tiene que eliminar la misma energía (1,49 W) generada por efecto Joule, por lo que:

$$Q = \frac{T_s - T_{ext}}{\dfrac{1}{2\ \pi\ R_i h_{cF} a}} = \frac{T_s - 20}{\dfrac{1}{2\ \pi \times 0{,}002 \times 25 \times 0{,}006}} = 1{,}49 \quad \Rightarrow \quad T_s = 810{,}5ºC$$

De otra forma:

$$T_s - T_F = \frac{E\ R_i}{2\ h_{cF}}\ (1 + \frac{R_i\ h_{cF}}{2\ k} - \frac{r^2\ h_{cF}}{2\ k\ R_i})_{r = R_i} = \left| E = \frac{Q}{A} = \frac{1{,}49\ W}{\pi \times 0{,}002^2 \times 0{,}006} = 1{,}976.10^7\ \frac{W}{m^3} \right| =$$

$$= \frac{E\ R_i}{2\ h_{cF}} = \frac{1{,}976.10^7 \times 0{,}002}{2 \times 25} = 790{,}4ºC \quad \Rightarrow \quad T_s = 20 + 790{,}4 = 810{,}4ºC$$

c) Temperatura de los diámetros interior T_i y exterior T_e de la camisa aleteada

$$Q = \frac{T_s - T_i}{R_{contacto}} \Rightarrow T_i = T_s - Q\ R_{contacto} = 80 - (1{,}49\ W \times 13{,}26\ \frac{ºC}{W}) = 60{,}24ºC$$

$$Q = \frac{T_i - T_b}{R_{camisa}} \Rightarrow T_b = T_i - Q\ R_{camisa} = 60{,}24 - (1{,}49\ W \times 0{,}05377\ \frac{ºC}{W}) = 60{,}16ºC$$

Temperatura en el extremo de la aleta

$$\frac{T(\xi) - T_F}{T_b - T_F} = \frac{Ch\{\sqrt{Bi}\ (1 - \xi)\}}{Ch\sqrt{Bi}} = \left| \xi = 1 \right| = \frac{1}{Ch\sqrt{Bi}} \quad \Rightarrow \quad T(1) = T_F + \frac{T_b - T_F}{Ch\sqrt{Bi}} = 20 + \frac{60{,}16 - 20}{Ch\sqrt{0{,}03988}} = 59{,}37ºC$$

****

IV.25.- Un dispositivo electrónico cilíndrico (k = 150 W/mºC) de dimensiones, R = 0,003 m y longitud a = 0,008 m, disipa al exterior el calor generado a través de una camisa que se inserta con 12 aletas triangulares longitudinales de aluminio ($k_{aluminio}$= 200 W/mºC), siendo su radio exterior r_b = 0,004 m.

Las dimensiones de las aletas son: base = 0,8 mm; altura = 10 mm

El coeficiente de convección es de 40 W/m²ºC

La resistencia de contacto entre el dispositivo electrónico y la camisa es de 0,002 m²ºC/W

El medio ambiente se encuentra a 15ºC

Sabiendo que el centro del dispositivo electrónico no puede superar los 80ºC, determinar:
a) El rendimiento de las aletas
b) La temperatura de la superficie exterior del dispositivo electrónico y el calor disipado al exterior
c) La temperatura en la base de las aletas y en su extremo
d) La temperatura que adquiriría la superficie del dispositivo si no llevase aletas

---

RESOLUCIÓN

a) Rendimiento de las aletas

Gráficamente se tiene:

$$\eta = \frac{2\,G_4(\beta_t)}{\beta_t} = \left| \beta_t = \sqrt{\frac{8\,f\,h_{cF}L^2}{k\,b}} = \sqrt{\frac{8\,x\,1\,x\,40\,x\,0{,}01^2}{200\,x\,0{,}0008}} = 0{,}4472 \;\Rightarrow\; G_4(\beta_t) = 0{,}22 \right| = 0{,}984 = 98{,}4\%$$

que prácticamente es del 100%, ya que en este caso lo que interesa es disipar calor y no el efecto económico

