IX.- FLUJO COMPRESIBLE

pfernandezdiez.es

IX.1.- RELACIONES ENTRE EL COEFICIENTE ADIABÁTICO Y LA VELOCIDAD DEL SONI-DO EN UN FLUIDO COMPRESIBLE

Si en un fluido se origina una perturbación, la velocidad de avance del frente de onda correspondiente es proporcional a la raíz cuadrada del cociente entre el modulo de compresibilidad E del fluido y su densidad ρ. En efecto, de acuerdo con la Fig IX.1, se puede suponer que el émbolo que cierra un cilindro está en equilibrio con el fluido contenido en el mismo, situado en A a la presión p. Al originarse una perturbación, empujando al embolo mediante un incremento de presión dp, durante un tiempo dt, se desplaza a la velocidad $\vec{u}$ un cierto espacio, $u\,dt$, mientras que el frente de onda elástico y longitudinal originado por la perturbación en ese tiempo se habrá situado en la posición f a la velocidad $\vec{c}_s$.

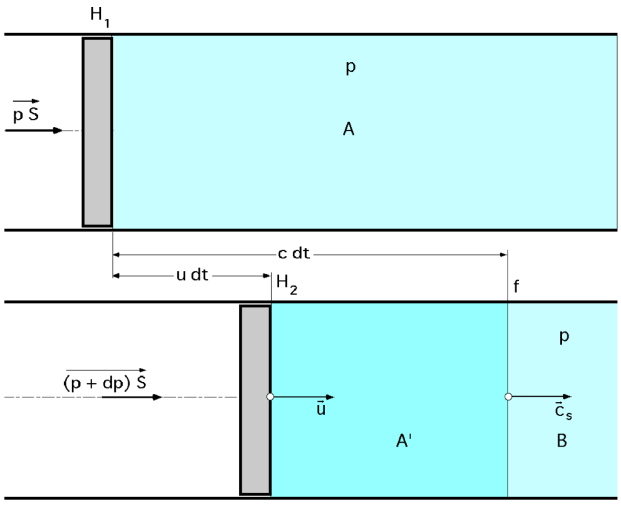


Fig IX.1.- Perturbación en un conducto

En la zona B del cilindro, todavía sin perturbar, se conserva la presión inicial que existía antes de la perturbación p.

Igualando la cantidad de movimiento al impulso mecánico se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Cantidad de movimiento:}\ \ \rho\ V\ u = \rho\ (c_s\ dt\ S)\ u \\ \textit{Impulso mecánico:}\ \ F\ dt = dp\ S\ dt \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ \ \rho\ c_s\ dt\ S\ u = S\ dt\ dp \quad ;\quad dp = \rho\ c_s\ u$$

A su vez, como el módulo de compresibilidad E es la relación entre el esfuerzo unitario dp y la disminución unitaria de volumen dv/v , de la forma:

$$E = \frac{dp}{\frac{dV}{V}} = \frac{dp}{\frac{u\ dt\ S}{c_s\ dt\ S}} = \frac{c_s}{u}\ dp \quad \Rightarrow \quad dp = \frac{u}{c_s}\ E$$

que sustituida en la anterior, permite obtener:

$$\rho\ c_s\ u = \frac{u}{c_s}\ E \quad \Rightarrow \quad c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Si se supone que la compresión es adiabática, el factor de compresibilidad k es:

$$E = \frac{1}{k} = -\ v\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q = \left| \begin{array}{c} \textit{Teorema de Reech} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q = \gamma\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \end{array} \right| = -\ v\ \gamma\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$$

en la que el signo (-) es consecuencia de que, al tratarse de una compresión, un aumento de presión dp se corresponde con una disminución de volumen dv.

La expresión general de la velocidad del sonido en un fluido cualquiera $\vec{c}_s$ es:

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \left| \rho = \frac{1}{v\ g} \right| = \sqrt{-\ v^2\ g\ \gamma\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T} = \left| \begin{array}{c} \textit{Para un gas perfecto:}\ p\ v = R\ T \\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\ \frac{R\ T}{v^2} \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\gamma\ g\ R\ T} \\ \sqrt{\gamma\ g\ p\ v} \\ \sqrt{c_p\ (\gamma\ -\ 1)\ g\ T} \end{array} \right.$$

siendo c_p el calor específico, del fluido en cuestión, a presión constante.

A su vez:

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \left| E = -\ v\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q \right| = \sqrt{\frac{-\ v\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q}{\rho}} = \left| \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_Q \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)_Q \right| = \sqrt{-\ \frac{v}{\rho}\ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_Q \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)_Q} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{v\ g} \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)_Q = -\ \frac{1}{g}\ \frac{1}{v^2} \end{array} \right| = \sqrt{-\ \frac{v}{\rho}\ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_Q\ \left(-\ \frac{1}{g}\ \frac{1}{v^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\rho\ g\ v}\ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_Q} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_Q}$$

en la que se ha tenido en cuenta que $v = 1/\rho\ g$, que permite calcular la velocidad del sonido $\vec{c}_s$ en un fluido compresible, cuando a éste se le somete a una variación de presión dp.

Se sabe que la velocidad $\vec{c}$ de derrame de un fluido es de la forma:

$$c = \sqrt{2\,g\,T_{circ}} = \sqrt{2\,g\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,p_0\,v_0\,\{1-(\frac{p}{p_0})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\}}$$

en la que p_0 y v_0 son las condiciones iniciales del fluido sin perturbar, que se corresponden con las de un punto de estancamiento por ser $c_0 = 0$.

La velocidad máxima es:

$$c_{máx} = \sqrt{2\,g\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,p_0\,v_0} = \sqrt{2\,g\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,R\,T_0} = c_{s0}\,\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

en la que $\vec{c}_{s0}$ es la velocidad del sonido en las condiciones de estancamiento.

IX.2.- FORMULACIÓN DE HUGONIOT

En una tobera se cumple la ecuación energética:

$$i_0 - i = \frac{c^2 - c_0^2}{2\,g} = c_p\,(T_0 - T) \quad \Rightarrow \quad -di = \frac{1}{2\,g}\,d(c^2) = \frac{c\,dc}{g}$$

siendo $\begin{cases} i_0 \text{ la entalpía} \\ T_0 \text{ la temperatura} \end{cases}$ *del fluido a la entrada de la tobera, e* $\begin{cases} i \text{ la entalpía} \\ T \text{ la temperatura} \end{cases}$ *del fluido en un punto de la tobera*

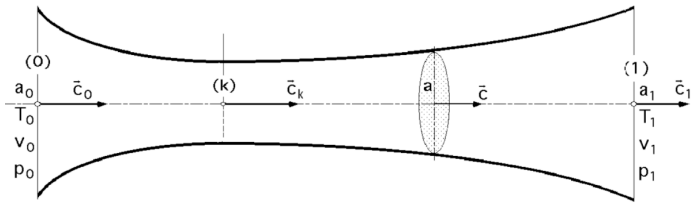


Fig IX.2.- Tobera Laval

Al estudiar la circulación de un fluido por una tobera, se supone que al ser un proceso muy rápido, éste es adiabático, por lo que el fluido no intercambia calor con el medio exterior.

De acuerdo con la Fig IX.2, la ecuación anterior se puede poner en su forma diferencial, y obtener el siguiente sistema de ecuaciones en *di*:

$$dQ = du + p\,dv = \left\{ \begin{array}{l} i = u + p\,v \\ di = du + p\,dv + v\,dp \end{array} \right\} = 0 \;\Rightarrow\; di = v\,dp \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{c\,g} = -\frac{v\,dp}{c^2}$$

que indica que un aumento de velocidad origina una disminución de presión, y viceversa.

Diferenciando la ecuación de continuidad

$$G = a\,c\,\gamma^* = \frac{a\,c}{v} = Cte \xrightarrow{\text{Diferenciando}} dG = da\,c\,\gamma^* + a\,dc\,\lambda^* + a\,c\,d\gamma^* = 0$$

en las que γ^* es el peso específico del fluido y a una sección cualquiera; se obtiene:

$$\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} + \frac{d\gamma^*}{\gamma^*} = \left| \gamma^* = \frac{1}{v} \;;\; d\gamma^* = -\frac{dv}{v^2} \right| = \frac{da}{a} + \frac{dc}{c} - \frac{dv}{v} = 0$$

Por ser un proceso adiabático:

$$p\,v^{\gamma} = Cte \quad ; \quad p\,\gamma\,v^{\gamma-1}dv + dp\,v^{\gamma} = 0 \quad ; \quad p\,\gamma\,dv + v\,dp = 0 \quad ; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{\gamma\,p}$$

que sustituida en la anterior permite obtener:

$$\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} + \frac{dp}{\gamma\,p} = \left| \frac{dc}{c} = -\frac{g\,v\,dp}{c^2} \right| = \frac{da}{a} - \frac{g\,v\,dp}{c^2} + \frac{dp}{\gamma\,p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = \left(\frac{g\,v}{c^2} - \frac{1}{\gamma\,p}\right) dp$$

En la garganta de la tobera, la sección a es mínima y, por lo tanto, $da = 0$, por lo que de la ecuación anterior se deduce:

$$\frac{g\,v}{c^2} = \frac{1}{\gamma\,p} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\gamma\,g\,p\,v}$$

que es idéntica a la expresión encontrada para $\vec{c}_s$ por lo que si la tobera funciona en régimen de diseño, la velocidad del fluido en su garganta es la del sonido, obteniéndose:

$$\frac{da}{a} = \left(\frac{g\,v}{c^2} - \frac{1}{\gamma\,p}\right) dp = g\,v\,dp\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_s^2}\right) = c\,dc\left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c^2}\right) = \left(\frac{c^2}{c_s^2} - 1\right)\frac{dc}{c} = \left| M = \frac{c}{c_s} \right| = (M^2 - 1)\,\frac{dc}{c}$$

siendo M el nº de Mach.

La ecuación así obtenida se conoce como fórmula de Hugoniot, y de ella se deduce que:

a) Si $M < 1$ resulta que (da/a) es de signo contrario a (dc/c); como (dc/c) es siempre creciente, (da/a) tiene que disminuir y, por lo tanto, en la parte convergente de la tobera el numero de Mach será siempre $M < 1$, ***régimen subsónico***

b) Si $M = 1$ resulta que $da = 0$, que se corresponde con la sección mínima de la tobera, es decir, su garganta, ***régimen sónico***

c) Si $M > 1$ resulta que (da/a) es del mismo signo que (dc/c) y, por lo tanto, como (dc/c) sigue creciendo, (da/a) también aumentará y, en consecuencia, en la parte divergente de la tobera, en condiciones de funcionamiento de diseño $M > 1$, ***régimen supersónico***

A su vez, si la ecuación $\frac{dc}{c} = \frac{dv}{v} - \frac{da}{a}$ se sustituye en la fórmula de Hugoniot, se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{da}{a} = (M^2 - 1)\left(\frac{dv}{v} - \frac{da}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)\frac{dv}{v}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{dv}{v} - (M^2 - 1)\,\frac{dc}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{c}\,M^2 = \frac{dv}{v}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que:

$$\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} + \frac{1}{\gamma}\,\frac{dp}{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad (M^2 - 1)\,\frac{dc}{c} + \frac{dc}{c} + \frac{1}{\gamma}\,\frac{dp}{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\gamma\,M^2\,\frac{dc}{c}$$

por lo que para cualquier valor del número *M*, un aumento de dc/c implica un descenso de dp/p , produciéndose una caída de presión a lo largo de la tobera, a medida que el fluido avanza por la misma.

IX.3.- DERRAME POR TOBERAS

En las toberas se produce una transformación de la entalpía del fluido en energía cinética, según la ley de Grashoff:

$$i_0 - i_1 = \frac{1}{2\,g}\,(c_1^2 - c_0^2) \quad ; \quad c_0 \approx 0 \quad ; \quad c_1 = \sqrt{2\,g\,(i_0 - i_1)} = 91{,}48\,\sqrt{i_0 - i_1}$$

con $\vec{c}_1$ en m/seg, y $(i_0 - i_1)$, en Kcal/kg

La caída de entalpía se puede leer en un diagrama entalpía-entropía, conociendo los estados inicial y final de la transformación en la tobera. Los datos del punto O son conocidos; la transformación reversible finaliza en el punto 1, cuando se alcanza la salida de la tobera, a la presión p_1, por lo que el punto 1 queda también determinado; se calculan las entalpías correspondientes $(i_0 - i_1)$ se sustituyen en la fórmula anterior y se calcula la velocidad $\vec{c}_{1'}$ de salida.

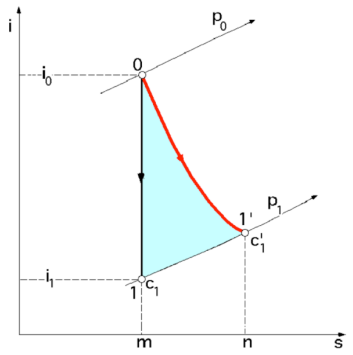


Fig IX.3.- Caída de entalpía en un diagrama (i-s)

Sin embargo, la circulación del fluido en la tobera se realiza consumiendo un trabajo de, siendo el proceso irreversible; el punto final de la transformación, en las condiciones p_1 de presión, será el punto 1, Fig IX.3; la nueva ecuación para la velocidad de salida $c_{1'} < c_1$ será de la forma:

$$c_{1'} = 91{,}48\,\sqrt{i_0 - i_{1'}}$$

Para hallar el punto 1' se define un coeficiente de reducción de velocidad φ , ya que al ser $c_1 > c_{1'}$, resulta que: $c_{1'} = \varphi\, c_1$, y si se conoce $\vec{c}_1$ mediante el proceso isentrópico, se puede aplicar el coeficiente φ de reducción de velocidad, de valor $\begin{cases} \varphi = 0{,}92 \text{ para toberas corta} \\ \varphi = 0{,}975 \text{ para toberas largas} \end{cases}$, por lo que: $i_0 - i_{1'} = \dfrac{c_{1'}}{91{,}48}$, y conocido $i_{1'}$ se halla sobre el diagrama *(i, S)* citado, la posición exacta del punto 1'.

En el proceso irreversible, la pérdida de fuerza viva viene dada por el área (m11'nm) del diagrama (i, S), Fig IX.3, es decir:

$$\text{área } (m\,l\,l'\,n\,m) = \frac{c_1^2 - c_{1'}^2}{2\,g} = i_{1'} - i_1$$

que es el calor necesario para ir del punto 1 al punto 1' , siendo una energía que no se aprovecha.

El trabajo de rozamiento T_{roz} viene dado por el área (0mn1'0), igual a:

T_{roz} = *Pérdida de energía cinética* + *área (011'0)* = T_1 + *área (011'0)*

por lo que la pérdida de energía cinética T_1 es menor que el trabajo de rozamiento T_{roz},; de este trabajo se recupera una parte representada por el área (011'0) que se transmite a una temperatura mayor que la del estado final, de modo que aún así puede transformarse ulteriormente en trabajo; esta recuperación apenas llega, en el mejor de los casos, a un 25%.

Para calcular las secciones de la tobera, aplicamos la ecuación de continuidad; por tratarse de un movimiento permanente, el gasto G a través de cualquier sección transversal de la tobera tiene que ser el mismo, es decir:

$$G = \frac{a\ c}{v} = \frac{a_0\ c_0}{v_0} = \frac{a_1\ c_1}{v_1} = Cte$$

observándose que la sección a depende de la relación c/v al ser G constante.

Si el fluido es incompresible, $v = Cte$, al producirse un aumento de la velocidad, que es lo que sucede en una tobera, forzosamente deberá disminuir la sección $\boldsymbol{a}$. En este caso, la tobera es convergente.

Si el fluido es compresible, un aumento de $\vec{c}$ implica a su vez un aumento del volumen específico v, debido a que se produce una disminución de presión por ser $p\ v^{\gamma} = Cte$; por lo tanto, la relación c/v es la que indica la variación de las secciones.

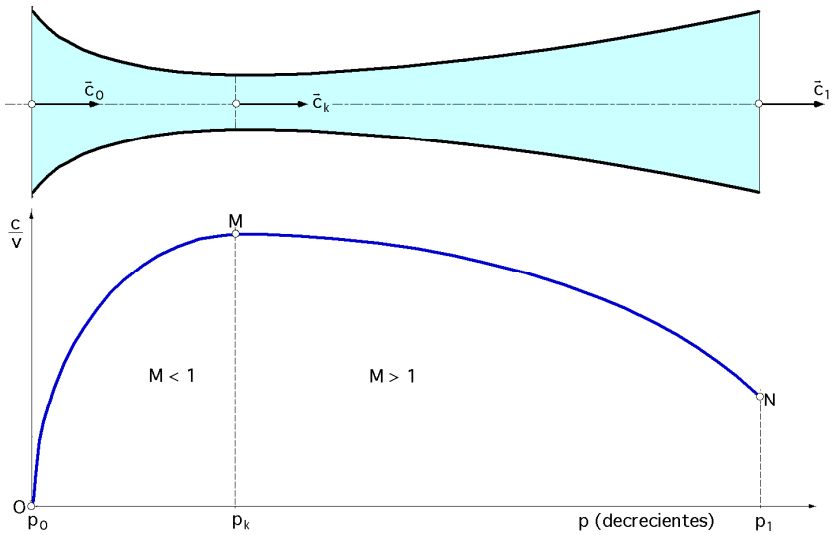


Fig IX.4.- Distribución de velocidades en las diversas secciones de una tobera Laval

Si en un sistema de coordenadas $(c/v, p)$ en donde sobre el eje de abscisas se sitúan las variaciones de presión en forma decreciente, tal como sucede en el sentido de la circulación del fluido por

la tobera, se obtiene la gráfica Fig IX.4, que dice:

*- Entre O y M, la velocidad $\vec{c}$ crece más rápidamente que v por lo que la función $\frac{c}{v}$ es creciente, y alcanza un valor máximo en el punto M, al que corresponde la presión p_k de la garganta de la tobera. Como G es constante y $\frac{c}{v}$ creciente, forzosamente la sección **a** de la tobera tiene que disminuir*

*- A partir del punto M y presiones menores que p_k, resulta que es el volumen específico v el que crece más rápidamente que $\vec{c}$ y, por lo tanto, la relación $\frac{c}{v}$ disminuye, por lo que la sección **a** de la tobera aumenta para poder mantener el gasto G constante; así se obtiene una tobera convergente-divergente tipo Laval*

Condiciones críticas.- Las condiciones críticas, en las que se produce el máximo de $\frac{c}{v}$ y el mínimo de a, se obtiene haciendo las siguientes consideraciones:

La velocidad de derrame del fluido por la tobera es:

$$c = \sqrt{2\,g\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,p_0\,v_0\,\{1-(\frac{p}{p_0})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\}}$$

y el gasto másico:

$$G = \frac{a\,c}{v} = \frac{a}{v}\sqrt{2\,g\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\,p_0\,v_0\,\{1-(\frac{p}{p_0})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\}} = \left|\begin{array}{l} p_0\,v_0^{\gamma} = p\,v^{\gamma} \\ v = v_0\,(\frac{p_0}{p})^{1/\gamma} \end{array}\right| = \frac{a}{v_0\,(\frac{p_0}{p})^{1/\gamma}}\sqrt{\frac{2\,g\,\gamma}{\gamma-1}\,p_0\,v_0\,\{1-(\frac{p}{p_0})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\}} =$$

$$= a\sqrt{\frac{p_0}{v_0}\,\frac{2\,g\,\gamma}{\gamma-1}\,\{(\frac{p}{p_0})^{\frac{2}{\gamma}}-(\frac{p}{p_0})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\}} = \left|Y^2 = (\frac{p}{p_0})^{\frac{2}{\gamma}}-(\frac{p}{p_0})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right| = a\sqrt{\frac{p_0}{v_0}\,\frac{2\,g\,\gamma}{\gamma-1}\,Y^2}$$

En la sección crítica hay que hallar el máximo de $\frac{c}{v}$, o lo que es lo mismo, el máximo de G, obteniéndose la presión p_k en la garganta de la tobera en función del coeficiente γ de la transformación adiabática y de la presión p_0 a la entrada.

$$\frac{\partial}{\partial p}\{(\frac{p}{p_0})^{\frac{2}{\gamma}}-(\frac{p}{p_0})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p_0^{2/\gamma}}\,\frac{2\,p^{(2-\gamma)/\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{p_0^{(\gamma+1)/\gamma}}\,\frac{\gamma+1}{\gamma}\,p^{1/\gamma} = 0 \quad ; \quad p_k = p_0\,(\frac{2}{\gamma-1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Como γ es un dato característico del fluido, el valor de p_k toma los siguientes valores:

- Para el vapor de agua recalentado: $\gamma = 1{,}30$; $p_k = 0{,}5457\,p_0$

- Para el vapor de agua saturado: $\gamma = 1{,}135$; $p_k = 0{,}5774\,p_0$

- Para el vapor de agua húmedo de título x: $\gamma = 1{,}035 + 0{,}1\,x$

- Para: $\gamma = 1{,}40$; $p_k = 0{,}527\,p_0$

La temperatura crítica es:

$$T_k = T_0 \left(\frac{p_k}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{2\,T_0}{\gamma+1}$$

En la misma forma se obtienen el volumen crítico y la sección crítica:

$$p_0\, v_0^{\gamma} = p_k\, v_k^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad v_k = v_0 \left(\frac{p_0}{p_k}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = v_0 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$a_k = \frac{G}{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \sqrt{2\,g\,\frac{p_0}{v_0}}} = \left| k_{máx} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \right| = \frac{G}{k_{máx} \sqrt{2\,g\,\frac{p_0}{v_0}}}$$

La presión de salida p_1 puede ser mayor o menor que la presión crítica p_k por cuanto ésta sólo depende de la presión a la entrada p_0 y del coeficiente adiabático γ, pero no de p_1.

- Si $p_1 > p_k$ hay que suponer que la relación c/v no ha alcanzado todavía su valor máximo y, en consecuencia, la forma de la tobera será convergente. Por lo tanto, carece de significado hablar de sección crítica, por lo que cualquier embocadura redondeada interiormente, o cualquier tobera cónica, o cualquier orificio practicado en pared delgada, darán un chorro con velocidad de salida máxima.

- Si $p_1 < p_k$ la tobera es convergente-divergente. Los cálculos se realizan a partir de la sección crítica, estableciendo la condición de que la vena fluida no se despegue de las paredes, para lo cual el ángulo del divergente tiene que ser del orden de 10°; la longitud L del divergente se calcula a partir de:

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{D_1 - D_k}{2\,L}$$

siendo α el ángulo de salida y L la longitud del divergente. La longitud L_1 del convergente se proyecta corta para limitar las pérdidas por rozamiento; dicho tramo, en muchas toberas, se limita a un simple borde redondeado.

IX.4.- ESTUDIO DE UNA CORRIENTE FLUIDA EN UNA TOBERA LAVAL

Si se mantienen constantes las condiciones a la entrada (p_0, v_0), el gasto G se mantiene constante, por lo que:

$$G = \frac{a \sqrt{\frac{2\,g\,\gamma}{\gamma-1}\, p_0\, v_0 \left\{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}}}{v_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\gamma}} = \frac{a\, c_{máx}}{v_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{c_{máx}}{v_0}\, a\, Y = Cte$$

El valor de Y se puede representar en función de p/p_0 , Fig IX.5, teniendo en cuenta que:

Pasa por el origen : $\frac{p_0}{p_0} = 1 \; ; \; Y = 0$

Se anula para: $\frac{p_1}{p_0} = 0 \; ; \; Y = 0$

Tiene un máximo para: $p = p_k \; ; \; \frac{p_k}{p_0} < 1$ *, punto crítico*

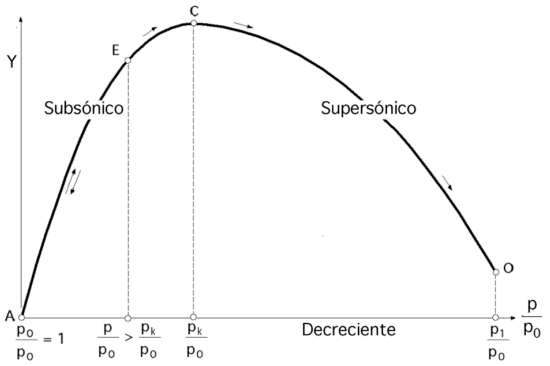


Fig IX.5.- Valores de Y en función de p/p_0

Al ser G constante, también lo será el producto *(a Y)* por lo que:

$$a\,Y = Cte \quad \Rightarrow \quad a\,dY + da\,Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = -\frac{dY}{Y}$$

y teniendo en cuenta la ecuación de Hugoniot resulta:

$$\frac{da}{a} = \left(\frac{c^2}{c_s^2} - 1\right) \frac{dc}{c} = (M^2 - 1) \frac{dc}{c} = -\frac{dY}{Y}$$

$$\frac{dY}{Y} = \left(1 - \frac{c^2}{c_s^2}\right) \frac{dc}{c} = (1 - M^2) \frac{dc}{c}$$

Si se mantiene constante la presión a la entrada de la tobera p_0 y a lo largo de la tobera va disminuyendo entre $p/p_0 = 1$ y p/p_k la curva Y es ascendente y dY creciente; $M < 1$, el signo de dc es el mismo que el de dY, por lo que dc es creciente, aumentando la velocidad hasta $c = c_s$, que sabemos se alcanza en el punto crítico k.

Sobrepasado el punto crítico k la presión p sigue decreciendo por lo que p/p_0 disminuye, tramo (CO) de la curva (AO), en el que dY es decreciente mientras que la velocidad continúa aumentando, dc es creciente, y la velocidad $\vec{c}$ es supersónica.

En una tobera diseñada para funcionar con unas determinadas condiciones de trabajo, pueden suceder los siguientes casos:

- ***La presión de salida es ligeramente superior a la presión crítica,*** $p_1 > p_k$**.-** En la parte convergente de la tobera el valor de Y va aumentando entre los puntos A y C, la corriente es subsónica y la velocidad $\vec{c}$ va aumentando, pero no llega a tomar el valor $\vec{c}_s$ del punto crítico k, por cuanto la presión de salida es superior a la crítica.

En la parte divergente de la tobera Y disminuye pero la corriente sigue siendo subsónica, ya que al no haber podido superar el punto C de la curva, se continúa en la rama (AC) de la misma; por lo tanto, en toda la tobera la corriente es subsónica, por no haberse alcanzado el punto crítico k.

- ***La presión de salida es igual a la presión crítica,*** $p_1 = p_k$**.-** En el convergente se sigue la rama (AC) como en el caso anterior, hasta llegar al punto crítico k, en donde se tiene $(c = c_s)$. En el

divergente se sigue la rama (CA) por lo que el movimiento es subsónico, salvo en la garganta en donde alcanza el punto crítico.

- La presión de salida es menor que la presión crítica, $p_1 < p_k$.- En el convergente se sigue la rama (AC) y en la garganta de la tobera se llega al punto crítico.

En el divergente, la sección a aumenta, por lo que Y disminuye siguiendo la rama (CO), siendo el movimiento supersónico; según Hugoniot la velocidad $\vec{c}$ aumenta y como p_1 es inferior a p_x el fluido se expansionará totalmente, siendo estas las condiciones de diseño y, por lo tanto, de funcionamiento perfecto.

Sin embargo, si la presión exterior aumenta, aunque manteniéndose siempre inferior a p_k, las condiciones a la salida no serán ya las de diseño o de funcionamiento perfecto. El fluido en régimen supersónico, choca a la salida de la tobera, o en sus proximidades (parte interior), con el fluido exterior de densidad mayor, apareciendo una onda de choque en una determinada sección de la tobera, Fig IX.6.

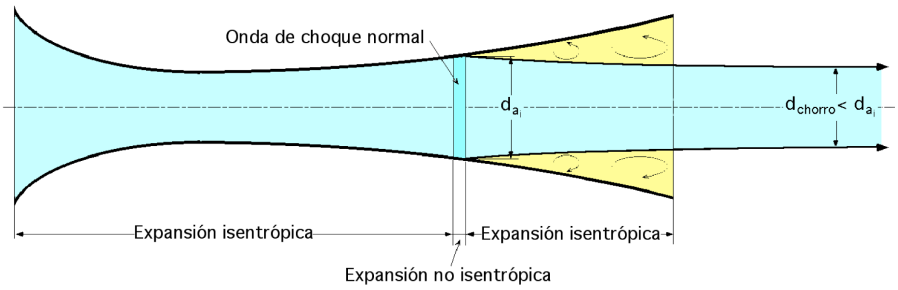


Fig IX.6.- Onda de choque en el divergente de la tobera

Después del choque, la velocidad pasa de supersónica a subsónica, experimentando el fluido una compresión irreversible, es decir, la presión aumenta, aunque su valor no llegará nunca a ser el que se alcanzaría en una compresión isentrópica.

Debido a este choque, y después de él, la parte divergente de la tobera actúa como difusor, por lo que la velocidad subsónica disminuye aún más su valor, aumentando la presión hasta igualar la de descarga p_1.

- La presión del fluido a la salida de la tobera es mayor que la presión exterior, $p > p_1$.- La onda de choque, oblicua, se produce a la salida de la tobera, en el exterior, en donde la presión p tiende a p_1, Fig IX.7.

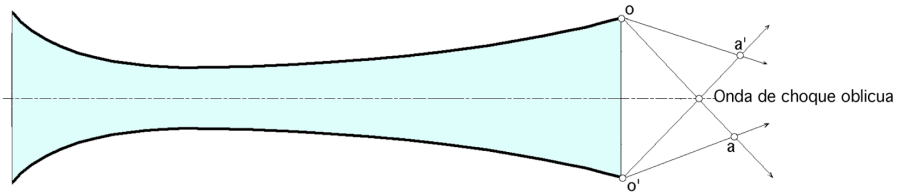
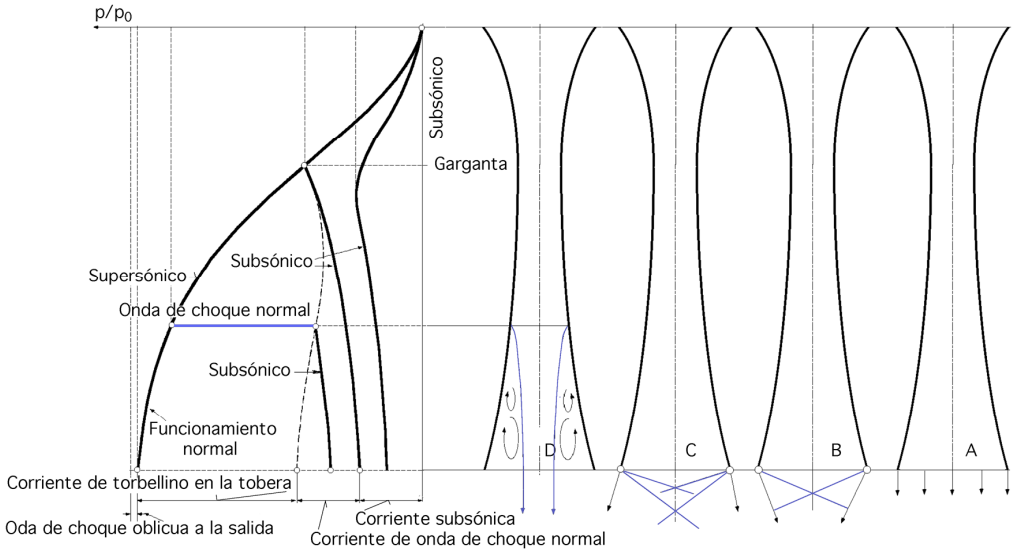


Fig IX.7.- Onda de choque a la salida de la tobera

En los casos considerados y resumidos en la Fig IX.8, el gasto G permanece constante por cuanto la sección de paso en la garganta de la tobera es fija.



A) Funcionamiento normal, $p_1 = p_2$; B) Recompresión de ondas de choque oblicuas, $p_1 < p_2 < p_2'$
C) Expansión fuera de la tobera mediante frentes de ondas estacionarias (expansión pivotante), $p_2 < p_1$
D) Recompresión por onda de choque normal que remonta hacia el cuello, con desprendimientos eventuales, $p_2 < p_2'$
Fig IX.8.- Tipos de derrame en una tobera

IX.5.- DETERMINACIÓN DEL PERFIL DE UNA TOBERA POR EL MÉTODO GRÁFICO DE KOLB

Este método permite determinar el perfil de una tobera, calculando la secciones correspondientes en forma gráfica. De acuerdo con la Fig IX.9, sea la transformación 1,2,3,4, la línea de expansión del fluido en el diagrama (T, s) a través de la tobera.

En un diagrama (p, v) se puede trazar la curva $p = f(v)$, que relaciona las presiones con los volúmenes específicos adquiridos por el fluido; admitiendo que la transformación es adiabática, la velocidad en una sección cualquiera es:

$$c = \sqrt{\frac{2\,g\,\gamma}{\gamma - 1}\,(p_0\,v_0 - p\,v)} = \sqrt{\frac{2\,g\,\gamma}{\gamma - 1}\,p_0\,v_0\,\{1 - (\frac{v_0}{v})^{(\gamma - 1)}\}}$$

Conocida esta curva se traza una paralela (O_1O_2) a la la distancia G del gasto, a una escala arbitraria. Una secante cualquiera trazada desde el origen O, tal como la (O4'), corta a (O_1O_2) en un punto c para el que se obtiene la sección correspondiente al punto 4 de la curva de expansión, $a_4 = (O_1C)$. En efecto, los triángulos semejantes (OO_1C) y (O4'm), proporcionan:

$$\frac{(4'm)}{(O\,O_1)} = \frac{(O\,m)}{(O_1C)} \quad ; \quad (O_1C) = (O\,O_1)\,\frac{(O\,m)}{(4'm)} = G\,\frac{v_4}{c_4} = a_4$$

que habrá que determinar a la misma escala que la utilizada para G. En general, cualquier recta que parta del origen O y corte a $c = f(v)$, lo hará en dos puntos, tales como el 1' y el 3' a los que corresponde la misma sección $(O_1b) = a_1 = a_3$.

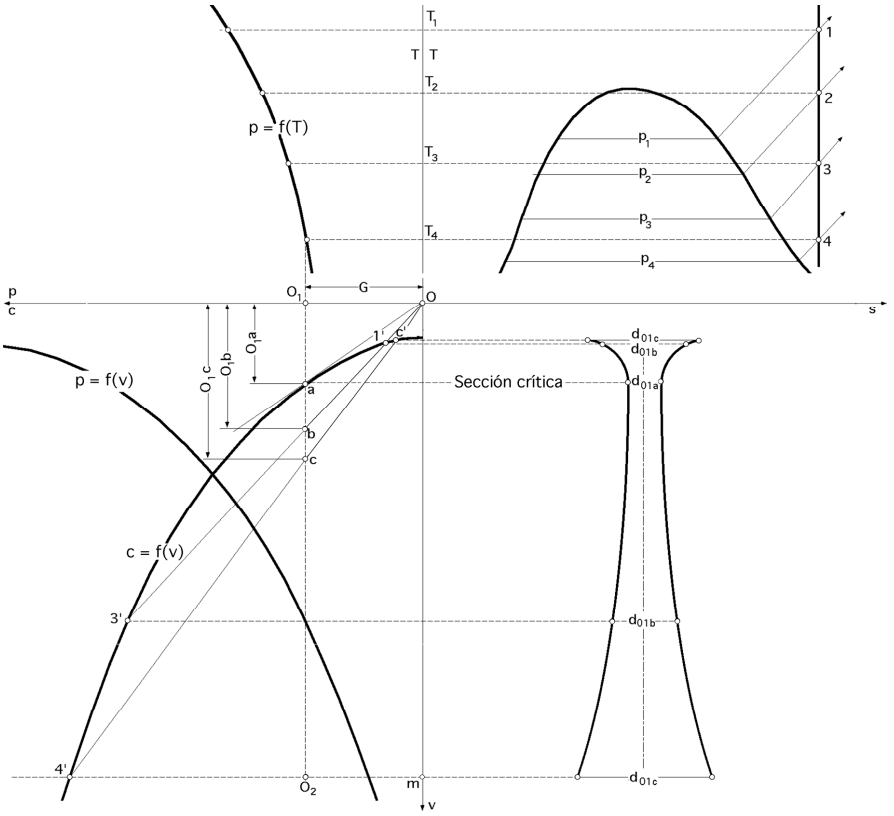


Fig IX.9.- Método gráfico de Kolb

La sección mínima $(O_1a) = a_{mín}$ corresponde a la tangente *(O2')* trazada desde O a la curva, $c = f(v)$. Este método es perfectamente aplicable sea cual fuere la línea de expansión 1,2,3,4.

IX.6.- FLUJO ISENTRÓPICO DE UN GAS PERFECTO

Vamos a establecer unas ecuaciones que permitan determinar las características de flujo isentrópico de un gas perfecto en función de las condiciones a la entrada, p_0 , v_0 , T_0 y del número de Mach M existente en cada sección. Partimos de:

$$i_0 - i = \frac{1}{2\,g}\,(c^2 - c_0^2\,) = c_p\,(T_0 - T\,) = \left|\, c_0 \;\cong\; 0 \,\right| = \frac{c^2}{2\,g} \quad \Rightarrow \quad c_p\;T_0 = c_p\;T \;+\; \frac{c^2}{2\,g}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{c^2}{2\,g\,c_p T} = \left|\, c_p = \frac{\gamma\,R}{\gamma - 1} \;;\; c_s = \sqrt{\gamma\,g\,R\,T}\,\right| = 1 + \frac{c^2\,(\gamma - 1)}{2\,g\,\gamma\,R\,T} = 1 + \frac{c^2\,(\gamma - 1)}{2\,c_s^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\,M^2$$

La relación entre temperaturas es: $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\,M^2}$

La relación entre presiones es: $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$

La relación entre volúmenes es: $\frac{v}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$

Combinando la relaciones isentrópicas anteriores y la ecuación de continuidad, se obtiene una relación entre el número de Mach y la sección correspondiente; en efecto:

$$G = \frac{c\ a}{v} = \frac{c_k\ a_k}{v_k} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{a_k} = \frac{c_k}{c}\ \frac{v}{v_k}$$

$$\frac{v}{v_k} = \frac{v}{v_0}\ \frac{v_0}{v_k} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \left\{\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right\}^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{c_k}{c} = \frac{\sqrt{\gamma\ g\ R\ T_k}}{c}\ \frac{\sqrt{T\ T_0}}{\sqrt{T\ T_0}} = \frac{\sqrt{\gamma\ g\ R\ T}}{c}\ \sqrt{\frac{T_k}{T_0}}\ \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \frac{c_s}{c}\ \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}\ \sqrt{1 + M^2\ \frac{\gamma - 1}{2}} = \frac{1}{M}\ \sqrt{\frac{2 + M^2 (\gamma - 1)}{\gamma + 1}}$$

por lo que:

$$\frac{a}{a_k} = \frac{c_k}{c}\ \frac{v}{v_k} = \frac{1}{M}\ \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + M^2\ \frac{\gamma - 1}{2}\right)}\ \frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + M^2\ \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \frac{1}{M}\ \sqrt{\left\{\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + M^2 \frac{\gamma - 1}{2}\right)\right\}^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}$$

Para: $\gamma = 1{,}4$ *resulta:* $\frac{a}{a_k} = \frac{1}{M}\ \frac{(1 + 0{,}2\ M^2)^3}{1{,}728}$

Para las condiciones de remanso dadas, el gasto máximo posible a través de un conducto en forma de tobera tiene lugar cuando en su garganta hay condiciones críticas, o sónicas. Entonces se dice que el conducto está *bloqueado* y no puede haber un gasto mayor, a menos que se modifique la sección de paso de la garganta.

El ***gasto máximo lo fija la garganta de la tobera***, de la forma:

$$G_{máx} = \frac{c_k\ a_k}{v_k} = \left| \begin{array}{l} c_k = \sqrt{\gamma\ g\ R\ T_k} \\ v_k = v_0\ \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \end{array} \right| = a_k\ \frac{\sqrt{\gamma\ g\ R\ T_k}}{v_0\ \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} = a_k\ \frac{\sqrt{\gamma\ g\ R\ T_0\ \frac{2}{\gamma + 1}}}{v_0\ \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} =$$

$$= a_k\ \frac{\sqrt{\gamma\ g\ R\ T_0\ \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}}{v_0} = \left| \textit{Para: } \gamma = 1{,}4 \right| = \frac{0{,}6847\ p_0\ a_k}{\sqrt{R\ T_0}}$$

Para calcular el *número de Mach* a partir de a/a_k con un 2% de error y, $\gamma = 1{,}40$, se pueden utilizar las siguientes ecuaciones:

$$\textit{Régimen subsónico:}\begin{cases} M = \dfrac{1 + 0{,}27\,(\dfrac{a}{a_k})^{-2}}{1{,}728\,\dfrac{a}{a_k}}\ , \textit{para: } 1{,}34 < \dfrac{a}{a_k} < \infty \\ M = 1 - 0{,}88\ ln\,(\dfrac{a}{a_k})^{0{,}45}\ , \textit{para: } 1 < \dfrac{a}{a_k} < 1{,}34 \end{cases}$$

$$\textit{Régimen supersónico:}\begin{cases} M = 1 + 1{,}2\ \sqrt{\dfrac{a}{a_k} - 1}\ , \quad \textit{para: } 1 < \dfrac{a}{a_k} < 2{,}9 \\ M = \{\,216\ \dfrac{a}{a_k} - 254\,(\dfrac{a}{a_k})^{2/3}\,\}^{1/5}\ , \quad \textit{para: } 2{,}9 < \dfrac{a}{a_k} < \infty \end{cases}$$

Para cada valor de $\boldsymbol{a}$ existen dos soluciones posibles, una subsónica y otra supersónica; la solución adecuada se toma teniendo en cuenta la presión, o la temperatura, en alguna sección del conducto.

IX.7.- ONDA DE CHOQUE NORMAL

Si un sólido se mueve a velocidad constante en un fluido, sumando al conjunto (sólido-fluido) una velocidad igual y de sentido contrario a la del sólido, el fenómeno mecánico no se ha alterado, siendo ahora el fluido el que se mueve alrededor del sólido estacionario. Ahora bien, aunque la velocidad del sólido, o lo que es lo mismo, la velocidad del fluido sin perturbar alrededor del sólido estacionario, sea subsónica, si esta velocidad se aproxima a la velocidad del sonido, es posible que en un cierto punto alrededor del sólido la velocidad del fluido exceda la velocidad del sonido, y entonces el flujo se hace muy complejo, originándose perturbaciones de gran importancia, que afectan el empuje ascensional y el arrastre del perfil de ala. En la onda de choque los parámetros del fluido y su velocidad cambian bruscamente.

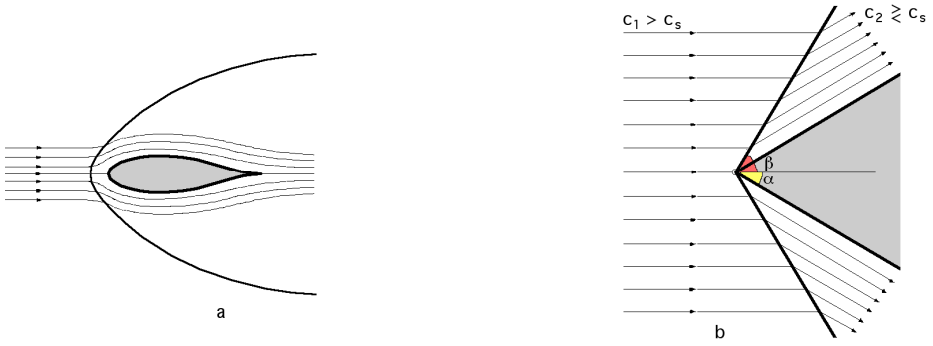


Fig IX.10- (a) Salto en curva y (b) salto cónico

La velocidad disminuye bruscamente y la presión, por el contrario, aumenta también bruscamente. El fenómeno se estudia mejor considerando el caso recíproco, sólido en reposo y corriente en movimiento.

El frente del salto (onda de choque) tiene un espesor de unos 10^{-5} mm en un gas real, y divide la corriente en dos partes:

- Aguas arriba del salto la corriente está imperturbada

- Aguas abajo, hasta llegar al sólido, la corriente está perturbada con un aumento de la presión, densidad y temperatura, fluyendo la corriente sobre el sólido después del salto

Antes del salto el sólido no tiene influjo alguno sobre la corriente, ya que la corriente supersónica incide sobre el obstáculo, mientras que la corriente subsónica se deforma antes de llegar al obstáculo, y se prepara para realizar el flujo sobre el mismo. A esto se debe el aumento de la resistencia que experimenta un sólido, por ejemplo un avión, al acercarse a la velocidad del sonido (barrera del sonido).

Según la forma del sólido y la velocidad de la corriente incidente se puede originar:

- El salto normal en el cual el frente es normal a la dirección de la corriente, $\beta = 90^o$

- El salto cónico representado en la Fig IX.10b, $\beta < 90^o$, que tiene forma curva, como en la Fig IX.10a, acercándose en la parte central a un salto normal.

Para una misma velocidad de la corriente incidente la disminución de la velocidad es mayor en el salto normal que en el cónico, hasta tal punto que en el primero, aguas abajo, la velocidad siempre es subsónica, mientras que en el segundo puede ser subsónica o supersónica, aunque en todo caso menor que aguas arriba.

En el frenado que la corriente experimenta en la onda de choque se originan pérdidas importantes, por lo que la presión del fluido después del salto es menor que en el caso isentrópico, mientras que la temperatura es mayor.

El ángulo β depende del número de Mach antes del salto y del ángulo α del perfil según la relación:

$$tg\,\alpha = \frac{M_i^2\ sen^2\beta\ -\ 1}{1 + M_i^2\ (\frac{\gamma+1}{2}\ -\ sen^2\beta\ )}\ cotg\ \beta$$

Esta fórmula se basa en el método Schlieren que determina la velocidad de la corriente supersónica fotografiando el flujo, aprovechando los cambios de refracción de la luz producidos por los cambios de densidad para así fotografiar la onda de choque. En la fotografía se mide el ángulo β y conocidos α y β en la ecuación anterior se despeja M_i.

A medida que aumenta el ángulo del borde de ataque del perfil α, el ángulo β aumenta, es decir, la intensidad de la onda crece. Si el ángulo α excede de un valor máximo, la onda se desprende del sólido y en su parte central toma una forma aproximada al salto normal. Si el ángulo α sigue aumentando, toda la onda toma la forma del salto normal aumentando intensamente las pérdidas.

Los perfiles aerodinámicos para corrientes subsónicas tienen el borde de ataque redondeado y el borde de estela afilado para evitar el fenómeno de separación de la vena fluida, con la consiguiente formación de remolinos y aumento de pérdidas. Los perfiles para corrientes supersónicas, por el contrario, deben tener el borde de ataque afilado, dependiendo la disminución de las pérdidas más de la parte frontal del sólido.

ONDA DE CHOQUE NORMAL EN CONDUCTOS.- La onda de choque normal produce una irreversibilidad en los flujos supersónicos. Excepto a presiones muy bajas, estas ondas de choque son muy delgadas, (unas micras de espesor), y se presentan como discontinuidades en el fluido. Para su estudio seleccionaremos un volumen de control inmediatamente por delante y por detrás de la onda, tal como se muestra en la Fig IX.11.