Analíticamente:

$$\eta = \frac{I_1(2\,n\sqrt{L})}{I_0(2\,n\sqrt{L})}\;\frac{1}{n\sqrt{L}} = \left(n\sqrt{L} = \frac{\beta_t}{2}\right) = \frac{I_1(\beta_t)}{I_0(\beta_t)}\;\frac{2}{\beta_t} = \left| \beta_t = 0{,}447 \;\Rightarrow\; \begin{cases} I_0 = 1{,}053 \\ I_1 = 0{,}23 \end{cases} \right| = 0{,}977 = 97{,}7\%$$

c) Temperatura de la superficie del dispositivo:

$$\frac{T_{centro} - T_{sup}}{T_{sup}} = \frac{E\,R^2}{4\,k\,T_{sup}}\,\{1 - (\frac{0}{R})\} = \frac{E\,R^2}{4\,k\,T_{sup}}$$

$$T_{sup} = T_{centro} - \frac{E\,R^2}{4\,k} = \left| E = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\pi R^2 a}\;\frac{W}{m^3} \right| = T_{centro} - \frac{\frac{Q}{\pi R^2 a}\,R^2}{4\,k} = T_{centro} - \frac{Q}{4\,\pi\,a\,k} =$$

$$= 80 - \frac{Q}{4\,\pi\,x\,0{,}008\,x\,150} = 80 - 0{,}0663\,Q \quad\Rightarrow\quad Q = \frac{80 - T_{sup}}{0{,}0663}$$

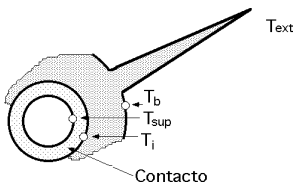
que es una ecuación que relaciona T_{sup} con el calor Q

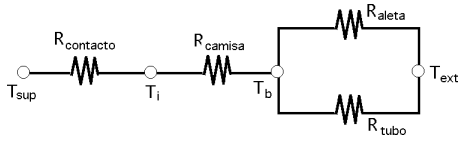
Calor disipado al exterior:

Calor disipado por 1 (aleta + tubo) $= h_{cF}\,(A_{tubo} + \mu\,A_{aleta})\,(T_b - T_{ext})$

$$R_{contacto} = 0{,}002\;\frac{m^2\,ºK}{W} = \frac{0{,}002}{2\,\pi\,R\,a}\;\frac{ºK}{W} = \frac{0{,}002}{2\,\pi\,x\,0{,}003\,x\,0{,}008} = 13{,}26\;\frac{ºK}{W}$$

$$R_{camisa} = \frac{\ln\frac{r_b}{R_i}}{2\,\pi\,k_{al}\,a} = \frac{\ln\frac{0{,}004}{0{,}003}}{2\,\pi\,x\,200\,x\,0{,}008} = 0{,}0286\;\frac{ºK}{W}$$





$$R_{aletas} = \frac{1}{h_{cF}\,(S_{tubo} + \mu\,S_{aleta})} = \left| \begin{array}{l} S_{tubo} = (2\,\pi\,R_b - 12\,b)\,0{,}008 = (2\,\pi\,x\,0{,}004 - 12\,x\,0{,}8.10^{-3})\,0{,}008 = 1{,}24.10^{-4}\,m^2 \\ S_{aletas} = 12\,(2\,x\,0{,}01)\,0{,}008 = 1{,}92.10^{-3}\,m^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{40\,\{1{,}2426.10^{-4} + (0{,}977\,x\,1{,}92.10^{-3})\}} = 12{,}5\;\frac{ºK}{W}$$

$$Q = \frac{T_{sup} - T_{ext}}{R_{contacto} + R_{camisa} + R_{aleta\,+\,tubo}} = \frac{T_{sup} - 15}{13{,}26 + 0{,}0286 + 12{,}5} = \frac{T_{sup} - 15}{25{,}785}$$

que es otra ecuación que relaciona T_{sup} con el calor Q.