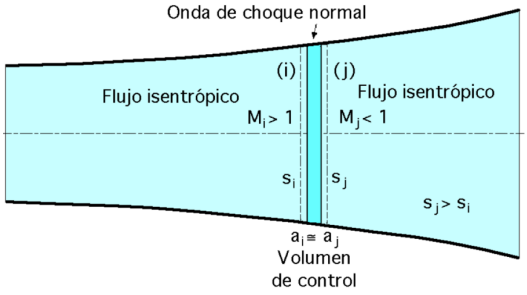


Fig IX.11.- Onda de choque normal

Para calcular los cambios de todas las propiedades, incluyendo la velocidad de la onda, utilizaremos las siguientes relaciones entre las secciones i y j, anterior y posterior a la onda de choque:

Ecuación de continuidad: $G_i = G_j \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a_i\ c_i}{v_i} = \dfrac{a_j\ c_j}{v_j} \quad \xrightarrow{a_i = a_j} \quad \dfrac{c_i}{v_i} = \dfrac{c_j}{v_j}$

Ecuación de la cantidad de movimiento: $(p_i\ a_i - p_j\ a_j)\ dt = c_j\ dt\ a_j\ \rho_j\ c_j - c_i\ dt\ a_i\ \rho_i\ c_i$

$$p_i - p_j = c_j^2\ \rho_j - c_i^2\ \rho_i = c_j^2 \frac{\gamma_j^*}{g} - c_i^2 \frac{\gamma_i^*}{g}$$

Ecuación energética: $i_i + \dfrac{c_i^2}{2\,g} = i_j + \dfrac{c_j^2}{2\,g} \quad \Rightarrow \quad i_i - i_j = \dfrac{c_j^2 - c_i^2}{2\,g}$

Ecuación de los gases perfectos: $\left(\dfrac{p\ v}{T}\right)_i = \left(\dfrac{p\ v}{T}\right)_j \quad ; \quad \gamma = Cte \quad ; \quad i = c_p T \quad ; \quad c_p = Cte$

Si se conocen las condiciones aguas arriba $(p_i,\ c_i,\ v_i,\ i_i,\ T_i)$, las ecuaciones anteriores permiten hallar las condiciones aguas abajo $(p_j,\ c_j,\ v_j,\ i_j,\ T_j)$. Como la velocidad aparece al cuadrado, sólo será correcta aquella solución en la que $s_j > s_i$ de acuerdo con el Segundo Principio de la Termodinámica, siendo s_j y s_i las entropías correspondientes a las secciones posterior y anterior de la onda de choque.

LINEAS DE RAYLEIGH Y FANNO.- Para un gas perfecto, las relaciones de las diversas propiedades a través de la onda de choque, son función únicamente de γ y del número Mach aguas arriba M_i.

Eliminando v_j y c_j en las ecuaciones anteriores: $\frac{c_i}{c_j} = \frac{v_i}{v_j}$

$$p_i - p_j = \frac{c_j^2}{g\, v_j} - \frac{c_i^2}{g\, v_i} = c_j^2\ \rho_j - c_i^2\ \rho_i$$

$$i_i - i_j = \frac{c_j^2 - c_i^2}{2\,g} = \left| i = c_p T = c_p\ \frac{p\,v}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\, p\, v \right| = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,(p_i\ v_i - p_j\ v_j) = \left| v_j = \frac{v_i\ c_i}{c_i} \right| =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,(p_i\, v_i - p_j\ \frac{v_i\ c_i}{c_i}) = \frac{\gamma\ v_i}{\gamma - 1}\,(p_i - p_j\ \frac{c_i}{c_i})$$

Teniendo en cuenta la ecuación:

$$p_i - p_j = \frac{c_j^2}{g\ v_j} - \frac{c_i^2}{g\ v_i} = \frac{c_j^2}{g\frac{c_j}{c_i}\, v_i} - \frac{c_i^2}{g\ v_i} = \frac{c_i^2}{g\ v_i}\,(c_j - c_i) \quad \Rightarrow \quad c_j = c_i + \frac{p_i - p_j}{c_i}\, g\ v_i$$

se obtiene:

$$\frac{\gamma\ v_i}{\gamma - 1}\,(p_i - p_j\ \frac{c_i + \frac{p_i - p_j}{c_i}\, g\, v_i}{c_i}) = \frac{(2\, c_i + \frac{p_i - p_j}{c_i}\, g\, v_i)\ \frac{p_i - p_j}{c_i}\, g\, v_i}{2\,g}$$

$$\frac{\gamma\ v_i}{\gamma - 1}\ \frac{c_i^2\,(p_i - p_j) - p_j\ v_i\ g\ (p_i - p_j)}{c_i^2} = \frac{(2\, c_i + \frac{p_i - p_j}{c_i}\, g\ v_i)\ \frac{p_i - p_j}{c_i}\, g\ v_i}{2\,g}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\ \frac{c_i^2 - p_j\ v_i\ g}{c_i^2} = \frac{2\, c_i^2 + (p_i - p_j)\, g\ v_i}{2} = c_i^2 + \frac{(p_i - p_j)\, g\ v_i}{2}$$

$$p_j\ v_i\ g\ \frac{\gamma + 1}{2\,(\gamma - 1)} = \frac{c_i^2}{\gamma - 1} - \frac{p_i\ g\ v_i}{2}$$

Dividiéndola por $(p_i\, v_i\, g)$ resulta la relación de presiones:

$$\frac{p_j}{p_i}\ \frac{\gamma + 1}{2\,(\gamma - 1)} = \frac{c_i^2}{(\gamma - 1)\, p_i g\ v_i} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_j}{p_i} = \frac{2\, c_i^2}{(\gamma + 1)\, p_i g\ v_i} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{1}{\gamma + 1}\,\{\frac{2\, c_i^2}{p_i\ g\ v_i} - (\gamma - 1)\} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \textit{Para un gas perfecto} \\ \frac{c_i^2}{p_i\ v_i\ g} = \frac{c_i^2}{R\ T_i\ \gamma\ g} = \frac{\gamma\ c_i^2}{c_s^2} = \gamma\ M_i^2 \end{array} \right| = \frac{2\ \gamma\ M_i^2 - (\gamma\ -\ 1)}{\gamma\ +\ 1}$$

observándose que para cualquier valor de γ y $M_i > 1$ resulta que $p_j > p_i$, lo cual implica que el número de Mach aguas arriba de una onda de choque normal tiene que ser supersónico, para satisfacer el Segundo Principio de la Termodinámica.

Respecto al número de Mach aguas abajo de la onda de choque, se tiene:

$$p_i - p_j = \frac{c_j^2}{g\ v_j} - \frac{c_i^2}{g\ v_i} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{c^2}{p\ v\ g} = \gamma\ M^2 \\ \dfrac{c_j^2}{p_j\ v_j\ g} = \gamma\ M_j^2 \quad \Rightarrow \quad p_j = \dfrac{c_j^2}{\gamma\ v_j\ g\ M_j^2} \end{array} \right| = \gamma\ M_j^2\ p_j - \gamma\ M_i^2\ p_i$$

$$p_j\ (1 + \gamma\ M_j^2) = p_i\ (1 + \gamma\ M_i^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{p_j}{p_i} = \frac{1 + \gamma\ M_i^2}{1 + \gamma\ M_j^2}$$

que se conoce como ***línea de Rayleigh,*** y proporciona la relación entre las presiones existentes a ambos lados de la onda de choque, en función de los números de Mach correspondientes.

Igualando esta expresión a la anteriormente deducida y despejando M_j:

$$\frac{p_j}{p_i} = \frac{1 + \gamma\ M_i^2}{1 + \gamma\ M_j^2} = \frac{2\ \gamma\ M_i^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$M_j^2 = \frac{1}{\gamma}\ \{\frac{1 + \gamma\ M_i^2}{2\ \gamma\ M_i^2 - (\gamma - 1)}\ (\gamma - 1) - 1\} = \frac{1}{\gamma}\ \frac{2\ \gamma + (\gamma - 1)\ \gamma\ M_i^2}{2\ \gamma\ M_i^2 - (\gamma - 1)} = \frac{2 + (\gamma - 1)\ M_i^2}{2\ \gamma\ M_i^2 - (\gamma - 1)}$$

Como M_i es supersónico, esta ecuación predice que para todo valor de $\gamma > 1$, M_j debe ser subsónico; en consecuencia, una onda de choque normal desacelera bruscamente el flujo, pasando éste desde unas condiciones supersónicas a otras subsónicas.

Para calcular la *relación entre las temperaturas*, antes y después de la onda de choque, partimos de la ecuación:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\ p_i\ v_i + \frac{c_i^2}{2\ g} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ p_j\ v_i + \frac{c_j^2}{2\ g} \quad ; \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ (\frac{p_j}{\rho_j} - \frac{p_i}{\rho_i}) + \frac{c_j^2 - c_i^2}{2\ g} = 0$$

y en general:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\ \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2\ g} = Cte \quad ; \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma}\ \frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} = Cte$$

Para un gas perfecto: $p\ v = R\ T \quad \Rightarrow \quad p = \rho\ g\ R\ T$, por lo que:

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma}\ \frac{c^2}{2} + g\ R\ T = Cte \quad \Rightarrow \quad T\ (\frac{\gamma - 1}{\gamma}\ \frac{c^2}{2}\ \frac{\rho}{p} + 1)\ g\ R = Cte \quad \Rightarrow \quad T\ (\frac{\gamma - 1}{\gamma}\ \frac{c^2}{2}\ \frac{\rho}{p} + 1) = Cte$$

y como $c^2 = \gamma\ g\ R\ T\ M^2$, resulta la siguiente relación para las temperaturas:

$$T\ (\frac{\gamma - 1}{\gamma}\ \frac{\gamma\ g\ R\ T\ M^2}{2}\ \frac{\rho}{\rho\ g\ R\ T} + 1) = Cte \quad \Rightarrow \quad T\ (\frac{(\gamma - 1)\ M^2}{2} + 1) = Cte \quad \Rightarrow \quad \frac{T_j}{T_i} = \frac{\frac{M_i^2}{2}\ (\gamma - 1) + 1}{\frac{M_j^2}{2}\ (\gamma - 1) + 1}$$

en la que se observa que al ser: $M_i > M_j \quad \Rightarrow \quad T_j > T_i$.

Para determinar la relación entre los *volúmenes específicos*, o lo que es lo mismo, entre las *velocidades del fluido*, antes y después de la onda de choque normal, partimos de:

$$v = \frac{R\,T}{p} = \left| \begin{array}{l} T\,\{\frac{M^2}{2}\,(\gamma-1)+1\} = Cte \\ p\,(1+\gamma\,M^2) = Cte \end{array} \right| = 2\,R\,\frac{1+\gamma\,M^2}{M^2\,(\gamma-1)+2}$$

$$\frac{v_i}{v_j} = \frac{(1+\gamma\,M_i^2)\,\{M_j^2\,(\gamma-1)+2\}}{(1+\gamma\,M_j^2)\,\{M_i^2\,(\gamma-1)+2\}} = \frac{(1+\gamma\,M_i^2)\,\{(\gamma-1)\,\frac{M_i^2\,(\gamma-1)+2}{2\,\gamma\,M_i^2-(\gamma-1)}+2\}}{\{1+\gamma\,\frac{M_i^2\,(\gamma-1)+2}{2\,\gamma\,M_i^2-(\gamma-1)}\}\{M_i^2\,(\gamma-1)+2\}} =$$

$$= \frac{(1+\gamma\,M_i^2)\,(\gamma+1)^2\,M_i^2}{\{\gamma\,M_i^2\,(\gamma+1)+(\gamma+1)\}\{M_i^2\,(\gamma-1)+2\}} = \frac{(\gamma+1)\,M_i^2}{M_i^2\,(\gamma-1)+2}$$

que relaciona los volúmenes específicos aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque con el número M_i. A su vez, como $p = \rho\,g\,R\,T$, se obtiene:

$$T\,\{\frac{M^2}{2}\,(\gamma-1)+1\} = \left| p = \rho\,g\,R\,T \;\;;\;\; T = \frac{p}{\rho\,g\,R} \right| = \frac{p}{\rho\,g\,R}\,\{\frac{M^2}{2}\,(\gamma-1)+1\} = Cte$$

Teniendo en cuenta $\left\{ \begin{array}{c} \textit{Ecuación de continuidad: } \rho\,c = Cte \\ M = \frac{c^2}{c_s^2} = \frac{c^2}{\gamma\,g\,p\,v} = \frac{\rho\,c^2}{\gamma\,p} \end{array} \right\}$ se obtiene:

$$\frac{p\,c}{g\,R}\,(\frac{\rho\,c^2}{2\,p}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}+1) = Cte \quad \Rightarrow \quad p\,c\,(\frac{\rho\,c^2}{2\,p}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}+1) = Cte$$

y como $c=\sqrt{\gamma\,g\,R\,T}\;M$, sustituyendo en la anterior e incluyendo los valores de γ, g y R en la constante se llega a:

$$p\sqrt{T}\;M\,(\frac{\rho\,c^2}{2\,p}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}+1) = Cte$$

en la que el valor de T se deduce de la ecuación

$$T\,(\frac{\rho\,c^2}{2\,p}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}+1) = Cte$$

por lo que:

$$p\,M\,\sqrt{\frac{\rho\,c^2}{2\,p}\,(\gamma-1)+1} = \left| \begin{array}{c} p = \rho\,g\,R\,T \\ c = \sqrt{\gamma\,g\,R\,T}\;M \end{array} \right| = p\,M\,\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}\,M^2+1} = Cte \quad \Rightarrow \quad \frac{p_i}{p_j} = \frac{M_j\,\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}\,M_j^2+1}}{M_i\,\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}\,M_i^2+1}}$$

que se conoce como ***línea de Fanno***.

La intersección de las líneas de Rayleigh y Fanno, es:

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{M_j \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2} M_j^2 + 1}}{M_i \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2} M_i^2 + 1}} = \frac{1 + \gamma M_j^2}{1 + \gamma M_i^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_i}{M_j} = \frac{\sqrt{(\gamma - 1) M_j^2 + 2}}{\sqrt{(\gamma - 1) M_i^2 + 2}} = \frac{1 + \gamma M_j^2}{1 + \gamma M_i^2}$$

Para hallar el valor de M_i en función de M_j se procede de la siguiente forma:

$$\frac{M_i^2 \ (\gamma - 1) M_i^2 + 2}{(1 + \gamma M_i^2)^2} = \frac{M_j^2 \ (\gamma - 1) M_j^2 + 2}{(1 + \gamma M_j^2)^2} = A \quad \Rightarrow \quad M_i^4 \{(\gamma - 1) - \gamma^2 A\} + 2 M_i^2 (1 - \gamma A) - A = 0$$

$$M_i^2 = \frac{-(1 - \gamma A) \pm \sqrt{1 - \gamma A - A}}{\gamma - 1 - \gamma^2 A}$$

Operando y tomando el signo (-) se obtiene:

$$M_i^2 = \frac{-2 + M_j^2 (\gamma - 1)}{2 g M_j^2 - (\gamma - 1)} = \frac{\frac{2}{\gamma - 1} + M_j^2}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_j^2 - 1}$$

que permite determinar, sustituyendo en las expresiones T_i/T_j , p_i/p_j , etc, los valores de las mismas en función del número de Mach, bien M_i ó M_j.

Otras expresiones de las líneas de Fanno y Rayleigh, en coordenadas (i, s)

Línea de Fanno.- En el movimiento de fluidos por conductos de sección constante, se emplea frecuentemente la relación:

$$\Psi = \frac{G}{a} = \gamma^* c = \frac{c}{v} = Cte$$

en la que Ψ es una función constante a lo largo de la conducción, y puede considerarse como una medida de la *intensidad del movimiento*.

A la entrada, el fluido está en el estado 0 caracterizado por las condiciones $(c_0 = 0, i_0)$. Cuando el fluido se expande pasa a otro estado de entalpía i; la velocidad en la sección correspondiente sabemos es de la forma:

$$c = 91{,}48 \sqrt{i_0 - i}$$

Cualquiera que sea la ley del rozamiento del fluido sobre las paredes de la conducción, el valor del volumen específico es:

$$v = \frac{91{,}48 \, a \sqrt{i_0 - i}}{G} = k \sqrt{i_0 - i}$$

en la que k es una constante, siempre que lo sea G/a, (caso de tubos cilíndricos en régimen estacionario).

Para cada valor de G/a el volumen específico dado por la ecuación $v = k\sqrt{i_0 - i}$, representa una familia de curvas, $v = Cte$, para los diversos valores de i; hallando su intersección con las curvas, $i = Cte$, se obtiene el lugar geométrico de los correspondientes valores de i y v que es otra forma de definir la línea de Fanno, para cada valor de G/a.

Hay que tener en cuenta que para una entalpía i_0 las curvas de $i = Cte$, son a su vez curvas de velocidad $\vec{c}$ constante, y se comprueba, como veremos mas adelante, que en los puntos a, b, c... en los que las curvas de Fanno cortan a la curva, $i_s = Cte,\ M=1$, es decir a:

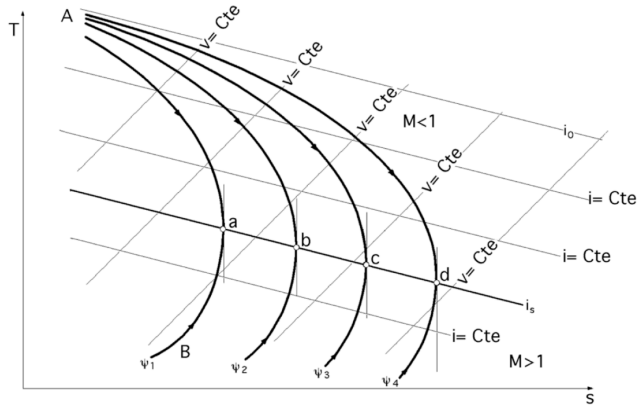


Fig IX.12.- Curvas de Fanno en el diagrama (T-s)

$$c_s = 91{,}48\sqrt{i_0 - i_s} \quad ; \quad i_s = i_0 - \left(\frac{c_s}{91{,}48}\right)^2$$

las tangentes a dichas curvas son verticales y los puntos de tangencia los de máxima entropía para cada curva.

Su representación en el diagrama *(T, s)* se indica en la Fig IX.12. Como todo proceso real va ineludiblemente ligado a un aumento de entropía, las curvas de Fanno correspondientes a un tubo cilíndrico se interrumpirán en los puntos a, b, c... de tal modo, que la velocidad límite que el fluido puede alcanzar por su expansión en dicho tubo cilíndrico, será la del sonido.

Si el *movimiento es supersónico*, el frotamiento da lugar a un aumento de presión, temperatura y densidad, y a una disminución de la velocidad del número Mach.

Si el *movimiento es subsónico*, el frotamiento da lugar a un aumento de la velocidad y del número Mach, y a una disminución de la presión, temperatura y densidad.

En ambos casos, el número Mach tiende siempre a la unidad, por lo que es imposible observar el paso de $M < 1$, a $M > 1$, y viceversa, al menos de una manera continua.

En el diagrama *(i, s)* para cada valor de i y para i_0 dada, la forma de las líneas de Fanno no varía, desplazándose paralelas unas a otra a medida que varía la función φ. Su tangente vertical coincide, como sabemos, con $M=1$, siendo los puntos a, b, c, ... de entropía máxima.

Para determinar la ecuación de las curvas de Fanno en el diagrama *(i, s)* representado en la Fig IX.13, de la forma $s = f(i)$, partimos de las siguiente ecuaciones:

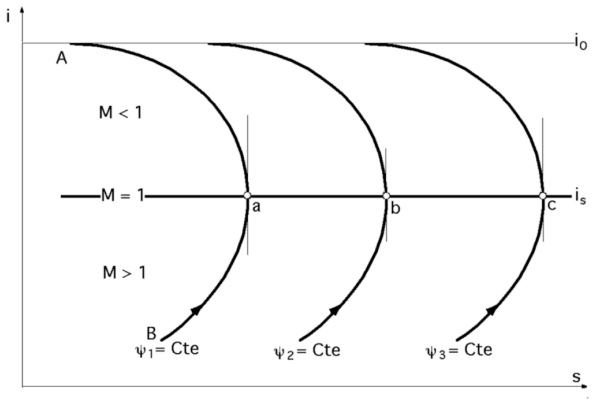


Fig IX.13.- Curvas de Fanno en el diagrama (i-s)

Proceso irreversible: $s - s_0 = c_v \; ln \; \dfrac{p \; v^g}{p_0 \; v_0^g}$

Ecuación energética: $i_0 = i + \dfrac{c^2}{2\,g}$

$c_0 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2\,g\,(i_0 - i)}$

Ecuación de continuidad: $G = \dfrac{c}{v} \;\; ; \;\; a = Cte \;\; ; \;\; v = \dfrac{c}{G}$

Ecuación de estado: $p\,v = R\,T$

$i = c_p\,T = c_p\,\dfrac{p\,v}{R} \quad ; \quad p = \dfrac{R\,i}{v\,c_p}$

Eliminando p, v y $\vec{c}$, entre estas ecuaciones se obtiene:

$$s - s_0 = c_v \; ln \; \frac{p \; v^\gamma}{p_0 \; v_0^\gamma} = c_v \; ln \; \frac{\dfrac{R\,i}{v\,c_p}\; v^\gamma}{p_0 \; v_0^\gamma} = c_v \; ln \; \frac{R\,i\,v^{\gamma-1}}{c_p \; p_0 \; v_0^\gamma} = c_v \; ln \frac{R\,i}{c_p \; p_0 \; v_0^\gamma} \; \frac{c^{\gamma-1}}{G^{\gamma-1}} =$$

$$= c_v \; ln \; \frac{R\,i}{c_p \; p_0 \; v_0^\gamma} \; \frac{\sqrt{\{2\,g\,(i_0 - i)\}^{\gamma-1}}}{G^{\gamma-1}} = c_v \; ln \; \{ \frac{R\,(2\,g)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{c_p \; p_0 \; v_0^\gamma \; G^{\gamma-1}} \; i \; \sqrt{(i_0 - i)^{\gamma-1}} \; \}$$

que es la ecuación de Fanno en el diagrama *(i, s)*.

La condición de entropía máxima $\dfrac{ds}{di} = 0$, punto de tangencia vertical, es:

$$\frac{ds}{di} = \frac{d}{di} \; \{ i \; \sqrt{(i_0 - i)^{\gamma-1}} \; \} = \sqrt{(i_0 - i)^{\gamma-1}} \; - i \; \frac{\gamma - 1}{2} \; \sqrt{(i_0 - i)^{\gamma-3}} \; = 0$$

de la que despejando el valor $i = i_a$ se obtiene la condición de entropía máxima:

$$i_a = \frac{2}{\gamma + 1} \; i_0 \quad ; \quad i_0 = \frac{\gamma + 1}{2} \; i_a$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación, $c^2 = 2\,g\,(i_0 - i)$, resulta:

$$c_a^2 = 2\,g\,(\,i_0 - \frac{2}{\gamma + 1}\; i_0\,) = 2\,g\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\; i_0 = 2\,g\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\,\frac{\gamma + 1}{2}\; i_a = g\,(\,\gamma - 1)\; i_a = g\,(\,\gamma - 1)\,\frac{\gamma R\,T_a}{\gamma - 1} = \gamma g R\,T = c_s^2$$

por lo que en a se alcanza solamente el valor límite $M=1$.

Para, $i > i_a$, el flujo es subsónico y para, $i < i_a$, es supersónico; las dos condiciones, antes y después de la onda de choque normal, deben caer en la línea de Fanno correspondiente a la sección para la que se presenta dicha onda de choque. Como en su determinación no se ha utilizado la ecuación de la cantidad de movimiento, esta solución no es definitiva. La línea de Fanno así descrita se refie-

re a un flujo a través de una sección transversal constante, como es el que se tiene en un elemento de longitud de la tobera donde se presenta la onda de choque, por lo que dicha ecuación también será válida para una conducción, en flujo adiabático, de sección transversal constante.

El fluido, en el extremo de la conducción aguas arriba (punto de partida inicial) se puede representar mediante un punto de la curva de Fanno, correspondiente a la entalpía inicial al gasto G correspondiente. Las propiedades del gas se van modificando a medida que éste va avanzando por la conducción, aumentando su entropía, de forma que, el punto representativo sobre la curva de Fanno se mueve hacia el punto *a* de entropía máxima.

Si el conducto está alimentado por una tobera Laval, inicialmente el flujo puede ser:

- *Supersónico* $\Rightarrow$ *la velocidad irá disminuyendo a lo largo del conducto*
- *Subsónico* $\Rightarrow$ *la velocidad aumentará a lo largo del conducto*

Si se considera que en una cierta parte de la conducción, el flujo es sónico, está claro que aguas arriba de esta sección el flujo no habrá alcanzado dichas condiciones sónicas; sin embargo, para la zona aguas abajo de la sección sónica, si el flujo aguas arriba es supersónico se tendrán ondas de choque y estrangulamiento, mientras que si es subsónico, se tendrá estrangulamiento, es decir, ante la imposibilidad de tener el gasto de diseño se presenta en su lugar un gasto menor. En un conducto de sección transversal constante, el gas no puede cambiar gradualmente de flujo subsónico a supersónico, o viceversa.

Línea de Rayleigh.- Las condiciones antes y después de la onda de choque, deben satisfacer la ecuación de la cantidad de movimiento, de la forma $(p + \rho\, c^2 = Cte)$ que junto con las otras ecuaciones que definían el incremento de entropía del proceso irreversible, la ecuación de continuidad y la ecuación de estado del fluido, permiten determinar, en un diagrama *(i, s)*, la línea de Rayleigh. Eliminando $\vec{c}$ entre las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento se obtiene:

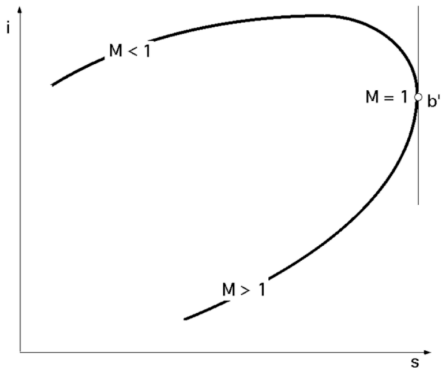


Fig IX.14.- Línea de Rayleigh en el diagrama (i-s)

$$p + \rho\, G^2 v^2 = Cte \quad ; \quad p + \frac{G^2}{\rho\, g^2} = Cte = B$$

Eliminando p entre esta ecuación y la de la entropía, resulta:

$$s - s_0 = c_v\ ln\ \frac{(B - \frac{G^2}{\rho\, g^2})\, v^\gamma}{p_0\, v_0^\gamma} = c_v\ ln\ \frac{\rho_0^k}{p_0} + c_v\ ln\ \frac{B - \frac{G^2}{\rho\, g^2}}{\rho^\gamma}$$

La entalpía se puede poner en función de ρ y de las condiciones aguas arriba; teniendo en cuenta el valor de B, se tiene:

$$i = c_p T = c_p \frac{p\,v}{R} = c_p \frac{v}{R}\left(B - \frac{G^2}{\rho\, g^2}\right) = \frac{c_p}{\rho\, g\, R}\left(B - \frac{G^2}{\rho\, g^2}\right)$$

Las dos últimas ecuaciones relacionan i y s a través de ρ, su representación gráfica en un diagrama (i,s) permite obtener la línea de Rayleigh, Fig IX.14.

Para hallar el máximo de entropía, punto de tangencia vertical, hay que calcular, $\frac{ds}{di} = 0$, en la forma:

$$\frac{ds}{di} = \frac{ds}{d\rho}\,\frac{d\rho}{di} = \left| \begin{array}{c} \frac{ds}{d\rho} = \frac{c_v\ \rho^{2\gamma-1}}{\left(B - \frac{G^2}{\rho\, g^2}\right)^3}\left\{\gamma\, B - \frac{G^2}{\rho\, g^2}(\gamma+1)\right\} \\ \\ \frac{di}{d\rho} = \frac{c_p}{g\, R\, \rho^2}\left(\frac{2\, G^2}{\rho\, g^2} - B\right) \end{array} \right| = \frac{c_v\ \rho^{2\gamma-1}\ g\, R\, \rho^2}{\left(B - \frac{G^2}{\rho\, g^2}\right)^3 c_p}\ \frac{\gamma\, B - \frac{G^2}{\rho\, g^2}(\gamma+1)}{\frac{2\, G^2}{\rho\, g^2} - B} = 0$$

Para que se satisfaga esta ecuación el numerador tiene que ser cero y el denominador distinto de cero, por lo que:

$$\gamma\, B - \frac{G^2}{\rho\, g^2}(\gamma+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho\, g^2 \gamma\, B = G^2\,(\gamma+1)$$

Sustituyendo B y G por su valores respectivos, se obtiene:

$$\rho\, g^2\, \gamma\, p + \rho\, g^2\ \gamma\ \frac{c^2}{v^2}\ \frac{1}{\rho\, g^2} = \frac{c^2}{v^2}(\gamma+1) \quad \Rightarrow \quad c^2 = \rho\, g^2\, \gamma\, p\, v^2 = \gamma\, g\, p\, v = c_s^2$$

es decir, en el punto de tangencia vertical se tiene, al igual que para la curva de Fanno, una velocidad igual a la del sonido $M = 1$.

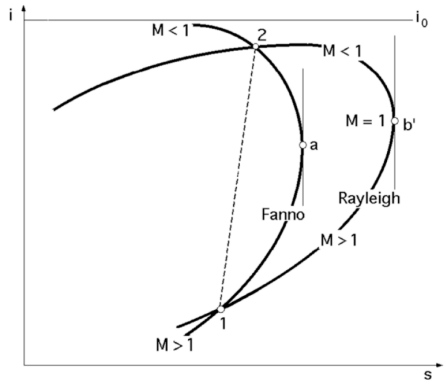


Fig IX.15.- Intersección de las curvas de Fanno y Rayleigh

Como las condiciones de flujo inmediatamente antes y después de la onda de choque normal deben quedar incluidas en ambas curvas, la única posibilidad de que ésto se cumpla es que dichas condiciones cambien súbitamente desde un punto de intersección, en condiciones subsónicas a otro punto en condiciones supersónicas, tal como se muestra en la Fig XII.15.

Como la entropía es siempre creciente, resulta que la sección aguas arriba de la onda de choque normal corresponde al punto de intersección de menor entropía, es decir, régimen supersónico, por lo que esta onda de choque se producirá siempre desde flujo supersónico a subsónico.

IX.8.- FLUJO ADIABÁTICO CON ROZAMIENTO EN CONDUCTOS DE SECCIÓN CONSTANTE

El flujo de un gas a través de una tubería de sección constante está sometido a las siguientes hipótesis:

- *Gas perfecto (calores específicos constantes)*
- *Flujo permanente unidimensional y adiabático*
- *Coeficiente de rozamiento* λ *constante en toda la longitud de la tubería*
- *Los cambios de altura son despreciables frente a los efectos del rozamiento*
- *No hay variaciones del trabajo de flujo*

Las ecuaciones que rigen este flujo son las de continuidad, energía, cantidad de movimiento y de estado. La línea de Fanno se refiere a casos de sección constante y utiliza las ecuaciones de continuidad y de la energía, por lo que se puede aplicar al flujo adiabático en un tubería de sección constante.

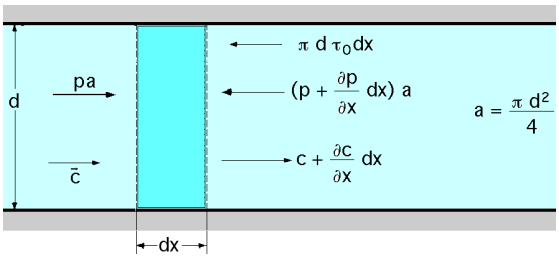


Fig IX.16.- Flujo adiabático en conductos de sección constante, con fricción

Una partícula de gas a la entrada de la tubería viene representada mediante un punto en la línea de Fanno correspondiente, por su entalpía de estancamiento i_0 y por un gasto másico G por unidad de sección. Cuando la partícula se mueve a lo largo del conducto, sus propiedades se modifican debido al rozamiento o a las irreversibilidades, con el correspondiente aumento de entropía. Por lo tanto, el punto que representa estas propiedades se mueve a lo largo de la línea de Fanno hacia el punto de máxima entropía $M=1$.

Si la tubería se alimenta mediante una tobera convergente-divergente, el flujo es, originalmente, supersónico y, entonces, la velocidad disminuye a medida que el gas avanza por el conducto. Si el flujo a la entrada es subsónico, la velocidad aumenta a medida que el gas avanza por el conducto.

Existe una longitud de tubería en la que en el extremo aguas abajo el flujo es sónico $M=1$; para longitudes de tubería más cortas, el flujo no alcanza las condiciones sónicas a la salida, pero para longitudes más largas de la tubería, aparecerán ondas de choque y posiblemente bloqueo a la entrada si el flujo es supersónico y efectos de bloqueo si el flujo es subsónico.

El bloqueo a la entrada implica que el flujo másico de diseño no se puede alcanzar en dicho esta-

do y aparecerá menos flujo.

En un tubería de sección constante, un gas no puede pasar gradualmente de régimen subsónico a régimen supersónico o viceversa.

La ecuación de la cantidad de movimiento incluye el efecto del esfuerzo cortante en la pared τ_0 para un elemento de tubería de longitud dx y sección transversal $\boldsymbol{a}$, de la forma:

$$\{ p\ a - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\ dx)\ a - \tau_0\ \pi\ d\ dx \}\ dt = \rho\ c\ a\ (c + \frac{\partial c}{\partial x}\ dx - c)\ dt$$

$$dp + \frac{\pi\ d}{a}\ \tau_0\ dx - \rho\ c\ dc = 0 \quad ; \quad dp + \frac{4}{d}\ \tau_0\ dx + \rho\ c\ dc = 0$$

A su vez, el valor de τ_0 se obtiene en la forma:

$$dp\ \frac{\pi\ d^2}{4} = \pi\ d\ dL\ \tau_0 \quad ; \quad dp = \frac{4\ dL\ \tau_0}{d} = \frac{\rho\ \lambda\ c^2\ dL}{2\ d} \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = \frac{\rho\ \lambda\ c^2}{8}$$

ecuación en la que cada término se puede poner en función del número de Mach.

Si λ es constante, o toma un valor medio para la longitud de tubería considerada, esta ecuación se puede transformar en otra, función del número de Mach, $M = c/c_s$; dividiéndola por p, resulta:

$$\frac{dp}{p} + \frac{\lambda}{2\ d}\ \frac{\rho\ c^2}{p}\ dx + \frac{\rho\ c}{p}\ dc = 0$$

$$c^2 = M^2\ \frac{\gamma\ p}{\rho} \quad ; \quad \frac{\rho\ c^2}{p} = \gamma\ M^2 \quad ; \quad \frac{\rho\ c\ dc}{p} = \gamma\ M^2\ \frac{dc}{c}$$

Para expresar dc/c en función del número Mach M, se parte de la ecuación de la energía:

$$i_0 = i + \frac{c^2}{2} = c_p T + \frac{c^2}{2} \quad \xrightarrow{\text{Diferenciándola}} \quad c_p\ dT + c\ dc = 0$$

Dividiéndola por $c = \sqrt{\gamma\ g\ R\ T}\ M$, resulta:

$$\frac{c_p}{R}\ \frac{1}{\gamma\ M^2}\ \frac{dT}{T} + \frac{dc}{c} = \left| \frac{c_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right| = \frac{1}{\gamma - 1}\ \frac{1}{M^2}\ \frac{dT}{T} + \frac{dc}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = - M^2\ (\gamma - 1)\ \frac{dc}{c}$$

Diferenciando la ecuación $c = \sqrt{\gamma\ g\ R\ T}\ M$ y dividiéndola por c^2 resulta:

$$2\ c\ dc = 2\ \gamma\ g\ R\ T\ M\ dM + \gamma\ g\ R\ M^2 dT \quad ; \quad 2\ \frac{dc}{c} = 2\ \frac{dM}{M} + \frac{dT}{T} = 2\ \frac{dM}{M} - M^2\ (\gamma - 1)\ \frac{dc}{c}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{dM / M}{1 + M^2\ \frac{\gamma - 1}{2}} \quad ; \quad \frac{\rho\ c\ dc}{p} = \gamma\ M^2\ \frac{dc}{c} = \frac{\gamma\ M\ dM}{1 + M^2\ \frac{\gamma - 1}{2}}$$

Como: $\left\{ \begin{array}{l} p = \rho\, g\, R\, T \\ G = \rho\, g\, c \end{array} \right.$, se obtiene: $\frac{p}{G} = \frac{R\, T}{c}$; $p\, c = G\, R\, T$; $\frac{dp}{p} + \frac{dc}{c} = \frac{dT}{T}$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dc}{c} = - M^2 (\gamma - 1)\, \frac{dc}{c} - \frac{dc}{c} = - \frac{dc}{c} \{M^2 (\gamma - 1) + 1\} = \frac{M^2 (\gamma - 1) + 1}{M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1}\, \frac{dM}{M}$$

La ecuación:

$$\frac{dp}{p} + \frac{\lambda}{2\, d}\, \frac{\rho\, c^2}{p}\, dx + \frac{\rho\, c\, dc}{p} = 0$$

se puede poner en la forma:

$$\frac{M^2 (\gamma - 1) + 1}{M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1}\, \frac{dM}{M} + \frac{\lambda}{2\, d}\, \gamma\, M^2\, dx + \frac{\gamma\, M\, dM}{M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1} = 0$$

es decir:

$$\frac{\lambda\, dx}{d} = \frac{dM}{M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1} \{ \frac{M^2\, (\gamma - 1) + 1}{M} - \gamma\, M \}\, \frac{2}{\gamma\, M^2} = \frac{2 (1 - M^2)\, dM}{\gamma\, M^3\, (M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1)} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \frac{2\, (1 - M^2)\, dM}{\gamma\, M^3\, (M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1)} = \frac{A}{\gamma\, M^3} - \frac{B / M}{1 + M^2\, \frac{\gamma - 1}{2}} \\ A = 2 \quad ; \quad B = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \end{array} \right| = \frac{2\, dM}{\gamma\, M^3} - \frac{\gamma + 1}{\gamma}\, \frac{dM}{M\, (M^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1)}$$

que integrada entre los límites: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \; M = M_0 \\ x = L, \; M = M \end{array} \right.$, queda en la forma:

$$\frac{\lambda\, L}{d} = \frac{- 1}{\gamma\, M^2} \Big)_{M_0}^{M} - \frac{\gamma + 1}{2\, \gamma}\, ln\, \frac{M^2}{\frac{\gamma - 1}{2}\, M^2 + 1} \Big)_{M_0}^{M} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M^2} \right) + \frac{\gamma + 1}{2\, \gamma}\, ln \{ \left(\frac{M_0}{M} \right)^2 \frac{(\gamma - 1)\, M^2 + 2}{(\gamma - 1)\, M_0^2 + 2} \}$$

Para: $\gamma = 1{,}4$ se tiene:

$$\frac{\lambda\, L}{d} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M^2} \right) + \frac{6}{7}\, ln \{ \left(\frac{M_0}{M} \right)^2 \frac{M^2 + 5}{M_0^2 + 5} \}$$

Si: $M_0 > 1$, M no puede ser < 1

Si: $M_0 < 1$, M no puede ser > 1

La longitud máxima del tubo se tiene para $M = 1$ y $\gamma = 1{,}4$, en la forma:

$$L_{máx} = \frac{d}{\lambda} \{ \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right) + \frac{6}{7}\, ln \left(\frac{6\, M_0^2}{M_0^2 + 5} \right) \} = L^*$$

Esta longitud es la necesaria para alcanzar el punto sónico desde la condiciones iniciales. En al-

gunos problemas referidos a conductos cortos en los que el flujo nunca se hace sónico, se pueden utilizar diferencias entre longitudes máximas o sónicas tabuladas. Los datos disponibles sobre fricción en conductos con flujo compresible muestran una buena concordancia con el diagrama de Moody en flujo subsónico, pero en el supersónico los valores son hasta un 50% menores que los dados por el citado diagrama.

IX.9.- BLOQUEO DEBIDO A LA FRICCIÓN

La teoría expuesta predice que en un flujo adiabático, con fricción, en un conducto de sección constante, el flujo aguas abajo en su avance tiende hacia el punto sónico, cualquiera sea el número Mach a la entrada M_0 existiendo una cierta longitud para la que el número Mach de salida se hace exactamente igual a la unidad.

El problema surge cuando la longitud del conducto es mayor que el máximo calculado anteriormente; en estas circunstancias, las condiciones del flujo se modifican, como exponemos a continuación:

a) Si la entrada del fluido en el conducto es subsónica, al ser la longitud L mayor que la L^* correspondiente a $M = 1$, el gasto debe disminuir hasta que se alcance un número Mach en la entrada, tal, que a la salida del conducto de longitud L se tengan condiciones sónicas; el gasto se ha reducido por bloqueo debido a la fricción. Si se aumenta la longitud L, el número Mach a la entrada tiene que seguir disminuyendo para que a la salida se tengan condiciones sónicas.

b) Si la entrada del fluido es supersónica y la longitud L del tubo es superior a la correspondiente a condiciones sónicas, aparecerá una onda de choque normal en el lugar preciso para que el flujo a la salida sea sónico. Si se aumenta la longitud L, la onda se sitúa más aguas arriba hasta llegar a la entrada. Si L continúa aumentando, la onda de choque se desplazará más aguas arriba, hacia la tobera supersónica que alimenta el conducto.

El gasto sigue siendo el mismo que para el conducto corto, por cuanto al alcanzarse en la garganta de la tobera condiciones sónicas, el gasto tiene que ser constante. En algunos casos, un conducto muy largo puede provocar el bloqueo de la garganta de la tobera de alimentación, reduciéndose entonces el gasto.

En consecuencia, la fricción supersónica modifica la configuración del flujo si $L > L^*$, pero no bloquea el flujo hasta que L sea mucho mayor que L^*.

La presión, velocidad, volumen y temperatura se pueden expresar en función de las condiciones correspondientes a, $M = 1$, distinguiéndolas mediante el símbolo $(^*)$; así se tiene que:

$$\frac{p^*}{p_0} = M_0 \sqrt{\frac{(\gamma - 1) M_0^2 + 2}{\gamma + 1}} \quad ; \quad \frac{T}{T_0} = \frac{(\gamma - 1) M_0^2 + 2}{\gamma + 1}$$

Para los volúmenes partimos de la ecuación:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{M}\,\frac{dM}{1 + M^2\,\frac{\gamma - 1}{2}} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{2}{M\,(2 + M^2\,(\gamma - 1)} = \dfrac{A}{M} + \dfrac{B\,M}{2 + M^2\,(\gamma - 1)} \\ A = 1 \quad ; \quad B = 1 - \gamma \end{array} \right| = \frac{dM}{M} + \frac{(1 - \gamma)\,M\,dM}{2 + M^2\,(\gamma - 1)}$$

$$v = \frac{M}{\sqrt{2 + M^2\,(\gamma - 1)}}$$

$$\frac{v^*}{v_0} = \frac{1}{M_0}\,\sqrt{\frac{2 + M_0^2\,(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = \frac{c^*}{c_0}$$

El comportamiento de las propiedades del flujo se puede seguir también mediante Tablas y gráficas relacionadas con las ecuaciones examinadas y deducidas anteriormente, como las que presentamos a continuación, que permiten un tratamiento muy rápido del problema de flujo compresible.

IX.10.- FLUJO SIN ROZAMIENTO POR EL INTERIOR DE CONDUCTOS CON TRANSFERENCIA DE CALOR

Vamos a considerar un gas perfecto en flujo permanente por el interior de un tubería de sección constante; el rozamiento se desprecia y no se realiza ningún trabajo sobre o por el fluido.

Las ecuaciones a utilizar son:

Continuidad: $G = \dfrac{c}{v} = \rho\, c \quad ; \quad a = Cte$

Cantidad de movimiento: $p + \rho\, c^2 = Cte \quad \Rightarrow \quad p + \gamma\, p\, M^2 = Cte$

Ecuación energética: $i_2 - i_1 + \dfrac{c_2^2 - c_1^2}{2\,g} = c_p\,(T_2 - T_1) + \dfrac{c_2^2 - c_1^2}{2\,g} = c_p\,(T_{02} - T_{01})$

en donde T_{01} y T_{02} son las temperaturas isentrópicas de estancamiento, es decir, las temperaturas que se alcanzan en una sección al pasar el flujo de una situación isentrópica al reposo.

Cuando las *pérdidas por rozamiento son nulas*, la entropía sólo puede aumentar cuando se aporta calor del exterior; las propiedades del gas varían a lo largo de la curva de Rayleigh, desplazándose, al aportar calor, hacia el punto de entropía máxima; si en este punto se produce una pequeña variación de la entalpía, la entropía no varía, y se pueden aplicar condiciones isentrópicas, siendo la velocidad del sonido $c_s = \sqrt{dp/d\rho}$.

Este flujo se puede estudiar mediante la línea de Rayleigh, obtenida a partir de las ecuaciones de la cantidad de movimiento y continuidad para una sección recta constante, sin rozamiento; eliminando $\vec{c}$ y diferenciando, se obtiene:

$$p + \frac{G^2}{\rho} = Cte \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{G^2}{\rho^2} = c^2$$

En el punto de máxima entropía de la línea de Rayleigh $c_s = \sqrt{dp/d\rho}$, prevalece $M = 1$ por lo que se tienen condiciones sónicas.

Al aportar calor al flujo supersónico se logra que el número M del flujo descienda hacia M =1, y si se aporta la cantidad de calor precisa se logra M =1. Si se aporta más calor, se produce estrangulamiento y se modifican las condiciones en el extremo aguas arriba (bloqueo a la entrada), tendiendo a reducirse el flujo másico.

Al aportar calor al flujo subsónico se logra un aumento en el número de Mach hacia valores M = 1; un exceso de calor origina un estrangulamiento, y se produce un reajuste con disminución del flujo másico aguas arriba.

De la ecuación de la energía se observa que una medida de la cantidad del calor aportado, es el aumento de la presión isentrópica de estancamiento; teniendo en cuenta las ecuaciones:

$$c^2 = \gamma\ R\ T\ M^2 \quad ; \quad p = \rho\ R\ T \quad ; \quad G = \frac{c}{v} \quad ; \quad p\ c = G\ R\ T \quad ; \quad \rho\ c^2 = \gamma\ p\ M^2$$

De la ecuación de la cantidad de movimiento, $p + \gamma\ p\ M^2 = Cte$, se obtiene:

$$p_1 + \gamma\ p_1\ M_1^2 = p_2 + \gamma\ p_2\ M_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \gamma\ M_2^2}{1 + \gamma\ M_1^2}$$

que para el caso límite $p_2 = p^*$, cuando $M_2 = 1$, queda en la forma:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma\ M^2}$$

siendo p la presión en un punto cualquiera del conducto y M el número de Mach correspondiente.