En consecuencia, se tiene un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, T_{sup} y Q:

$$Q = \frac{80 - T_{sup}}{0,0663} = \frac{T_{sup} - 15}{25,785} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_{sup} = 79,83ºC \text{ (prácticamente la temperatura en el centro)} \\ Q = 2,51 \text{ W} \end{cases}$$

c) Temperatura en la base de las aletas

$$Q = \frac{T_{sup} - T_b}{R_{contacto} + R_{camisa}} = \frac{79,83 - T_b}{13,26 + 0,0286} = 2,51 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad T_b = 46,47ºC$$

Temperatura en el extremo libre de las aletas

$$\frac{\Phi}{\Phi_b} = \frac{I_0(0)}{I_0(2\ n\sqrt{L})} = \frac{1}{1,05258} = 0,95 = \frac{T_L - 15}{46,47 - 15} \quad \Rightarrow \quad T_L = 44,85ºC$$

d) Temperatura que adquiriría el dispositivo electrónico de no llevar aletas

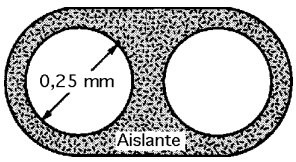
Entre el exterior del tubo y el medio ambiente se tiene

$$2,51 = \frac{T_e - 15ºC}{\dfrac{1}{40 \times 2\,\pi \times 0,003 \times 0,008}} \quad \Rightarrow \quad T_e = 431,7ºC$$

lo que motiva la colocación de estos elementos disipativos

****

IV.26.- El par de conductores de un termopar tiene ambos hilos de cobre de (k = 385 W/mºK) de 0,25 mm de diámetro, embutidos en una capa aislante de polivinilo de k = 0,1 W/mºK de perímetro exterior 1,5 mm y sección 10^{-7} m²; la configuración de este tipo de hilo viene dada en la figura. La temperatura de los gases calientes es de 350ºK y la temperatura de la pared es de 300ºK.



Determinar la longitud que deberá tener el hilo inmerso en la corriente de gases calientes para que el error de lectura en el termopar sea de 0,1ºK, sabiendo que el coeficiente de transferencia de calor hilos-gases calientes es de 30 W/m²ºK

RESOLUCIÓN

Se puede suponer que la variación de temperatura en cada sección transversal a los hilos es pequeña comparada con la variación de temperatura a lo largo de los mismos, 50ºK. Por lo tanto este problema se puede equiparar al de una protuberancia de sección transversal uniforme.

Para la distribución de temperaturas podemos tomar la correspondiente a una protuberancia con su extremo libre térmicamente aislado, de forma que, considerando toda la longitud del hilo L se tenga:

$$\frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} = \frac{-0,1ºK}{300 - 350} = \frac{1}{Ch\sqrt{Bi}} \quad ; \quad Bi = 47,7 = \frac{h_c\, p\, L^2}{k\, S}$$

El valor de kS hay que evaluarlo para las resistencias térmicas de ambos hilos y del aislante, en paralelo.

Para el hilo: $S_{hilo} = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{\pi (0,25 \times 10^{-3})^2}{4} = 4,91.10^{-8} m^2$; $k\,S_{hilo} = 385\ \dfrac{W}{mºK} \times 4,91.10^{-8} m^2 = 1,9.10^{-5}\ \dfrac{Wm}{ºK}$

Para el aislante: $S_{aisl} = 10^{-7}\ m^2$; $k\,S_{aisl} = 0,1\ \dfrac{W}{mºK} \times 10^{-7} m^2 = 10^{-8}\ \dfrac{Wm}{ºK}$

Se observa que la contribución del aislante kS es insignificante, por lo que su forma precisa o su composición son irrelevantes.

$$Bi = 47,7 = \frac{h_C p\, L^2}{k\, S} = \frac{30\ (W/m^2\ ºK) \times 0,0125\ m \times L^2}{1,9.10^{-5}\ (Wm/ºK)} \quad \Rightarrow \quad L = 0,155\ m$$

****

IV.27.- Una aleta recta de duraluminio (k = 187 W/mºK; ρ = 2770 kg/m³), tiene un perfil parabólico dado por la expresión:

$$z = \frac{b}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \Big|\ b = 3\ mm\ ;\ L = 20\ mm\ \Big| = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{20}\right)^2$$