- *Para régimen subsónico, si M aumenta hacia la derecha, p debe disminuir*
- *Para régimen supersónico, si M disminuye hacia la derecha, p tiene que aumentar*

Para obtener las relaciones entre temperaturas, se parte de la ecuación de la energía:

$$c_p\ T_0 = \frac{\gamma\ R}{\gamma - 1}\ T_0 = \frac{\gamma\ R}{\gamma - 1}\ T + \frac{c^2}{2}$$

en la que T_0 es la temperatura isentrópica de estancamiento y T es la temperatura de la corriente libre en la misma dirección; aplicándolo a las secciones 1 y 2, y dividiendo por $\frac{\gamma\ R\ T_1}{\gamma - 1}$ se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_{01}}{T_1} &= 1 + (\gamma - 1)\ \frac{M_1^2}{2} \\ \frac{T_{02}}{T_2} &= 1 + (\gamma - 1)\ \frac{M_2^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{2 + (\gamma - 1)\ M_1^2}{2 + (\gamma - 1)\ M_2}\ \frac{T_1}{T_2}$$

La relación T_1/T_2 se puede determinar en función de M teniendo en cuenta las ecuaciones de:

Gases perfectos: $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p_1\ \rho_1}{p_2\ \rho_2}$

Ecuación de continuidad : $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{c_2}{c_1} = \left| \begin{matrix} M_1 = \dfrac{c_1}{\sqrt{\gamma\ R\ T_1}} \\ \\ M_2 = \dfrac{c_2}{\sqrt{\gamma\ R\ T_2}} \end{matrix} \right| = \dfrac{M_2}{M_1}\ \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$

Asimismo:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \gamma\ M_2^2}{1 + \gamma\ M_1^2} \quad ; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2}\ \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1 + \gamma\ M_2^2}{1 + \gamma\ M_1^2}\ \frac{M_1}{M_2} \right)^2$$

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \left(\frac{1 + \gamma\ M_2^2}{1 + \gamma\ M_1^2}\ \frac{M_1}{M_2} \right)^2\ \frac{2 + (\gamma - 1)\ M_1^2}{2 + (\gamma - 1)\ M_2^2}$$

Al aplicar esta ecuación a la sección aguas abajo donde $\begin{cases} T_{02} = T_{0^*} \\ M_2 = 1 \end{cases}$ resulta para la sección aguas arriba:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(\gamma + 1)\ M^2\ \{\ 2 + (\gamma - 1)\ M^2\ \}}{(\ 1 + \gamma\ M^2\ )^2}$$

El calor intercambiado por unidad de masa para $M = 1$ a la salida es: $q = c_p\ (T_0^* - T_0\ )$

Flujo isotérmico permanente en tuberías largas.- En el análisis del flujo isotérmico de un gas perfecto a través de tuberías largas, no se pueden aplicar las ecuaciones de las líneas de Fanno (que se aplican al flujo adiabático), ni las de Rayleigh, (que se aplican al flujo sin rozamiento), por lo que hay que desarrollar un método que permita encontrar el sentido de la variación de las propiedades con el número de Mach.

Las ecuaciones a considerar son:

Cantidad de movimiento: $\dfrac{dp}{p} + \dfrac{\lambda}{2\ d}\ \dfrac{\rho\ c^2}{p}\ dx + \dfrac{\rho\ c}{p}\ dc = 0$

Ecuación de estado: $p\ V = Cte \quad ; \quad \dfrac{p}{\rho} = Cte \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dp}{p} = \dfrac{d\rho}{\rho}$

Ecuación de continuidad: $\rho\ c = Cte \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dp}{\rho} = -\ \dfrac{dc}{c}$

Ecuación de la energía: $T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$

Presión de estancamiento: $p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

siendo:

T_0 *la temperatura isentrópica de estancamiento en la sección donde la temperatura constante de la corriente libre es T y el número de Mach es M*

p_0 *la presión en la sección de p y M, reduciendo isentrópicamente a cero la velocidad*

De todo ello se deduce que:

$$c = c_s M = \sqrt{\gamma \, R \, T} \, M \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{c} = \frac{dM}{M} = \frac{dM^2}{2 \, M^2}$$

$$\frac{\rho \, c \, dc}{p} = \frac{c \, dc}{R \, T} = \frac{c_s^2}{R \, T} \, M \, dM = \gamma \, M \, dM \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho \, c^2}{p} = \frac{c^2 \, M^2}{R \, T} = \gamma \, M^2$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dc}{c} = - \frac{dM^2}{2 \, M^2} = \frac{\lambda \, M^2}{1 - \gamma \, M^2} \, \frac{\lambda \, dx}{2 \, d}$$

Como dx es positivo en la dirección aguas abajo, se saca la conclusión que las propiedades varían según que M sea menor o mayor que $1/\sqrt{\lambda}$

- *Para* $M < 1/\sqrt{\lambda}$, $\begin{cases} \text{disminuyen la} \begin{cases} \text{presión} \\ \text{densidad} \end{cases} \\ \text{aumentan} \begin{cases} \text{la velocidad} \\ \text{el nº Mach} \end{cases} \end{cases}$

- *Para* $M > 1/\sqrt{\lambda}$ *, se invierten los sentidos, por lo que el nº de Mach tiende siempre a* $1/\sqrt{\lambda}$ *en lugar de a la unidad, que es el valor a que tiende en el flujo isotérmico en tuberías.*

Para determinar la dirección del intercambio térmico, se diferencia respecto T_0 la ecuación:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

y se divide por ella misma, teniendo en cuenta que T es constante, obteniéndose:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \, dM^2 = \frac{\gamma \, (\gamma - 1) \, M^4}{(1 - \gamma \, M^2)(2 + (\gamma - 1) M^2)} \, \frac{\lambda \, dx}{d}$$

que muestra que la temperatura isentrópica de estancamiento aumenta cuando $M < 1/\sqrt{\lambda}$, lo cual indica que el calor se transfiere al fluido; si $M > 1/\sqrt{\lambda}$, el intercambio de calor es desde el fluido.

Teniendo en cuenta las ecuaciones: $\begin{cases} p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{dp}{p} = \frac{\lambda \, M^2}{1 - \gamma \, M^2} \, \frac{\lambda \, dx}{2 \, d} \end{cases}$, se obtiene:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{2 - (\gamma + 1)\, M^2}{2 + (\gamma - 1)\, M^2} \; \frac{\gamma\, M^2}{\gamma\, M^2 - 1} \; \frac{\lambda\, dx}{2\, d}$$

$$\frac{\lambda}{d} \int_0^{L_{máx}} dx = - \frac{1}{\gamma} \int_M^{1/\sqrt{\gamma}} \frac{1 - \gamma\, M^2}{M^2}\, dM^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi\, L_{máx}}{d} = \frac{1 - \gamma\, M^2}{\gamma\, M^2} + ln\, (\gamma\, M^2\,)$$

en la que $L_{máx}$ representa la longitud máxima del tubería; para longitudes mayores se produce estrangulamiento y disminuye el flujo másico.

La variación de presión, en la que M y p representan los valores en cualquier sección aguas arriba, es:

$$\int_0^{p^{t^*}} \frac{dp}{p} = - \frac{1}{2} \int_M^{1/\gamma^{1/2}} \frac{dM^2}{M^2} \quad ; \quad \frac{p^{t^*}}{p} = M\, \sqrt{\gamma}$$

en la que el superíndice (t*) indica las condiciones en $M = 1/\sqrt{\lambda}$.

ANEXO.- AERODINÁMICA COMPRESIBLE SUBSÓNICA Y TRANSÓNICA

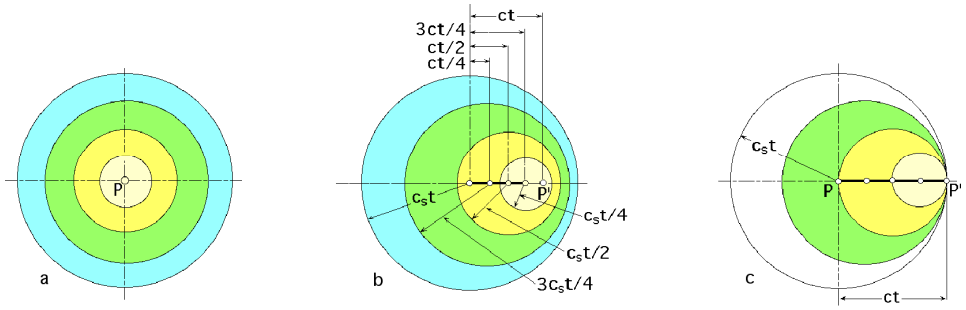
El parámetro fundamental que caracteriza este campo es el número de Mach. En el campo comprendido entre $0,6 < M < 1$, los valores de ρ y $\vec{c}_s$ son variables de un punto a otro.

Si se supone que en una partícula infinitesimal o en un foco puntual se produce una perturbación P, que se puede originar, por ejemplo, cuando una partícula material aumenta repentinamente de volumen, creando una compresión a su alrededor.

Los casos que se pueden dar son los siguientes:

a) El foco de perturbación P se mantiene fijo, c = 0, Fig IX.17.a; si un manantial puntiforme de perturbaciones es estable, la perturbación se propaga en forma de una onda esférica; los diferentes frentes de onda constituyen esferas concéntricas

b) El foco de perturbación se mueve con velocidad $\vec{c}$ *menor que la del sonido, régimen subsónico,* $\begin{cases} c < c_s \\ M < 1 \end{cases}$ *o lo que es lo mismo, con velocidad menor que la velocidad de propagación de la onda de perturbación que se origina, Fig IX.17.b; si el manantial se mueve a velocidad subsónica, no se dan esferas concéntricas, sino esferas desplazadas porque la perturbación se aleja del manantial en la dirección del movimiento, con una velocidad que es la diferencia entre la velocidad del sonido y la velocidad del manantial, dando así lugar a ondas que se espesan por una parte. El foco de perturbación P se mueve con velocidad* $\vec{c}$ *; al cabo de un tiempo t ha recorrido un espacio, (PP') = c t.*



a) Velocidad subsónica; b) Manantial en movimiento a velocidad subsónica; c) Manantial en movimiento a velocidad sónica
Fig IX.17.- Propagación de las perturbaciones para diversas velocidades del manantial perturbador en régimen subsónico

En la Fig IX.17.b se ha dividido el intervalo t en cuatro intervalos iguales $t/4$

En el instante $t/4$ *el foco de perturbación ha recorrido una distancia* $c\,t/4$

- La perturbación se propaga desde cada posición que ocupa el foco con la velocidad c_s *de manera que el frente de onda al transcurrir un tiempo se halla en una esfera de centro P y radio,* $c_s\,t$.

- Las restantes perturbaciones se iniciaron en tiempos $t/4,\ t/2,\ 3t/4$, más tarde, y sus ondas respectivas se encuentran en el interior de esferas de radios $c_s t/4,\ c_s t/2,\ 3c_s t/4$; en este caso la perturbación llega al punto P' antes de que llegue al mismo punto el foco que la produce

Por lo tanto, en el caso de velocidades subsónicas $c < c_s$, la partícula anuncia su llegada por medio de una onda de presión, que llega antes que ella, por lo que el fluido que se encuentra aguas abajo se puede adaptar, al menos parcialmente, al movimiento de la partícula.

c) El foco de perturbación se mueve con velocidad igual a la del sonido, régimen transónico $c = c_s$, $M = 1$, Fig IX.17c; si el manantial se mueve a velocidad sónica, las distintas esferas se tocan.

El foco puntual de perturbación llega al punto P' al mismo tiempo que la perturbación. El frente de onda es siempre tangente a un plano normal a la dirección del movimiento, llegando simultáneamente a este plano las perturbaciones originales en los diferentes puntos de la trayectoria (PP').

La ecuación de Bernoulli se puede aplicar al estudio de la aerodinámica subsónica y transónica; si se supone el movimiento isentrópico se tiene que $p = k\ \rho^{\gamma}$, y se puede deducir que el salto de presiones, entre la presión local y la no perturbada es:

$$\Delta p = \frac{\rho\ c^2}{2}\ (1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2 - \gamma}{24}\ M^4 + ...)$$

de lo que resulta que en los puntos de parada la presión es mayor que la presión dinámica y es tanto mayor cuanto más crece M; algunos valores de Δp respecto de M se recogen en la Tabla siguiente:

M	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
Δp	1,01	1,04	1,095	1,172	1,22

Ecuación de Laplace.- La ecuación de Laplace se puede aplicar al campo de la aerodinámica, pero se transforma en una ecuación muy compleja, en derivadas parciales de segundo orden, no lineal, porque los coeficientes de las incógnitas contienen en sí mismos la incógnita.

La solución se consigue, por ejemplo, con la simplificación de linealización, en la que:

- Hay que aplicar una transformación de coordenadas de manera que la ecuación resulte lineal en las nuevas variables.

- Hay que admitir que las velocidades incrementales provocadas por el sólido en la corriente son muy pequeñas en relación a, $\vec{c}$ y $\vec{c}_s$ (hipótesis del sólido delgado, poco arqueado, con un ángulo de incidencia α pequeño; método de las pequeñas perturbaciones).

Si se supone un ala de perfil biconvexo y de borde agudo, colocada en el seno de una corriente, cuya velocidad aumenta progresivamente. Mientras el flujo es lento, el fluido se comporta como si fuese incompresible, con un coeficiente de sustentación C_{w0}, pero cuando el flujo aumenta la velocidad de tal manera que el valor del número de Mach se acerca a $M = 1$, se hace sentir la influencia de

la compresibilidad, sin que, no obstante, en ningún punto del campo la velocidad sea supersónica.

La zona transónica se define como la zona del número de Mach de la aproximación en la que alrededor del perfil de ala se produce flujo subsónico y supersónico, es decir, en estas condiciones el flujo sobre el sólido acelera su velocidad, como sabemos, hasta alcanzar el valor sónico $M = 1$, a pesar de que la velocidad por delante del sólido sea todavía subsónica, dando lugar a una representación que se consigue visualizar Fig IX.18, formándose ondas de Mach antes de que se alcance el espesor máximo del perfil; en el interior del contorno delimitado por la línea de puntos la velocidad es supersónica.

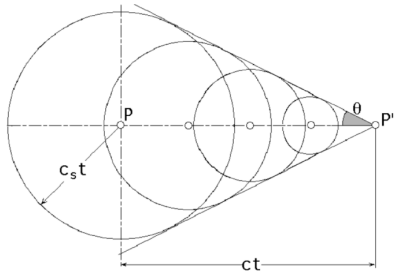


Fig IX.18.- Propagación de las perturbaciones del manantial perturbador en régimen supersónico

Después de haber superado la zona de máximo espesor, el flujo se hace más lento y la velocidad tiende de improviso a hacerse subsónica, en medio de una onda de choque. El número de Mach mínimo por delante del sólido, necesario para que aparezca una zona supersónica es el número de Mach crítico $M_{crít}$ y es netamente inferior a 1.

En el ***campo subsónico*** la ecuación de Laplace es:

$$(1 - M)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

con $1 - M^2 > 0$, (ecuación de tipo elíptico, con solución regular en todo el campo)

En el ***campo transónico*** el segundo miembro de la ecuación no es igual a 0, ni despreciable:

$$(1 - M)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{M^2 (\gamma + 1)}{c}\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

La ley de semejanza de Prandtl-Glauert permite pasar de un perfil de ala delgado en una corriente incompresible (o a un determinado valor subsónico de M) a las presiones y sustentación del mismo perfil, pero para otro valor subsónico de M considerando en una corriente compresible un perfil cuyo espesor se ha aumentado en $1/\sqrt{1 - M^2}$, por lo que:

$$C_w = \frac{C_{w0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

en la que:

M_∞ es el número de Mach de la velocidad de aproximación relativa al perfil del ala

C_w es el coeficiente de sustentación que aumenta al aumentar el número Mach hasta la zona transónica

C_{w0} es el coeficiente de sustentación en flujo incompresible

La experimentación en condiciones reales demuestra que los valores teóricos de las presiones a

partir de $0,5 < M < 0,6$, son más elevados que los valores reales, porque se desprecia la influencia de la compresibilidad.

En otras teorías más acordes, como la de von Kàrmàn-Tsien, el coeficiente de sustentación en régimen compresible es:

$$C_{w(0)} = \frac{C_w}{\sqrt{1 - M^2} + \frac{M^2}{1 + \sqrt{1 - M^2}} \frac{C_w}{2}}$$

La ley de semejanza de Gothert es exacta, mediante la cual, al variar M se pasa de un mismo sólido en régimen incompresible a sólidos distintos en régimen compresible.

De cualquier modo, por encima de un determinado valor de M, los resultados experimentales y los teóricos son netamente divergentes, porque en los primeros la presión y el coeficiente C_w caen bruscamente; por otra parte, la teoría ignora el fenómeno denominado crisis de la compresibilidad, que se manifiesta para valores de M , tanto más menores cuanto mayor es el valor local del gradiente de presión adverso y cuanto mayores son el espesor del perfil y su incidencia.

Para velocidades de aproximación grandes en la zona transónica se forma una onda de choque separada delante del perfil del ala, con flujo subsónico entre ella y la parte delantera del perfil; para M_∞ mayor, la onda de choque separada se aproxima al borde frontal del perfil; cuando llega a tocar dicho borde el flujo es supersónico en todas partes.

Si el ala tiene el borde inclinado (ala en flecha o ala delta) actúa sobre la formación de la depresión sólo la componente $(c \cos \varphi)$, siendo φ el ángulo de flecha del lugar de los puntos situados en el 25% de la cuerda alar, mientras $(c \operatorname{sen} \varphi)$ da lugar a una ulterior resistencia de rozamiento a lo largo de la abertura. La crisis de la compresibilidad es prácticamente insignificante para sólidos en forma de huso, mientras que en la interferencia recíproca entre ala (o cola) y fuselaje se nota considerablemente; por lo tanto es necesario dar al fuselaje una forma delgada en relación al acoplamiento del ala de la cola o de la cabina, de manera que en su conjunto, la forma del fuselaje no presente salientes.

IX.12.- AERODINÁMICA SUPERSÓNICA

El parámetro fundamental es el número de Mach; en régimen supersónico: $c > c_s$, $M > 1$

Más allá de $M = 5$, se entra en la aerodinámica hipersónica

La velocidad del sonido $c_s = \frac{dp}{dr}$ es, como sabemos, la velocidad de propagación en un fluido de densidad ρ, de pequeñas perturbaciones de presión.

Si un manantial de perturbaciones se mueve a la velocidad $\vec{c}$ supersónica, la perturbación no

puede adelantarla y queda limitada en una corriente plana formada por dos ondas de Mach, al interior del cono de Mach, Fig IX.18, que tiene el vértice en el manantial y un ángulo de semiabertura de, $seno\ \frac{1}{M} = \frac{c_s}{c}$, por lo que una corriente supersónica tiene la propiedad de que las perturbaciones de presión no se transmiten a la misma por delante de los puntos que las crean; una fuente de perturbación sólo puede afectar a los puntos contenidos en su cono de Mach y sólo puede ser afectada por los puntos contenidos en su anticono de Mach, obtenido prolongando las generatrices del cono más allá del vértice.

En régimen supersónico, la velocidad $\vec{c}$ del foco es mayor que la velocidad $\vec{c}_s$ del sonido; cuando el foco se encuentra en P se origina una onda esférica de presión, pero en el tiempo t que invierte el sólido en llegar al punto P' la partícula ha recorrido una distancia mayor que el radio de la esfera de centro P y radio $c_s\, t$.

Al pasar el foco de perturbación por los puntos intermedios entre P y P' se originan ondas esféricas, cuyos frentes de onda en el instante t se hallan dibujados en la figura, respectivamente, con radios $c_s t/4,\ c_s\, t/2,\ 3c_s t/4$; así se origina un frente de onda cónico con vértice en P', Fig IX.18.

El semiángulo θ de este cono es:

$$\theta = arc\ sen\ \frac{c_s\, t}{c\ t} = arc\ sen\ \frac{c_s}{c} = arc\ sen\ \frac{1}{M\ c_s}$$

que se conoce como ángulo de Mach, siendo la generatriz del mismo cono la línea de Mach.

En la corriente supersónica la perturbación queda concentrada en el interior de este cono, llamado *cono de perturbación*, y no se transmite al exterior del mismo.

Mientras que en el movimiento permanente de un sólido en régimen subsónico se establece una distribución continua de presión y velocidad, en régimen supersónico el cono de perturbación constituye una superficie de discontinuidad. Además, las perturbaciones no se amortiguan al aumentar la distancia a los puntos que las originan.

El factor $(1 - M^2)$ de la ecuación de Laplace que se aplica en aerodinámica subsónica y transónica, es de valor negativo; matemáticamente esto da lugar a soluciones que presentan una discontinuidad (representada físicamente por el cono de Mach), que separa la región en que la solución es imaginaria, de aquella en la que es real.

Si se supone que la presión en un punto de una corriente supersónica se modifica progresivamente mediante sucesivas variaciones de valor iguales a Δp_c. Las variaciones de presión a velocidad supersónica se propagan en el fluido por medio de ondas de Mach; si la presión en un punto disminuye, en él se origina una onda de expansión M_1 que forma el ángulo de Mach ψ_1 con la dirección de la corriente. Un ulterior Δp produce análogos efectos, por lo que se tiene finalmente un abanico de ondas de expansión M_2, M_3... , Fig IX.19.a.

En cambio, si la presión aumenta se origina una onda de compresión que forma un ángulo μ_1, con la dirección de la corriente y la zona de la corriente estará limitada anteriormente por dicha onda. Como M disminuye, al producirse el siguiente incremento de presión Δp, la onda de Mach, inclinada un ángulo $\psi_2 > \psi_1$, se desplaza hacia adelante con relación a la onda precedente y así sucesivamente.

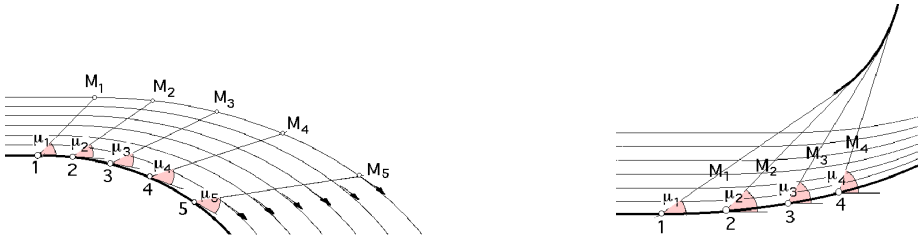


Fig IX.19.- Ondas de Mach, a) En una corriente supersónica en la que la velocidad aumenta b) En una corriente supersónica en la que la velocidad disminuye, formándose una onda de choque

Las sucesivas ondas de compresión tienden a superponerse y a situarse según una dirección límite, menos inclinada que la primitiva onda de Mach, en la dirección de la corriente y en correspondencia con la cual se forma una onda de choque; por consiguiente, no se trata de un fenómeno gradual como en el caso anterior, sino discontinuo con un brusco salto de presión Fig IX.19.b, temperatura y densidad Fig IX.20.

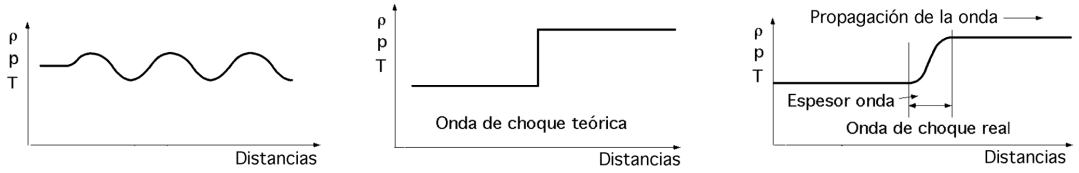
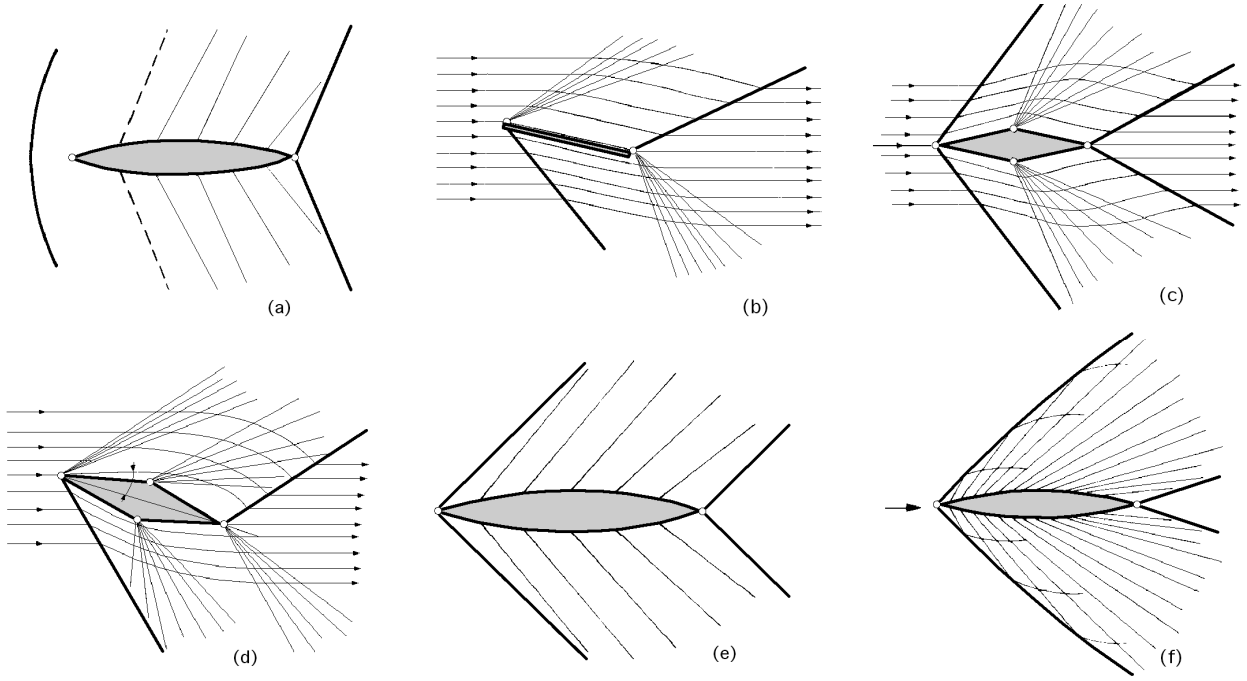


Fig IX.20.- Variación de la presión, temperatura y densidad en la formación de la onda de choque

En el interior de la onda de choque, el aire se comprime y se calienta; el calor (absorbido a baja temperatura) es devuelto a temperatura más alta, por lo que, según el Segundo Principio de la Termodinámica, tiene lugar una pérdida de energía mecánica que se disipa en forma de calor con aumento de entropía y aparición de una resistencia debida al choque (resistencia de choque) que es máxima para la onda de choque normal, es decir, perpendicular a la dirección de la velocidad.