Hallar
a) El calor disipado por la aleta, y la eficiencia, cuando la temperatura en la base sea de 500ºK y la del medio exterior de 300ºK, sabiendo que el coeficiente de transferencia de calor es de 2800 W/m²ºK
b) Masa de la aleta

RESOLUCIÓN
a) Calor disipado:

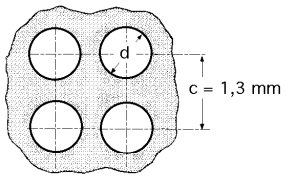
$$q = \frac{4\, h_C\, \Phi_b\, L}{1 + \sqrt{1 + 4\, m^2 L^2}} = \left| m = \sqrt{\frac{2\, h_C}{k\, b}} = \sqrt{\frac{2 \times 2800}{187 \times 0{,}003}} = 99{,}91 \right| = \frac{4 \times 2800 \times 200 \times 0{,}02}{1 + \sqrt{1 + 4\,(99{,}91^2 \times 0{,}02^2)}} = 8750\ \frac{W}{m}$$

Eficiencia: $\eta = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\, m^2 L^2}} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\,(99{,}91^2 \times 0{,}02^2)}} = 0{,}39 \Rightarrow 39\%$

Masa de la aleta por 1 m de longitud: $M = \dfrac{b\, L}{3}\, \rho\, (1\ m) = \dfrac{0{,}003 \times 0{,}02}{3}\ m^2 \times 2770\ \dfrac{kg}{m^3} \times (1\ m) = 0{,}0554\ kg$

****

IV.28.- Los intercambiadores de calor de placas perforadas se usan en sistemas de refrigeración criogénicos y consisten en un conjunto de placas de alta conductividad térmica, que van perforadas para que los fluidos circulen a través de ellas, y separadas por un aislante. El calor se transmite por conducción desde la corriente caliente a la corriente fría a través de las placas perforadas.



Se puede suponer un intercambiador en contracorriente conformado por placas rectangulares de aluminio (k = 200 W/mºK), perforadas con orificios de 0,9 mm de diámetro dispuestos en disposición regular cuadrada, separados entre centros 1,3 mm, siendo las dimensiones de cada placa de 20 mm de ancho por 80 mm de longitud y 0,5 mm de espesor, separadas entre sí por un aislante de 0,85 mm de espesor; los dos grupos de placas perforadas caliente y fría van separadas por una placa de aluminio de 4 mm tal como se muestra en la figura.
Determinar el coeficiente global de transmisión de calor entre los fluidos que circulan por los orificios de las placas calientes y las placas frías, sabiendo que el coeficiente de convección para ambos fluidos es de 400 W/m²ºK

RESOLUCIÓN
Se puede suponer que las temperaturas de los fluidos permanecen constantes (cosa que no es verdad en un intercambiador de calor). La conducción de calor entre los fluidos se produce desde las placas perforadas superiores por las que, por ejemplo, circula el fluido caliente, hasta las placas perforadas inferiores por las que circula el fluido a calentar; dichas placas perforadas se pueden asimilar, por su pequeño espesor, a aletas, siendo el flujo de calor a lo largo de las placas unidimensional.

El proceso de transferencia de calor de las placas calientes a las frías se puede asimilar considerando cada una de las placas calientes como una aleta, conectada a una pared de 4 mm de espesor yendo a continuación otra aleta constituida por cada una de las placas frías, de forma que el coeficiente global de transmisión de calor se puede interpretar en la forma:

$$\frac{1}{U\, A} = \frac{1}{h_C\, p\, b\, \eta_{aleta}} + \frac{1}{\frac{k\, e\, W}{h}} + \frac{1}{h_C\, p\, b\, \eta_{aleta}} = \frac{2}{h_C\, p\, b\, \eta_{aleta}} + \frac{1}{\frac{k\, e\, W}{h}}$$