La disipación no se podría efectuar si en la onda de choque, a causa del fuerte gradiente de velocidad, no se manifestara un rozamiento considerable. Las relaciones entre algunas magnitudes antes y después de la onda de choque se pueden obtener no sólo analíticamente, sino también por medio de la construcción gráfica de la polar de choque (Busemann). La onda de choque no sólo puede ser normal sino también inclinada; si el sólido no es agudo, la onda se separa (onda de choque separada Fig IX.21.a); en el centro se hace normal, y detrás de la misma la velocidad es subsónica. No obstante, a velocidades supersónicas elevadas, a veces es necesario renunciar al borde agudo y admitir la fuerte resistencia de onda, con el fin de evitar calentamientos excesivos a causa del rozamiento.

Si consideramos un perfil plano inclinado, en el borde de ataque se forman, por un lado un abanico de ondas de expansión y por el otro una onda de choque, mientras que en el de salida sucede lo contrario Fig IX.21.b; si el perfil es de doble diedro con un ángulo de incidencia nulo se forman dos ondas de choque en el borde de ataque, ondas de expansión en las aristas intermedias y dos ondas de choque en el borde de salida, Fig IX.21.c; si el ángulo de incidencia es mayor que el semiángulo del diedro anterior se obtienen resultados análogos, Fig IX.21.d, al caso del perfil plano inclinado.



a) Onda de choque separada, en el caso de un sólido de perfil no agudo
b) Perfil plano inclinado (onda de choque con línea continua, ondas de expansión con línea de trazos)
c) Perfil de doble diedro con ángulo de incidencia nulo
d) Perfil de doble diedro con ángulo de incidencia mayor que el semiángulo del anterior
e) Perfil curvo (Forma teórica de la onda inicial de choque y de las ondas de expansión)
f) Perfil curvo (Forma real de la onda inicial de choque y de las ondas de expansión)

Fig IX.21.- Aerodinámica supersónica

Si el perfil es curvo, en la realidad no se obtiene la onda rectilínea de la Fig IX.21.e, sino una onda curvada Fig IX.21.f, a causa de la interferencia entre la onda de choque inicial con las de expansión.

La teoría de Busemann basada en las teorías de la onda de choque y de la corriente en expansión permite un cálculo preciso (rozamiento aparte) de las presiones que actúan sobre el perfil supersónico cuando todo el campo es supersónico, por lo que, por integración, permite obtener los coeficientes de sustentación y resistencia de $\begin{cases} \text{- onda} \\ \text{- choque} \end{cases}$

En cuanto a los sólidos cónicos, presentan la característica de que todas las magnitudes de la corriente son constantes a lo largo de cada radio que parte del centro del campo, por lo que, cortando el cono normalmente al eje, el campo aerodinámico anterior al corte no se ve afectado en corriente supersónica por las variaciones que se producen en la parte posterior al corte.

En el caso de sólidos de revolución, la onda de choque que se forma en la punta se suele considerar, inicialmente, cónica con la inclinación debida al ángulo de desviación inicial (es decir, se sustituye en una cierta longitud el perfil del sólido por su tangente en la punta); en correspondencia el campo entre onda y sólido es cónico.

Para cada radio se definen las componentes de la velocidad y de M, de manera que se puede trazar la característica que parte del sólido en el punto en el que la generatriz deja de ser cónica, hasta el encuentro con la onda de choque. A partir de ella se empieza la construcción de toda la red de características. La aproximación del resultado se aumenta haciendo las mallas más pequeñas.

IX.13.- AERODINÁMICA HIPERSÓNICA

A velocidades supersónicas elevadas, $M > 5$, los fenómenos fluidodinámicos se modifican parcialmente a causa de la aparición de nuevos fenómenos físicos y químicos debidos a la transformación de la energía contenida en el gas, los cuales difieren de las transformaciones termodinámicas que tienen lugar en el fluido compresible.

El estudio de estos fenómenos presenta mayores dificultades por las siguientes circunstancias:

- No se puede linealizar la ecuación del movimiento

- A causa de la fuerte curvatura de las ondas de choque, los elevados gradientes de entropía impiden suponer que el movimiento sea isentrópico

- La interacción entre la capa límite y la corriente exterior es muy importante

Los fenómenos físicos y químicos dependen de las temperaturas elevadas que se alcanzan detrás de la onda de choque y en la capa límite, las cuales excitan los grados de libertad y vibración de las moléculas en átomos y producen la ionización de ambos y también la formación de nuevos compuestos que no se encuentran a baja temperatura, pasándose a una nueva disciplina denominada aerotermoquímica.

Si se desprecia la conducción de calor (flujo adiabático), la temperatura T_0 en un punto de estancamiento es:

$$T_0 = T + \frac{c^2}{2\, c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

en la que T es la temperatura estática de la corriente libre del fluido a la velocidad dc respecto a un sólido inmerso en el fluido.

Para el aire, $\gamma = 1{,}4$, se tiene: $T_0 = T \left(1 + 0{,}2\, M^2 \right)$, por lo que para $M = 5$, la temperatura de estancamiento es 6 veces la temperatura estática de la corriente fluida.

Por otra parte, los diferentes grupos moleculares y atómicos que se forman con elevados gradientes de concentración, temperatura y presión, dan lugar a procesos de difusión que se deben estudiar

con los métodos de la gasodinámica de las mezclas, por lo que se deben aplicar los conceptos de la teoría cinética de gases, aún en el caso de que el medio sea continuo.

Si a los grados de libertad de traslación y rotación de las moléculas se añade el de vibración, con las consiguientes disociaciones e ionizaciones, varían los calores específicos y la relación entre los mismos. Las transferencias de energía para obtener la disociación, recomposición, ionización o su anulación requieren cierto tiempo (tiempo de reacción), del que depende el estado de equilibrio termodinámico (cuasi equilibrio o no equilibrio) del gas.

La forma de las corrientes hipersónicas se distingue de la que presentan las supersónicas por la mayor proximidad de la onda de choque al sólido; el espacio comprendido entre ambos es la capa de choque.

Si el sólido no es suficientemente agudo la onda está separada y detrás de ella la velocidad es subsónica; la fuerte curvatura del choque da lugar a un fuerte gradiente transversal de entropía y, por lo tanto, a una corriente rotacional; esta estela entrópica, más ancha cuando la onda está separada, contiene en su interior la estela viscosa debida a la separación de la corriente.

Si los tiempos de reacción son suficientemente pequeños o las correspondientes velocidades suficientemente grandes, el estado del gas es muy parecido al que corresponde al equilibrio termodinámico y la mayor parte de la transferencia de energía tiene lugar en la onda de choque, después de la cual el gas puede considerarse en equilibrio.

Si los tiempos son muy grandes o las correspondientes velocidades muy pequeñas, la transferencia de energía sólo tiene lugar en una pequeña parte en la onda de choque, y continúa en el fluido posterior a la misma, pero la energía transferida en todas partes es pequeña y, por consiguiente despreciable, el gas se encuentra en estado estacionario y su comportamiento obedece a la ecuación de estado:

$$p\,v = (1 + A)\,R\,T$$

con un porcentaje A de moléculas disociadas que se mantiene constante mientras el proceso sea estacionario. Para valores de M grandes la corriente se congela, en el sentido de que su forma y los coeficientes de presión, como se confirma experimentalmente, se hacen independientes de M.

Por lo que se refiere a los métodos de cálculo se observa que, como en el caso de corriente transónica, el sistema de linealizar la ecuación del movimiento en la hipótesis de pequeñas perturbaciones no se puede aplicar, ya que los términos térmicos en M (que es grande) del segundo miembro, no son despreciables. No obstante, es posible deducir leyes de semejanza (Tsien) por las que, conocido un resultado para un caso particular, se pueden determinar a partir de él otros resultados para otros casos, a igualdad de valor de los parámetros de semejanza.

Dado que los sólidos utilizados a velocidades hipersónicas son más o menos romos por su parte anterior, para evitar su deterioro por el aumento de temperatura debido al calentamiento aerodinámico, se hace uso frecuentemente de teorías distintas de la de las pequeñas perturbaciones, una de las cuales es la newtoniana, basada en la hipótesis de la capa de choque muy delgada.

Newton supuso para el fluido una constitución corpuscular y estudió el caso de la placa plana inclinada un ángulo α, admitiendo que el choque fuera inelástico y manteniendo la velocidad sin perturbar; con estas hipótesis, la presión que actúa sobre la placa se expresa por:

$$p = \rho \; u_0 \; sen^2 \alpha$$

relación que resulta errónea en el caso de velocidades normales; sin embargo está muy próxima a la realidad para valores elevados de M y para una capa de choque delgada y no viscosa, cuando la superficie de choque tiene aproximadamente la misma inclinación que la del sólido.

En el caso de velocidades hipersónicas, dada la baja densidad y la elevada temperatura, la capa límite es muy gruesa, dando lugar a una modificación del perfil del sólido, lo que origina la formación de una onda de choque, aun en el caso de una placa plana aguda de incidencia nula. Entre esta onda de choque y la capa límite existe una zona en la que tiene lugar una interferencia entre la capa límite y la corriente exterior que modifica la curva de presiones sobre el sólido, en este caso, la placa plana; así, en lugar de una presión constante, presenta un fuerte gradiente de presión (interacción hipersónica), definido por el parámetro:

$$\frac{p_w}{p} = 1 + 0{,}48 \; x \quad ; \quad x < 10$$

$$x = \sqrt{\frac{C}{Re}} \; M^3 \quad ; \quad C = \frac{\eta_0}{\eta} \; \frac{T}{T_0} \cong 1 \quad ; \quad \frac{T_0}{T} = 1 + 0{,}198 \; (\gamma - 1) \; M^2$$

siendo, η la viscosidad dinámica, γ el coeficiente adiabático y (0) condiciones de estancamiento.

LINEAS DE RAYLEIGH

para flujos compresibles unidimensionales de un gas perfecto

(γ =1,0)

M	T_0 / T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0 / p_0^*	V/V^*
0,00	0	0	2	1,213	0
0,05	0,00995	0,00995	1,995	1,212	0,0050
0,10	0,03921	0,03921	1,980	1,207	0,0198
0,15	0,03603	0,03603	1,956	1,200	0,0440
0,20	0,14793	0,14793	1,923	1,190	0,0769
0,25	0,2215	0,2215	1,882	1,178	0,1176
0,30	0,3030	0,3030	1,835	1,164	0,1651
0,35	0,3839	0,3839	1,782	1,149	0,2183
0,40	0,4756	0,4756	1,724	1,133	0,2758
0,45	0,5602	0,5602	1,663	1,116	0,3363
0,50	0,6400	0,6400	1,600	1,0997	0,4000
0,55	0,7132	0,7132	1,536	1,0334	0,4645
0,60	0,7735	0,7735	1,471	1,0679	0,5294
0,65	0,8352	0,8352	1,406	1,0534	0,5940
0,70	0,8823	0,8823	1,342	1,0402	0,6577
0,75	0,9216	0,9216	1,280	1,0285	0,7200
0,80	0,9518	0,9518	1,220	1,0186	0,7805
0,85	0,9740	0,9740	1,161	1,0107	0,8389
0,90	0,9890	0,9890	1,105	1,0048	0,8950
0,95	0,9974	0,9974	1,0512	1,0012	0,9488
1,00	1	1	1	1	1
1,05	0,9976	0,9976	0,9512	1,0013	1,0488
1,10	0,9910	0,9910	0,9049	1,0052	1,0951
1,15	0,9807	0,9807	0,8611	1,0118	1,1389
1,20	0,9675	0,9675	0,8197	1,0214	1,1802
1,25	0,9518	0,9518	0,7805	1,034	1,220
1,30	0,9342	0,9342	0,7435	1,050	1,257
1,35	0,9151	0,9151	0,7086	1,069	1,291
1,40	0,8948	0,8948	0,6757	1,092	1,324
1,45	0,8737	0,8737	0,6447	1,119	1,355
1,50	0,8521	0,8521	0,6154	1,150	1,384
1,55	0,8301	0,8301	0,5878	1,186	1,412
1,60	0,8030	0,8030	0,5618	1,226	1,438
1,65	0,7859	0,7859	0,5373	1,271	1,463
1,70	0,7639	0,7639	0,5141	1,323	1,486
1,75	0,7422	0,7422	0,4923	1,381	1,508
1,80	0,7209	0,7209	0,4717	1,446	1,528
1,85	0,7000	0,7000	0,4522	1,519	1,547
1,90	0,6795	0,6795	0,4338	1,600	1,560
1,95	0,6595	0,6595	0,4164	1,691	1,584
2,00	0,6400	0,6400	0,4000	1,793	1,601
2,05	0,6211	0,6211	0,3844	1,907	1,601
2,10	0,6027	0,6027	0,3697	2,034	1,630
2,15	0,5849	0,5849	0,3557	2,176	1,644
2,20	0,5677	0,5677	0,3425	2,336	1,657
2,25	0,5510	0,5510	0,3299	2,515	1,670
2,30	0,5348	0,5348	0,3179	2,716	1,682
2,35	0,5192	0,5192	0,3066	2,942	1,682
2,40	0,5042	0,5042	0,2959	3,197	1,704
2,45	0,4397	0,4397	0,2857	3,484	1,714
2,50	0,4757	0,4757	0,2759	3,808	1,724
2,55	0,4621	0,4621	0,2666	4,175	1,733
2,60	0,4490	0,4490	0,2577	4,591	1,742
2,65	0,4364	0,4364	0,2493	5,064	1,751
2,70	0,4243	0,4243	0,2413	5,602	1,759

(γ =1,1)

M	T_0 / T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0 / p_0^*	V/V^*
0,00	0	0	2,1	1,228	0
0,05	0,01044	0,0109	2,094	1,226	0,00524
0,10	0,04111	0,0432	2,077	1,221	0,02077
0,15	0,09009	0,0945	2,049	1,213	0,04611
0,20	0,15444	0,1618	2,011	1,203	0,03046
0,25	0,2305	0,2413	1,965	1,190	0,1228
0,30	0,3144	0,3286	1,911	1,174	0,1720
0,35	0,4020	0,4195	1,851	1,157	0,2267
0,40	0,4898	0,5102	1,786	1,140	0,2857
0,45	0,5746	0,5973	1,717	1,122	0,3478
0,50	0,6540	0,6782	1,647	1,104	0,4118
0,55	0,7261	0,7510	1,576	1,0367	0,4766
0,60	0,7898	0,8147	1,504	1,0702	0,5416
0,65	0,8446	0,8634	1,434	1,0550	0,6057
0,70	0,8902	0,9123	1,365	1,0412	0,6686
0,75	0,9270	0,9467	1,297	1,0291	0,7297
0,80	0,9554	0,9720	1,232	1,0189	0,7887
0,85	0,9761	0,9892	1,170	1,0109	0,8453
0,90	0,9899	0,9989	1,111	1,0050	0,8995
0,95	0,9976	1,0073	1,0538	1,0013	0,9511
1,00	1	1	1	1	1
1,05	0,9979	0,9930	0,9490	1,0013	1,0463
1,10	0,9919	0,9821	0,9009	1,0051	1,0901
1,15	0,9827	0,9679	0,8555	1,0116	1,1314
1,20	0,9710	0,9511	0,8127	1,0209	1,1703
1,25	0,9572	0,9322	0,7724	1,0331	1,207
1,30	0,9418	0,9118	0,7345	1,0483	1,241
1,35	0,9251	0,8902	0,6989	1,0665	1,273
1,40	0,9074	0,8678	0,6654	1,088	1,304
1,45	0,8892	0,8449	0,6339	1,113	1,333
1,50	0,8706	0,8217	0,6043	1,141	1,360
1,55	0,8518	0,7984	0,5765	1,173	1,385
1,60	0,8329	0,7753	0,5503	1,210	1,409
1,65	0,8141	0,7524	0,5257	1,251	1,431
1,70	0,7955	0,7298	0,5025	1,297	1,452
1,75	0,7771	0,7076	0,4807	1,347	1,472
1,80	0,7591	0,6859	0,4601	1,403	1,491
1,85	0,7415	0,6648	0,4407	1,465	1,508
1,90	0,7243	0,6443	0,4224	1,532	1,525
1,95	0,7076	0,6243	0,4052	1,607	1,541
2,00	0,6914	0,6049	0,3889	1,639	1,556
2,05	0,6756	0,5562	0,3735	1,780	1,570
2,10	0,6603	0,5681	0,3589	1,879	1,583
2,15	0,6456	0,5506	0,3451	1,987	1,595
2,20	0,6313	0,5337	0,3321	2,106	1,607
2,25	0,6172	0,5174	0,3197	2,237	1,618
2,30	0,6042	0,5017	0,3097	2,380	1,629
2,35	0,5914	0,4866	0,2968	2,537	1,639
2,40	0,5750	0,4720	0,2863	2,709	1,649
2,45	0,5671	0,4550	0,2763	2,897	1,658
2,50	0,5556	0,4444	0,2667	3,104	1,667
2,55	0,5445	0,4314	0,2576	3,332	1,675
2,60	0,5335	0,4189	0,2489	3,551	1,683
2,65	0,5235	0,4068	0,2406	3,555	1,690
2,70	0,5136	0,3552	0,2328	4,156	1,697

2,75	0,4126	0,4126	0,2336	6,215	1,768
2,80	0,4013	0,4013	0,2262	6,916	1,774
2,85	0,3904	0,3904	0,2192	7,719	1,781
2,90	0,3799	0,3799	0,2125	8,640	1,787
2,95	0,3698	0,3698	0,2061	9,699	1,794
3,00	0,3600	0,3600	0,2000	10,920	1,800
3,50	0,2791	0,2791	0,1509	41,850	1,849
4,00	0,2215	0,2215	0,1176	212,71	1,882
4,50	0,1794	0,1794	0,0941	1425	1,906
5	0,1479	0,1479	0,0769	12519	1,923
6	0,1052	0,1052	0,0541	2150000	1,946
7	0,0784	0,0784	0,0400	1,06E+09	1,960
8	0,06099	0,06099	0,03077	1,47E+12	1,969
9	0,04818	0,04818	0,02439	5,74E+14	1,976
10	0,03921	0,03921	0,0198	6,23E+19	1,980
∞	0	0	0	∞	2

2,75	0,5041	0,3840	0,2253	4,487	1,704
2,80	0,4949	0,3733	0,2182	4,551	1,711
2,85	0,4860	0,3629	0,2114	5,251	1,717
2,90	0,4775	0,3525	0,2049	5,652	1,723
2,95	0,4693	0,3433	0,1986	6,176	1,729
3,00	0,4613	0,3341	0,1927	6,71	1,734
3,50	0,3960	0,2575	0,1451	16,26	1,777
4,00	0,3496	0,2040	0,1129	42,42	1,806
4,50	0,3160	0,1648	0,0902	115,7	1,827
5	0,2909	0,1357	0,0737	322,33	1,842
6	0,2565	0,0963	0,0517	2508	1,862
7	0,2356	0,07169	0,03525	18430	1,874
8	0,2215	0,05536	0,02941	123000	1,882
9	0,2116	0,04400	0,02331	743000	1,888
10	0,2045	0,03575	0,01892	4010000	1,892
∞	0,1736	0	0	∞	1,909

(γ =1,2)

M	T_0 / T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0 / p_0^*	V/V^*
0,00	0	0	2,2	1,242	0
0,05	0,0109	0,01203	2,193	1,239	0,0054
0,10	0,0430	0,04726	2,173	1,234	0,0217
0,15	0,0941	0,10325	2,141	1,226	0,0482
0,20	0,1609	0,17627	2,099	1,214	0,0839
0,25	0,2395	0,2618	2,047	1,199	0,1279
0,30	0,3255	0,3548	1,986	1,183	0,1787
0,35	0,4147	0,4507	1,918	1,165	0,235
0,40	0,5034	0,5450	1,846	1,146	0,2953
0,45	0,5884	0,6343	1,770	1,127	0,3584
0,50	0,6672	0,7160	1,692	1,1078	0,4231
0,55	0,7381	0,7881	1,614	1,0895	0,4884
0,60	0,8003	0,8497	1,536	1,0722	0,5531
0,65	0,8531	0,9004	1,460	1,0563	0,6168
0,70	0,8969	0,9405	1,385	1,0420	0,6788
0,75	0,9318	0,9704	1,313	1,0296	0,7388
0,80	0,9585	0,9910	1,244	1,0191	0,7964
0,85	0,9779	1,0032	1,178	1,0109	0,8514
0,90	0,9907	1,0081	1,115	1,0049	0,9037
0,95	0,9978	1,0067	1,0562	1,0012	0,9532
1,00	1,0000	1	1	1	1
1,05	0,9981	0,9888	0,9471	1,0013	1,0441
1,10	0,9927	0,9741	0,8972	1,0050	1,0856
1,15	0,9845	0,9564	0,8504	1,0114	1,247
1,20	0,9740	0,9365	0,8065	1,0204	1,163
1,25	0,9617	0,9149	0,7653	1,0322	1,196
1,30	0,9481	0,8921	0,7266	1,0467	1,228
1,35	0,9334	0,8685	0,6903	1,0640	1,258
1,40	0,9180	0,8443	0,6563	1,0843	1,286
1,45	0,9021	0,8199	0,6245	1,1077	1,313
1,50	0,8859	0,7955	0,5546	1,134	1,338
1,55	0,8655	0,7712	0,5666	1,164	1,361
1,60	0,8532	0,7473	0,5403	1,197	1,383
1,65	0,8370	0,7737	0,5156	1,234	1,404
1,70	0,8211	0,7007	0,4924	1,275	1,423
1,75	0,8054	0,6782	0,4706	1,320	1,441
1,80	0,7900	0,6563	0,4501	1,369	1,458
1,85	0,7750	0,6351	0,4308	1,422	1,474
1,90	0,7604	0,6146	0,4126	1,480	1,490
1,95	0,7462	0,5947	0,3955	1,543	1,504
2,00	0,7325	0,5755	0,3793	1,612	1,517

(γ =1,3)