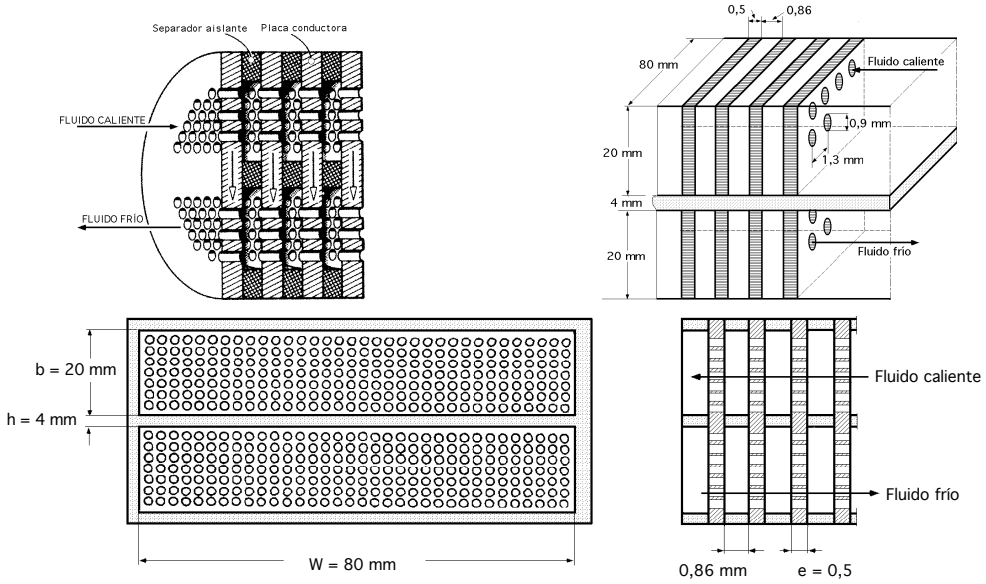
en la que p es el perímetro de la aleta y A la sección de intercambio térmico, de la forma:

$$A = \{2\, W\, b - \frac{2\, W\, b}{c^2}\, (\frac{\pi\, d^2}{4})\} + \frac{W\, b}{c^2}\, \pi\, d\, e = W\, b\, \{2 - \frac{\pi}{2}\, (\frac{d}{c})^2 + \frac{\pi\, d\, e}{c^2}\} =$$

$$= (0{,}08 \times 0{,}02)\, \{2 - \frac{\pi}{2}\, (\frac{9}{13})^2 + \frac{\pi \times 9 \times 5}{13^2}\} = 0{,}003338\ m^2$$

Para calcular el nº de Biot de la forma: $Bi = \dfrac{h_C\, p\, b^2}{k\, S}$, es necesario determinar p y S.

El perímetro, $p = \dfrac{A}{b} = \dfrac{0{,}003338}{0{,}02} = 0{,}1667\ m$



$$S = W\ e\ (1 - \varepsilon_v) = \left| \varepsilon_v = \frac{\pi\ d^2\ /4}{c^2} = \frac{\pi\ x\ 9^2\ /4}{13^2} = 0{,}376 \right| = (0{,}08\ x\ 0{,}0005)\ (1 - 0{,}376) = 2{,}496.10^{-5}\ m^2$$

$$Bi = \frac{h_C\ p\ b^2}{k\ S} = \frac{400\ (W/m^2\ ºC)\ x\ 0{,}167\ m\ x\ 0{,}02^2\ m^2}{200\ (W/mºC)\ x\ 2{,}496.10^{-5}\ m^2} = 5{,}35$$

$$\text{Rendimiento de la aleta: } \eta_{aleta} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{Th\sqrt{5{,}35}}{\sqrt{5{,}35}} = 0{,}424$$

$$\frac{1}{U\ A} = \frac{2}{h_C\ p\ b\ \eta_{aleta}} + \frac{h}{k\ e\ W} = \frac{2}{400\ x\ 0{,}1667\ x\ 0{,}02\ x\ 0{,}424} + \frac{0{,}02}{200\ x\ 0{,}0005\ x\ 0{,}08} = 3{,}537 + 0{,}5 = 4{,}037\ \frac{ºK}{W}$$

$$U = \frac{1}{4{,}037\ A} = \frac{1}{4{,}037\ x\ 0{,}003338} = 74{,}21\ \frac{W}{m^2\ ºK}$$

****