M	T_0 / T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0 / p_0^*	V/V^*
0,00	0	0	2,3	1,255	0
0,05	0,0114	0,0131	2,293	1,253	0,00573
0,10	0,0449	0,0516	2,270	1,247	0,02270
0,15	0,0980	0,1124	2,234	1,237	0,05028
0,20	0,1673	0,1912	2,186	1,224	0,08745
0,25	0,2482	0,2828	2,127	1,209	0,1329
0,30	0,3363	0,3816	2,059	1,191	0,1853
0,35	0,4270	0,4822	1,984	1,172	0,2430
0,40	0,5165	0,5800	1,904	1,152	0,3046
0,45	0,6015	0,6713	1,821	1,131	0,3687
0,50	0,6796	0,7533	1,736	1,1112	0,4340
0,55	0,7494	0,8244	1,651	1,0919	0,4994
0,60	0,8099	0,8837	1,567	1,0739	0,5640
0,65	0,8611	0,9312	1,485	1,0574	0,6272
0,70	0,9029	0,9673	1,405	1,0426	0,6885
0,75	0,9361	0,9928	1,328	1,0299	0,7473
0,80	0,9614	1,0088	1,255	1,0193	0,8035
0,85	0,9795	1,0163	1,186	1,0109	0,8569
0,90	0,9914	1,0166	1,120	1,0049	0,9075
0,95	0,9980	1,0108	1,0583	1,0012	0,9552
1,00	1,0000	1	1	1	1
1,05	0,9982	0,9851	0,9452	1,0012	1,0421
1,10	0,9933	0,9669	0,8939	1,0049	1,0816
1,15	0,9859	0,9461	0,8458	1,0111	1,1186
1,20	0,9765	0,9235	0,8008	1,0199	1,1532
1,25	0,9656	0,8996	0,7588	1,0312	1,186
1,30	0,9534	0,8747	0,7194	1,0451	1,216
1,35	0,9404	0,8493	0,6826	1,0617	1,244
1,40	0,9268	0,8737	0,6483	1,0809	1,27
1,45	0,9128	0,7980	0,6161	1,1028	1,295
1,50	0,8986	0,7726	0,5860	1,128	1,318
1,55	0,8843	0,7475	0,5578	1,155	1,340
1,60	0,8701	0,7230	0,5314	1,185	1,360
1,65	0,8560	0,6990	0,5067	1,219	1,379
1,70	0,8421	0,6756	0,4835	1,256	1,397
1,75	0,8285	0,6529	0,4617	1,296	1,414
1,80	0,8153	0,6309	0,4413	1,340	1,430
1,85	0,8024	0,6097	0,4221	1,387	1,445
1,90	0,7898	0,5552	0,4040	1,438	1,459
1,95	0,7776	0,5695	0,3870	1,493	1,472
2,00	0,7655	0,5505	0,3710	1,552	1,484

2,05	0,7192	0,557	0,3641	1,687	1,530
2,10	0,7063	0,5391	0,3497	1,767	1,542
2,15	0,6939	0,5219	0,336	1,854	1,553
2,20	0,6819	0,5054	0,3231	1,948	1,564
2,25	0,6703	0,4895	0,3109	2,050	1,574
2,30	0,6591	0,4742	0,2994	2,159	1,584
2,35	0,6484	0,4595	0,2884	2,277	1,593
2,40	0,6381	0,4453	0,278	2,405	1,602
2,45	0,6281	0,4317	0,2682	2,542	1,610
2,50	0,6185	0,4187	0,2588	2,690	1,618
2,55	0,6093	0,4062	0,2499	2,849	1,625
2,60	0,6004	0,3941	0,2414	3,021	1,632
2,65	0,5918	0,3825	0,2334	3,205	1,639
2,70	0,5836	0,3713	0,2257	3,403	1,645
2,75	0,5757	0,3606	0,2184	3,617	1,651
2,80	0,5681	0,3503	0,2114	3,847	1,657
2,85	0,5603	0,3404	0,2047	4,094	1,663
2,90	0,5537	0,3309	0,1932	4,359	1,668
2,95	0,5469	0,3217	0,1923	4,644	1,673
3,00	0,5404	0,3128	0,1864	4,951	1,678
3,50	0,4865	0,2405	0,1401	9,59	1,717
4,00	0,4436	0,1898	0,1089	18,99	1,743
4,50	0,4211	0,1531	0,08696	37,61	1,761
5	0,4006	0,1259	0,07097	73,64	1,774
6	0,3730	0,8919	0,04977	266,2	1,792
7	0,3557	0,6632	0,03679	875,9	1,803
8	0,3443	0,05118	0,02828	2621	1,810
9	0,3363	0,04065	0,02240	7181	1,815
10	0,3306	0,03306	0,01818	18182	1,818
∞	0,3056	0	0	∞	1,833

2,05	0,7545	0,5322	0,3559	1,615	1,495
2,10	0,7435	0,5146	0,3416	1,683	1,506
2,15	0,7329	0,4977	0,3281	1,755	1,517
2,20	0,7227	0,4815	0,3154	1,832	1,527
2,25	0,7129	0,4659	0,3034	1,915	1,536
2,30	0,7034	0,4510	0,2920	2,003	1,545
2,35	0,6943	0,4367	0,2812	2,097	1,553
2,40	0,6855	0,4229	0,2710	2,197	1,561
2,45	0,6771	0,4097	0,2613	2,303	1,568
2,50	0,6690	0,3971	0,2521	2,416	1,575
2,55	0,6612	0,3850	0,2433	2,536	1,582
2,60	0,6537	0,3733	0,2350	2,664	1,588
2,65	0,6465	0,3621	0,2271	2,800	1,594
2,70	0,6396	0,3511	0,2195	2,944	1,600
2,75	0,6329	0,3410	0,2123	3,056	1,606
2,80	0,6265	0,3311	0,2055	3,258	1,611
2,85	0,6203	0,3216	0,199	3,429	1,616
2,90	0,6144	0,3124	0,1928	3,611	1,621
2,95	0,6087	0,3036	0,1868	3,804	1,626
3,00	0,6032	0,2952	0,1811	4,007	1,63
3,50	0,5582	0,2262	0,1359	6,806	1,665
4,00	0,5265	0,1781	0,1055	11,57	1,688
4,50	0,5037	0,1435	0,08417	19,44	1,704
5	0,4867	0,1178	0,06866	32,06	1,716
6	0,4639	0,08335	0,04812	76,97	1,732
7	0,4496	0,06192	0,03555	191,3	1,742
8	0,4402	0,04775	0,02732	413,4	1,748
9	0,4336	0,03792	0,02164	833,4	1,753
10	0,4289	0,03032	0,01756	1582	1,756
∞	0,4083	0	0	∞	1,769

($\gamma = 1{,}4$)

M	T_0 / T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0 / p_0^*	V/V^*
0	0	0	2,4	1,2679	0
0,01	0,00048	0,00058	2,3997	1,2678	0,00024
0,02	0,00192	0,00230	2,3987	1,2675	0,00096
0,08	0,00431	0,00516	2,3970	1,2671	0,00216
0,04	0,00765	0,00917	2,3946	1,2665	0,00383
0,05	0,01192	0,01430	2,3916	1,2657	0,00598
0,06	0,01712	0,02053	2,3880	1,2647	0,00860
0,07	0,02322	0,02784	2,3837	1,2636	0,01168
0,08	0,03021	0,03621	2,3787	1,2623	0,01522
0,09	0,03807	0,04562	2,3731	1,2608	0,01922
0,10	0,04678	0,05602	2,3669	1,2591	0,02367
0,11	0,05630	0,06739	2,3600	1,2573	0,02856
0,12	0,06661	0,07970	2,3526	1,2554	0,03388
0,13	0,07768	0,09290	2,3445	1,2533	0,03962
0,14	0,08947	0,10695	2,3359	1,2510	0,04578
0,15	0,10196	0,12181	2,3267	1,2486	0,05235
0,16	0,11511	0,13743	2,3170	1,2461	0,05931
0,17	0,12888	0,15377	2,3067	1,2434	0,06666
0,18	0,14324	0,17078	2,2959	1,2406	0,07438
0,19	0,15814	0,18841	2,2845	1,2377	0,08247
0,20	0,17355	0,20661	2,2727	1,2346	0,09091
0,21	0,18943	0,22533	2,2604	1,2314	0,09969
0,22	0,20574	0,24452	2,2477	1,2281	0,10879
0,23	0,22244	0,26413	2,2345	1,2248	0,11820
0,24	0,23948	0,28411	2,2209	1,2213	0,12792
0,25	0,25684	0,30440	2,2069	1,2177	0,13793
0,26	0,27446	0,32496	2,1925	1,2140	0,14821
0,27	0,29231	0,34573	2,1777	1,2102	0,15876

M	T_0 / T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0 / p_0^*	V/V^*
1,53	0,90172	0,73701	0,56111	1,1367	1,3135
1,54	0,89920	0,73189	0,55553	1,1420	1,3175
1,55	0,89669	0,72680	0,55002	1,1473	1,3214
1,56	0,89418	0,72173	0,54458	1,1527	1,3253
1,57	0,89167	0,71669	0,53922	1,1582	1,3291
1,58	0,88917	0,71168	0,53393	1,1639	1,3329
1,59	0,88668	0,70669	0,52871	1,1697	1,3366
1,60	0,88419	0,70173	0,52356	1,1756	1,3403
1,61	0,88170	0,69680	0,51848	1,1816	1,3439
1,62	0,87922	0,69190	0,51346	1,1877	1,3475
1,63	0,87675	0,68703	0,50851	1,1939	1,3511
1,64	0,87429	0,68219	0,50363	1,2002	1,3546
1,65	0,87184	0,67738	0,49881	1,2066	1,3580
1,66	0,86940	0,67259	0,49405	1,2131	1,3614
1,67	0,86696	0,66784	0,48935	1,2197	1,3648
1,68	0,86453	0,66312	0,48471	1,2264	1,3681
1,69	0,86211	0,65843	0,48014	1,2332	1,3713
1,70	0,85970	0,65377	0,47563	1,2402	1,3745
1,71	0,85731	0,64914	0,47117	1,2473	1,3777
1,72	0,85493	0,64455	0,46677	1,2545	1,3809
1,73	0,85256	0,63999	0,46242	1,2618	1,3840
1,74	0,85020	0,63546	0,45813	1,2692	1,3871
1,75	0,84785	0,63096	0,45390	1,2767	1,3901
1,76	0,84551	0,62649	0,44972	1,2843	1,3931
1,77	0,84318	0,62205	0,44559	1,2920	1,3960
1,78	0,84087	0,61765	0,44152	1,2998	1,3989
1,79	0,83857	0,61328	0,43750	1,3078	1,4018
1,80	0,83628	0,60894	0,43353	1,3159	1,4046

0,28	0,31035	0,36667	2,1626	1,2064	0,16955
0,29	0,32855	0,38773	2,1472	1,2025	0,18058
0,30	0,34686	0,40887	2,1314	1,1985	0,19183
0,31	0,36525	0,43004	2,1154	1,1945	0,20329
0,32	0,38369	0,45119	2,0991	1,1904	0,21494
0,33	0,40214	0,47228	2,0825	1,1863	0,22678
0,34	0,42057	0,49327	2,0657	1,1821	0,23879
0,35	0,43894	0,51413	2,0487	1,1779	0,25096
0,36	0,45723	0,53482	2,0314	1,1737	0,26327
0,37	0,47541	0,55530	2,0140	1,1695	0,27572
0,38	0,49346	0,57553	1,9964	1,1652	0,28828
0,39	0,51134	0,59549	1,9787	1,1609	0,30095
0,40	0,52903	0,61515	1,9608	1,1566	0,31372
0,41	0,54651	0,63448	1,9428	1,1523	0,32658
0,42	0,56376	0,65345	1,9247	1,1480	0,33951
0,43	0,58075	0,67205	1,9065	1,1437	0,35251
0,44	0,59748	0,69025	1,8882	1,1394	0,36556
0,45	0,61393	0,70803	1,8699	1,1351	0,37865
0,46	0,63007	0,72538	1,8515	1,1308	0,39178
0,47	0,64589	0,74228	1,8331	1,1266	0,40493
0,48	0,66139	0,75871	1,8147	1,1224	0,41810
0,49	0,67655	0,77466	1,7962	1,1182	0,43127
0,50	0,69136	0,79012	1,7778	1,1140	0,44445
0,51	0,70581	0,80509	1,7594	1,1099	0,45761
0,52	0,71990	0,81955	1,7410	1,1059	0,47075
0,53	0,73361	0,83351	1,7226	1,1019	0,48387
0,54	0,74695	0,84695	1,7043	1,0979	0,49696
0,55	0,75991	0,85987	1,6860	1,0940	0,51001
0,56	0,77248	0,87227	1,6678	1,0901	0,52302
0,57	0,78467	0,88415	1,6496	1,0863	0,53502
0,58	0,79647	0,89552	1,6316	1,0826	0,54897
0,59	0,80789	0,90637	1,6136	1,0789	0,56170
0,60	0,81892	0,91670	1,5957	1,0753	0,57447
0,61	0,82956	0,92653	1,5780	1,0717	0,58716
0,62	0,83982	0,93585	1,5603	1,0682	0,59976
0,63	0,84970	0,94466	1,5427	1,0648	0,61232
0,64	0,85920	0,95298	1,5253	1,0615	0,62477
0,65	0,86833	0,96081	1,5080	1,0582	0,63713
0,66	0,87709	0,96816	1,4908	1,0550	0,64941
0,67	0,88548	0,97503	1,4738	1,0519	0,66159
0,68	0,89350	0,98144	1,4569	1,0489	0,67367
0,69	0,90117	0,98739	1,4401	1,04596	0,68564
0,70	0,90850	0,99289	1,42350	1,04310	0,69751
0,71	0,91548	0,99796	1,40700	1,04033	0,70927
0,72	0,92212	1,00260	1,39070	1,03764	0,72093
0,73	0,92843	1,00682	1,37450	1,03504	0,73248
0,74	0,93442	1,01062	1,35850	1,03253	0,74392
0,75	0,94009	1,01403	1,34270	1,03010	0,75525
0,76	0,94546	1,01706	1,32700	1,02776	0,76646
0,77	0,95052	1,01971	1,3115	1,02552	0,77755
0,78	0,95528	1,02198	1,2961	1,02337	0,78852
0,79	0,95975	1,02390	1,2809	1,02131	0,79938
0,80	0,96394	1,02548	1,2658	1,01934	0,81012
0,81	0,96786	1,02672	1,2509	1,01746	0,82075
0,82	0,97152	1,02763	1,2362	1,01569	0,83126
0,83	0,97492	1,02823	1,2217	1,01399	0,84164
0,84	0,97807	1,02853	1,2073	1,01240	0,85150
0,85	0,98097	1,02854	1,1931	1,01091	0,86204
0,86	0,98363	1,02826	1,1791	1,00951	0,87206
0,87	0,98607	1,02771	1,1652	1,00819	0,88196
0,88	0,98828	1,02690	1,1515	1,00698	0,89175
0,89	0,99028	1,02583	1,1380	1,00587	0,90142
0,90	0,99207	1,02451	1,1246	1,04485	0,91097

1,81	0,83400	0,60463	0,42960	1,3241	1,4074
1,82	0,83174	0,60036	0,42573	1,3324	1,4102
1,83	0,82949	0,59612	0,42191	1,3408	1,4129
1,84	0,82726	0,59191	0,41813	1,3494	1,4156
1,85	0,82504	0,58773	0,41440	1,3581	1,4183
1,86	0,82283	0,58359	0,41072	1,3669	1,4209
1,87	0,82064	0,57948	0,40708	1,3758	1,4235
1,88	0,81846	0,57540	0,40349	1,3848	1,4261
1,89	0,81629	0,57135	0,39994	1,3940	1,4286
1,90	0,81414	0,56734	0,39643	1,4033	1,4311
1,91	0,81200	0,56336	0,39297	1,4127	1,4336
1,92	0,80987	0,55941	0,38955	1,4222	1,4360
1,93	0,80776	0,55549	0,38617	1,4319	1,4384
1,94	0,80567	0,55160	0,38283	1,4417	1,4408
1,95	0,80359	0,54774	0,37954	1,4516	1,4432
1,96	0,80152	0,54391	0,37628	1,4616	1,4455
1,97	0,79946	0,54012	0,37306	1,4718	1,4478
1,98	0,79742	0,53636	0,36988	1,4821	1,4501
1,99	0,79540	0,53263	0,36674	1,4925	1,4523
2,00	0,79339	0,52893	0,36364	1,5031	1,4545
2,01	0,79139	0,52526	0,36057	1,5138	1,4567
2,02	0,78941	0,52161	0,35754	1,5246	1,4589
2,03	0,78744	0,51800	0,35454	1,5356	1,4610
2,04	0,78549	0,51442	0,35158	1,5467	1,4631
2,06	0,78355	0,51087	0,34866	1,5579	1,4652
2,06	0,78162	0,50735	0,34577	1,5693	1,4673
2,07	0,77971	0,50386	0,34291	1,5808	1,4694
2,08	0,77781	0,50040	0,34009	1,5924	1,4714
2,09	0,77593	0,49697	0,33730	1,6042	1,4734
2,10	0,77406	0,49356	0,33454	1,6161	1,4753
2,11	0,77221	0,49018	0,33181	1,6282	1,4773
2,12	0,77037	0,48683	0,32912	1,6404	1,4792
2,13	0,76854	0,48351	0,32646	1,6528	1,4811
2,14	0,76673	0,48022	0,32383	1,6653	1,4830
2,15	0,76493	0,47696	0,32122	1,6780	1,4849
2,16	0,76314	0,47373	0,31864	1,6908	1,4867
2,17	0,76137	0,47052	0,31610	1,7037	1,4885
2,18	0,75961	0,46734	0,31359	1,7168	1,4903
2,19	0,75787	0,46419	0,31110	1,7300	1,4921
2,20	0,75614	0,46106	0,30864	1,7434	1,4939
2,21	0,75442	0,45796	0,30621	1,7570	1,4956
2,22	0,75271	0,45489	0,30381	1,7707	1,4973
2,23	0,75102	0,45184	0,30143	1,7846	1,4990
2,24	0,74934	0,44882	0,29908	1,7986	1,5007
2,25	0,74767	0,44582	0,29675	1,8128	1,5024
2,26	0,74602	0,44285	0,29445	1,8271	1,5040
2,27	0,74438	0,43990	0,29218	1,8416	1,5056
2,28	0,74275	0,43698	0,28993	1,8562	1,5072
2,29	0,74114	0,43409	0,28771	1,8710	1,5088
2,30	0,73954	0,43122	0,28551	1,8860	1,5104
2,31	0,73795	0,42837	0,28333	1,9012	1,5119
2,32	0,73638	0,42555	0,28118	1,9165	1,5134
2,33	0,73482	0,42276	0,27905	1,9320	1,5150
2,34	0,73327	0,41999	0,27695	1,9476	1,5165
2,35	0,73173	0,41724	0,27487	1,9634	1,5180
2,36	0,73020	0,41451	0,27281	1,9794	1,5195
2,37	0,72868	0,41181	0,27077	1,9955	1,5209
2,38	0,72718	0,40913	0,26875	2,0118	1,5223
2,39	0,72569	0,40647	0,26675	2,0283	1,5237
2,40	0,72421	0,40383	0,26478	2,0450	1,5252
2,41	0,72274	0,40122	0,26283	2,0619	1,5266
2,42	0,72129	0,39863	0,26090	2,0789	1,5279
2,43	0,71985	0,39606	0,25899	2,0961	1,5293

0,91	0,99366	1,02297	1,1114	1,00393	0,92039
0,92	0,99506	1,02120	1,09842	1,00310	0,92970
0,93	0,99627	1,01921	1,08555	1,00237	0,93889
0,94	0,99729	1,01702	1,07285	1,00174	0,94796
0,95	0,99814	1,01463	1,06030	1,00121	0,95692
0,96	0,99883	1,01205	1,04792	1,00077	0,96576
0,97	0,99935	1,00929	1,03570	1,00043	0,97449
0,98	0,99972	1,00636	1,02364	1,00019	0,98311
0,99	0,93993	1,00326	1,01174	1,00004	0,99161
1,00	1	1	1	1	1
1,01	0,99993	0,99659	0,98841	1,00004	1,00828
1,12	0,99973	0,99304	0,97697	1,00019	1,01644
1,03	0,99940	0,98936	0,96569	1,00043	1,02450
1,04	0,99895	0,98553	0,95456	1,00077	1,03246
1,05	0,99838	0,98161	0,94358	1,00121	1,04030
1,06	0,99769	0,97755	0,93275	1,00175	1,04804
1,07	0,99690	0,97339	0,92206	1,00238	1,05567
1,08	0,99600	0,96913	0,91152	1,00311	1,05320
1,09	0,99501	0,96477	0,90112	1,00394	1,07062
1,10	0,99392	0,96031	0,89086	1,00486	1,07795
1,11	0,99274	0,95577	0,88075	1,00588	1,08518
1,12	0,99148	0,95115	0,87078	1,00699	1,09230
1,13	0,99013	0,94646	0,86094	1,00820	1,09933
1,14	0,98871	0,94169	0,85123	1,00951	1,10626
1,15	0,98721	0,93685	0,84166	1,01092	1,1131
1,16	0,98564	0,93195	0,83222	1,01243	1,1198
1,17	0,98400	0,92700	0,82292	1,01403	1,1264
1,18	0,98230	0,92200	0,81374	1,01572	1,1330
1,19	0,98054	0,91695	0,80468	1,01752	1,1395
1,20	0,97872	0,91185	0,79576	1,01941	1,1459
1,21	0,97685	0,90671	0,78695	1,02140	1,1522
1,22	0,97492	0,90153	0,77827	1,02348	1,1584
1,23	0,97294	0,89632	0,76971	1,02566	1,1645
1,24	0,97092	0,89108	0,76127	1,02794	1,1705
1,25	0,96886	0,88581	0,75294	1,03032	1,1764
1,26	0,96675	0,88052	0,74473	1,03280	1,1823
1,27	0,96461	0,87521	0,73663	1,03536	1,1881
1,28	0,96243	0,86988	0,72865	1,03803	1,1938
1,29	0,96022	0,86453	0,72078	1,04080	1,1994
1,30	0,95798	0,85917	0,71301	1,04365	1,2050
1,31	0,95571	0,85380	0,70535	1,04661	1,2105
1,32	0,95341	0,84843	0,69780	1,04967	1,2159
1,33	0,95108	0,84305	0,69035	1,05283	1,2212
1,34	0,94873	0,83766	0,68301	1,05608	1,2264
1,35	0,94636	0,83227	0,67577	1,05943	1,2316
1,36	0,94397	0,82698	0,66863	1,06288	1,2367
1,37	0,94157	0,82151	0,66159	1,06642	1,2417
1,38	0,93915	0,81613	0,65464	1,07006	1,2467
1,39	0,93671	0,81076	0,64778	1,07380	1,2516
1,40	0,93425	0,80540	0,64102	1,07765	1,2564
1,41	0,93178	0,80004	0,63436	1,08159	1,2612
1,42	0,92931	0,79469	0,62779	1,08563	1,2659
1,43	0,92683	0,78936	0,62131	1,08977	1,2705
1,44	0,92434	0,78405	0,61491	1,0940	1,2751
1,45	0,92184	0,77875	0,60860	1,0983	1,2796
1,46	0,91933	0,77346	0,60237	1,1028	1,2840
1,47	0,91682	0,76819	0,59623	1,1073	1,2884
1,48	0,91431	0,76294	0,59018	1,1120	1,2927
1,49	0,91179	0,75771	0,58421	1,1167	1,2970
1,50	0,90928	0,75250	0,57831	1,1215	1,3012
1,51	0,90676	0,74731	0,57250	1,1264	1,3054
1,52	0,90424	0,74215	0,56677	1,1315	1,3095

2,44	0,71842	0,39352	0,25710	2,1135	1,5306
2,46	0,71700	0,39100	0,25523	2,1311	1,5320
2,46	0,71559	0,35550	0,25337	2,1489	1,5333
2,47	0,71419	0,38602	0,25153	2,1669	1,5346
2,48	0,71280	0,38356	0,24972	2,1850	1,5355
2,49	0,71142	0,38112	0,24793	2,2033	1,5372
2,50	0,71005	0,37870	0,24616	2,2218	1,5385
2,51	0,70870	0,37630	0,24440	2,2405	1,5398
2,52	0,70736	0,37392	0,24266	2,2554	1,5410
2,53	0,70603	0,37157	0,24094	2,2785	1,5422
2,54	0,70471	0,36923	0,23923	2,2978	1,5434
2,55	0,70340	0,36691	0,23754	2,3173	1,5446
2,56	0,70210	0,36461	0,23557	2,3370	1,5458
2,57	0,70081	0,36233	0,23422	2,3565	1,5470
2,58	0,69953	0,36007	0,23258	2,3770	1,5482
2,59	0,69825	0,35783	0,23096	2,3972	1,5494
2,60	0,69699	0,35561	0,22936	2,4177	1,5505
2,61	0,65574	0,35341	0,22777	2,4384	1,5516
2,62	0,65450	0,35123	0,22620	2,4593	1,5527
2,63	0,69327	0,34906	0,22464	2,4804	1,5538
2,64	0,65205	0,34691	0,22310	2,5017	1,5549
2,65	0,69084	0,34478	0,22158	2,5233	1,5560
2,66	0,68964	0,34267	0,22007	2,5451	1,5571
2,67	0,65545	0,34057	0,21857	2,5671	1,5582
2,68	0,68727	0,33849	0,21709	2,5552	1,5593
2,69	0,68610	0,33643	0,21562	2,6116	1,5603
2,70	0,68494	0,33439	0,21417	2,6342	1,5613
2,71	0,68378	0,33236	0,21273	2,6571	1,5623
2,72	0,68263	0,33035	0,21131	2,6802	1,5633
2,73	0,68150	0,32836	0,20990	2,7035	1,5644
2,74	0,68038	0,32638	0,20850	2,7270	1,5654
2,75	0,67926	0,32442	0,20712	2,7505	1,5663
2,76	0,67815	0,32248	0,20575	2,7748	1,5673
2,77	0,67704	0,32055	0,20439	2,7990	1,5683
2,78	0,67595	0,31864	0,20305	2,8235	1,5692
2,79	0,67487	0,31674	0,20172	2,8482	1,5702
2,80	0,67380	0,31486	0,20040	2,8731	1,5711
2,81	0,67273	0,31299	0,19909	2,8982	1,5721
2,82	0,67167	0,31114	0,19780	2,9236	1,5730
2,83	0,67062	0,30931	0,19652	2,9493	1,5739
2,84	0,66958	0,30749	0,19525	2,9752	1,5748
2,85	0,66855	0,30568	0,19399	3,0013	1,5757
2,86	0,66752	0,30389	0,19274	3,0277	1,5766
2,87	0,66650	0,30211	0,19151	3,0544	1,5775
2,88	0,66549	0,30035	0,19029	3,0813	1,5784
2,89	0,66449	0,29860	0,18908	3,1084	1,5792
2,90	0,66350	0,29687	0,18788	3,1358	1,5801
2,91	0,66252	0,29515	0,18669	3,1635	1,5809
2,92	0,66154	0,29344	0,18551	3,1914	1,5818
2,93	0,66057	0,29175	0,18435	3,2196	1,5826
2,94	0,65961	0,29007	0,18320	3,2481	1,5834
2,95	0,65865	0,28841	0,18205	3,2768	1,5843
2,96	0,65770	0,28676	0,18091	3,3058	1,5851
2,97	0,65676	0,28512	0,17978	3,3351	1,5859
2,98	0,65583	0,28349	0,17867	3,3646	1,5867
3	0,65398	0,28028	0,17647	3,4244	1,5882
3,5	0,61580	0,21419	0,13223	5,3280	1,6198
4	0,58909	0,16831	0,10256	8,2268	1,6410
5	0,55555	0,11111	0,06667	18,634	1,6667
6	0,53633	0,07849	0,04669	38,946	1,6809
7	0,52437	0,05826	0,03448	75,414	1,6896
8	0,51646	0,04491	0,02649	136,62	1,6954

($\gamma = 1{,}67$)

M	T_0 / T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0 / p_0^*	V/V^*
0,00	0	0	2,67	1,299	0
0,05	0,01325	0,01767	2,659	1,297	0,00665
0,10	0,05183	0,06896	2,626	1,289	0,02626
0,15	0,11243	0,1490	2,573	1,276	0,05790
0,20	0,1902	0,2506	2,503	1,259	0,10011
0,25	0,2794	0,3653	2,419	1,239	0,1511
0,30	0,3742	0,4849	2,321	1,216	0,2089
0,35	0,4693	0,6018	2,216	1,192	0,2715
0,40	0,5606	0,7103	2,107	1,168	0,3371
0,45	0,6448	0,8062	1,995	1,144	0,4040
0,50	0,7201	0,8870	1,884	1,1202	0,4709
0,55	0,7853	0,9519	1,774	1,0981	0,5366
0,60	0,8402	1,0010	1,667	1,0778	0,6003
0,65	0,8853	1,0354	1,565	1,0597	0,6614
0,70	0,9213	1,0565	1,468	1,0438	0,7195
0,75	0,9491	1,0662	1,377	1,0303	0,7744
0,80	0,9697	1,0660	1,291	1,0193	0,8260
0,85	0,9842	1,0578	1,210	1,0108	0,8742
0,90	0,9935	1,0432	1,135	1,0048	0,9192
0,95	0,9985	1,0235	1,0649	1,0012	0,9611
1,00	1	1	1	1	1
1,05	0,9987	0,9736	0,9398	1,0012	1,0361
1,10	0,9952	0,9454	0,8839	1,0046	1,0695
1,15	0,9899	0,9158	0,8321	1,0103	1,1005
1,20	0,9833	0,8855	0,7842	1,0181	1,1292
1,25	0,9757	0,8550	0,7397	1,028	1,156
1,30	0,9674	0,8246	0,6985	1,040	1,181
1,35	0,9586	0,7946	0,6603	1,054	1,204
1,40	0,9195	0,7652	0,6249	1,070	1,225
1,45	0,9403	0,7365	0,5919	1,088	1,245
1,60	0,931	0,7087	0,5612	1,108	1,263
1,65	0,9217	0,6818	0,5327	1,130	1,280
1,60	0,9125	0,6559	0,5062	1,154	1,296
1,65	0,9035	0,6309	0,4814	1,179	1,311
1,70	0,8947	0,6069	0,4583	1,206	1,324

M	T_0 / T_0^*	T/T^*	p/p^*	p_0 / p_0^*	V/V^*
1,75	0,8862	0,5840	0,4367	1,235	1,337
1,80	0,8779	0,5620	0,4165	1,266	1,349
1,85	0,8699	0,5410	0,3976	1,299	1,360
1,90	0,8621	0,5209	0,3799	1,334	1,371
1,95	0,8546	0,5018	0,3633	1,370	1,381
2,00	0,8474	0,4835	0,3477	1,408	1,391
2,05	0,8405	0,4660	0,3330	1,448	1,400
2,10	0,8338	0,4493	0,3192	1,490	1,408
2,15	0,8274	0,4334	0,3062	1,534	1,415
2,20	0,8213	0,4183	0,2940	1,580	1,423
2,25	0,8154	0,4038	0,2824	1,628	1,430
2,30	0,8097	0,3899	0,2715	1,678	1,436
2,35	0,8043	0,3767	0,2612	1,729	1,442
2,40	0,7991	0,3641	0,2514	1,783	1,448
2,45	0,7941	0,3521	0,2422	1,839	1,454
2,50	0,7893	0,3406	0,2334	1,897	1,459
2,55	0,7847	0,3296	0,2251	1,956	1,464
2,60	0,7803	0,3191	0,2173	2,018	1,469
2,65	0,7761	0,309	0,2098	2,082	1,473
2,70	0,7721	0,2994	0,2027	2,148	1,477
2,75	0,7682	0,2902	0,1959	2,216	1,481
2,80	0,7644	0,2814	0,1895	2,287	1,485
2,85	0,7608	0,273	0,1834	2,360	1,489
2,90	0,7574	0,2649	0,1775	2,435	1,493
2,95	0,7541	0,2571	0,1719	2,512	1,496
3	0,7509	0,2497	0,1666	2,587	1,499
3,5	0,7251	0,1897	0,1244	3,521	1,524
4	0,7072	0,1484	0,09632	4,716	1,541
4,5	0,6943	0,1191	0,07669	6,213	1,553
5	0,6848	0,0975	0,06246	8,044	1,561
6	0,6721	0,0687	0,04368	12,86	1,573
7	0,6642	0,05092	0,03224	19,44	1,58
8	0,659	0,0392	0,02475	28,07	1,584
9	0,6553	0,0311	0,01959	39,05	1,587
10	0,6528	0,02526	0,01589	52,66	1,589
∞	0,6414	0	0	∞	1,59

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad ; \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}} \quad ; \quad \frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \quad ; \quad \frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} \quad ; \quad M^* = \frac{V}{V^*} = M\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}}$$

Las temperaturas de las Tablas vienen dadas en °F absolutos: °K = (°F x 0,56) + 255,37

ONDA DE CHOQUE EN FLUJO MONODIMENSIONAL ($\gamma = 1{,}40$)

M_x	M_y	p_y / p_x	ρ_y / ρ_x	T_y / T_x	p_{0y} / p_{0x}	p_{0y} / p_x
1,05	0,95312	1,1196	1,08398	1,03284	0,99987	2,00830
1,06	0,94444	1,1442	1,10092	1,03931	0,99976	2,03250
1,07	0,93598	1,1690	1,11790	1,04575	0,99962	2,05700
1,08	0,92772	1,1941	1,13492	1,05217	0,99944	2,08190
1,09	0,91965	1,2194	1,15199	1,05856	0,99921	2,10720
1,10	0,91177	1,2450	1,1691	1,06494	0,99892	2,13280
1,11	0,90408	1,2708	1,1862	1,07130	0,99858	2,15880
1,12	0,89656	1,2968	1,2034	1,07764	0,99820	2,18510
1,13	0,88922	1,3230	1,2206	1,08396	0,99776	2,21180
1,14	0,88204	1,3495	1,2378	1,09027	0,99726	2,23880
1,15	0,87502	1,3762	1,2550	1,09657	0,99669	2,26610
1,16	0,86816	1,4032	1,2723	1,10287	0,99605	2,29370
1,17	0,86145	1,4304	1,2896	1,10916	0,99534	2,32170
1,18	0,85488	1,4578	1,3069	1,11544	0,99455	2,34990
1,19	0,84846	1,4854	1,3243	1,12172	0,99371	2,37860
1,20	0,84217	1,5133	1,3416	1,1280	0,99280	2,40750
1,21	0,83601	1,5414	1,3590	1,1343	0,99180	2,43670
1,22	0,82998	1,5698	1,3764	1,1405	0,99073	2,46620
1,23	0,82408	1,5984	1,3938	1,1468	0,98957	2,49610
1,24	0,81830	1,6272	1,4112	1,1531	0,98835	2,52630
1,25	0,81264	1,6562	1,4286	1,1594	0,98706	2,55680
1,26	0,80709	1,6855	1,4460	1,1657	0,98568	2,58760
1,27	0,80165	1,7150	1,4634	1,1720	0,98422	2,61870
1,28	0,79631	1,7448	1,4808	1,1782	0,98268	2,65000
1,29	0,79108	1,7748	1,4983	1,1846	0,98106	2,68160
1,30	0,78596	1,8050	1,5157	1,1909	0,97935	2,71350
1,31	0,78093	1,8354	1,5331	1,1972	0,97758	2,74570
1,32	0,77600	1,8661	1,5505	1,2035	0,97574	2,77830
1,33	0,77116	1,8970	1,5680	1,2099	0,97382	2,81120
1,34	0,76641	1,9282	1,5854	1,2162	0,97181	2,84440
1,35	0,76175	1,9596	1,6028	1,2226	0,96972	2,87780
1,36	0,75718	1,9912	1,6202	1,2290	0,96756	2,91150
1,37	0,75269	2,0230	1,6376	1,2354	0,96534	2,94550
1,38	0,74328	2,0551	1,6550	1,2418	0,96304	2,97980
1,39	0,74396	2,0874	1,6723	1,2482	0,96065	3,01440
1,40	0,73971	2,1200	1,6896	1,2547	0,95819	3,04930
1,41	0,73554	2,1528	1,7070	1,2612	0,95566	3,08440
1,42	0,73144	2,1858	1,7243	1,2676	0,95306	3,11980
1,43	0,72741	2,2190	1,7416	1,2742	0,95039	3,15550
1,44	0,72345	2,2525	1,7589	1,2807	0,94765	3,19150
1,45	0,71956	2,2862	1,7761	1,2872	0,94483	3,22780
1,46	0,71574	2,3202	1,7934	1,2938	0,94196	3,26430
1,47	0,71198	2,3544	1,8106	1,3004	0,93901	3,30110
1,48	0,70829	2,3888	1,8278	1,3070	0,93600	3,33820
1,49	0,70466	2,4234	1,8449	1,3136	0,93292	3,37560
1,50	0,70109	2,4583	1,8621	1,3202	0,92978	3,41330
1,51	0,69758	2,4934	1,8792	1,3269	0,92658	3,45120
1,52	0,69413	2,5288	1,8962	1,3336	0,92331	3,48940
1,53	0,69073	2,5644	1,9133	1,3403	0,91999	3,52790
1,54	0,68739	2,6003	1,9303	1,3470	0,91662	3,56670
1,55	0,68410	2,6363	1,9473	1,3538	0,91319	3,60580
1,56	0,68086	2,6725	1,9643	1,3606	0,90970	3,64510
1,57	0,67768	2,7090	1,9812	1,3674	0,90615	3,68470
1,58	0,67455	2,7458	1,9981	1,3742	0,90255	3,72450
1,59	0,67147	2,7828	2,0149	1,3811	0,89889	3,76450
1,60	0,66844	2,8201	2,0317	1,3880	0,89520	3,80490
1,61	0,66545	2,8575	2,0485	1,3949	0,89144	3,84560
1,62	0,66251	2,8951	2,0652	1,4018	0,88764	3,88660

M_x	M_y	p_y / p_x	ρ_y / ρ_x	T_y / T_x	p_{0y} / p_{0x}	p_{0y} / p_x
1,95	0,58618	4,2696	2,5919	1,6473	0,74418	5,3878
1,96	0,58437	4,3152	2,6070	1,6553	0,73954	5,4378
1,97	0,58258	4,3610	2,6220	1,6633	0,73487	5,4880
1,98	0,58081	4,4071	2,6369	1,6713	0,73021	5,5385
1,99	0,57907	4,4534	2,6518	1,6794	0,72554	5,5894
2,00	0,57735	4,5000	2,6666	1,6875	0,72088	5,6405
2,01	0,57565	4,5468	2,6814	1,6956	0,71619	5,6918
2,02	0,57397	4,5938	2,6962	1,7038	0,71152	5,7434
2,03	0,57231	4,6411	2,7109	1,7120	0,70686	5,7952
2,04	0,57068	4,6886	2,7255	1,7203	0,70218	5,8473
2,05	0,56907	4,7363	2,7400	1,7286	0,69752	5,8997
2,06	0,56747	4,7842	2,7545	1,7369	0,69284	5,9523
2,07	0,56589	4,8324	2,7690	1,7452	0,68817	6,0052
2,08	0,56433	4,8808	2,7834	1,7536	0,68351	6,0584
2,09	0,56280	4,9295	2,7977	1,7620	0,67886	6,1118
2,10	0,56128	4,9784	2,8139	3,7704	0,67422	6,1655
2,11	0,55978	5,0275	2,8216	1,7789	0,66957	6,2194
2,12	0,55830	5,0768	2,8402	1,7874	0,66492	6,2736
2,13	0,55683	5,1264	2,8543	1,7960	0,66029	6,3280
2,14	0,55538	5,1762	2,8683	1,8046	0,65567	6,3827
2,40	0,52312	6,5533	3,2119	2,0403	0,54015	7,8969
2,41	0,52206	6,6094	3,2243	2,0499	0,53594	7,9587
2,42	0,52100	6,6658	3,2366	2,0595	0,53175	8,0207
2,43	0,51996	6,7224	3,2489	2,0691	0,52758	8,0830
2,44	0,51894	6,7792	3,2611	2,0788	0,52344	8,1455
2,45	0,51792	6,8362	3,2733	2,0885	0,51932	8,2083
2,46	0,51691	6,8935	3,2854	2,0982	0,51521	8,2714
2,47	0,51592	6,9510	3,2975	2,1080	0,51112	8,3347
2,48	0,51493	7,0088	3,3095	2,1178	0,50706	8,3983
2,49	0,51395	7,0668	3,3214	2,1276	0,50303	8,4622
2,50	0,51299	7,1250	3,3333	2,1375	0,49902	8,5262
2,51	0,51204	7,1834	3,3451	2,1474	0,49502	8,5904
2,52	0,51109	7,2421	3,3569	2,1574	0,49104	8,6549
2,53	0,51015	7,3010	3,3686	2,1674	0,48709	8,7198
2,54	0,50923	7,3602	3,3802	2,1774	0,48317	8,7850
2,55	0,50831	7,4196	3,3918	2,1875	0,47927	8,8505
2,56	0,50740	7,4792	3,4034	2,1976	0,47540	8,9162
2,57	0,50651	7,5391	3,4149	2,2077	0,47155	8,9821
2,58	0,50562	7,5992	3,4263	2,2179	0,46772	9,0482
2,59	0,50474	7,6595	3,4376	2,2281	0,46391	9,1146
2,60	0,50387	7,7200	3,4489	2,2383	0,46012	9,1813
2,61	0,50301	7,7808	3,4602	2,2486	0,45636	9,2481
2,62	0,50216	7,8418	3,4714	2,2589	0,45262	9,3154
2,63	0,50132	7,9030	3,4825	2,2693	0,44891	9,3829
2,64	0,50048	7,9645	3,4936	2,2797	0,44522	9,4507
2,65	0,49965	8,0262	3,5047	2,2901	0,44155	9,5187
2,66	0,49883	8,0882	3,5157	2,3006	0,43791	9,5869
2,67	0,49802	8,1504	3,5266	2,3111	0,43429	9,6553
2,68	0,49722	8,2128	3,5374	2,3217	0,43070	9,7241
2,69	0,49642	8,2754	3,5482	2,3323	0,42713	9,7932
2,70	0,49563	8,3383	3,5590	2,3429	0,42359	9,8625
2,71	0,49485	8,4014	3,5697	2,3536	0,42007	9,932
2,72	0,49408	8,4648	3,5803	2,3643	0,41657	10,002
2,73	0,49332	8,5284	3,5909	2,3750	0,41310	10,072
2,74	0,49256	8,5922	3,6014	2,3858	0,40965	10,142
2,75	0,49181	8,6562	3,6119	2,3966	0,40622	10,212
2,76	0,49107	8,7205	3,6224	2,4074	0,40282	10,283
2,77	0,49033	8,7850	3,6328	2,4183	0,39945	10,354

1,63	0,65962	2,9330	2,0820	1,4088	0,88330	3,92780
1,64	0,65677	2,9712	2,0986	1,4158	0,87992	3,96930
1,65	0,65396	3,0096	2,1152	1,4228	0,87598	4,01110
1,66	0,65119	3,0482	2,1318	1,4298	0,87201	4,05310
1,67	0,64847	3,0870	2,1484	1,4369	0,86800	4,09540
1,68	0,64579	3,1261	2,1649	1,4440	0,86396	4,13790
1,69	0,64315	3,1654	2,1813	1,4512	0,85987	4,18070
1,70	0,64055	3,2050	2,1977	1,4583	0,85573	4,22380
1,71	0,63798	3,2448	2,2141	1,4655	0,85155	4,2672
1,72	0,63545	3,2848	2,2304	1,4727	0,84735	4,3108
1,73	0,63296	3,325	2,2467	1,4800	0,84312	4,3547
1,74	0,63051	3,3655	2,2629	1,4873	0,83886	4,3989
1,75	0,62809	3,4062	2,2791	1,4946	0,83456	4,4433
1,76	0,6257	3,4472	2,2952	1,5019	0,83024	4,488
1,77	0,62335	3,4884	2,3113	1,5093	0,82589	4,533
1,78	0,62104	3,5298	2,3273	1,5167	0,82152	4,5783
1,79	0,61875	3,5714	2,3433	1,5241	0,81711	4,6238
1,80	0,61650	3,6133	2,3592	1,5316	0,81268	4,6695
1,81	0,61428	3,6554	2,3751	1,5391	0,80823	4,7155
1,82	0,61209	3,6978	2,3909	1,5466	0,80376	4,7618
1,83	0,60993	3,7404	2,4067	1,5542	0,79926	4,8083
1,84	0,60780	3,7832	2,4224	1,5617	0,79474	4,8551
1,85	0,60570	3,8262	2,4381	1,5694	0,79021	4,9022
1,86	0,60363	3,8695	2,4537	1,5770	0,78567	4,9498
1,87	0,60159	3,9130	2,4693	1,5847	0,78112	4,9974
1,88	0,59957	3,9568	2,4848	1,5924	0,77656	5,0453
1,89	0,59758	4,0008	2,5003	1,6001	0,77197	5,0934
1,90	0,59562	4,0450	2,5157	1,6079	0,76735	5,1417
1,91	0,59363	4,0894	2,5310	1,6157	0,76273	5,1904
1,92	0,59177	4,1341	2,5463	1,6236	0,75812	5,2394
1,93	0,58988	4,1790	2,5615	1,6314	0,75347	5,2886
1,94	0,58802	4,2242	2,5767	1,6394	0,74883	5,3381

2,78	0,48960	8,8497	3,6431	2,4292	0,39610	10,426
2,79	0,48888	8,9147	3,6533	2,4402	0,39276	10,498
2,80	0,48817	8,9800	3,6635	2,4512	0,38946	10,569
2,81	0,48746	9,0454	3,6737	2,4622	0,38618	10,641
2,82	0,48676	9,1111	3,6838	2,4733	0,38293	10,714
2,83	0,48607	9,1770	3,6939	2,4844	0,37970	10,787
2,84	0,48538	9,2432	3,7039	2,4955	0,37649	10,860
2,85	0,48470	9,3096	3,7139	2,5067	0,37330	10,933
2,86	0,48402	9,3762	3,7238	2,5179	0,37013	11,006
2,87	0,48334	9,4431	3,7336	2,5292	0,36700	11,080
2,88	0,48268	9,5102	3,7434	2,5405	0,36389	11,154
2,89	0,48203	9,5775	3,7532	2,5518	0,36080	11,228
2,90	0,48138	9,6450	3,7629	2,5632	0,35773	11,302
2,91	0,48074	9,7127	3,7725	2,5746	0,35469	11,377
2,92	0,48010	9,7808	3,7821	2,5860	0,35167	11,152
2,93	0,47946	9,8491	3,7917	2,5975	0,34867	11,527
2,94	0,47883	9,9176	3,8012	2,6090	0,34570	11,603
2,95	0,47821	9,9860	3,8106	2,6206	0,34275	11,679
2,96	0,47760	10,0550	3,8200	2,6322	0,33982	11,755
2,97	0,47699	10,1240	3,8294	2,6438	0,33692	11,831
2,98	0,47638	10,1940	3,8387	2,6555	0,33404	11,907
2,99	0,47578	10,2630	3,8479	2,6672	0,33118	11,984
3	0,47519	10,3330	3,8571	2,6790	0,32834	12,061
3,5	0,45115	14,1250	4,2608	3,3150	0,21295	16,242
4	0,43496	18,5000	4,5714	4,0469	0,13876	21,068
4,5	0,42355	23,4580	4,8119	4,8751	0,09170	26,539
5	0,41523	29,0000	5,0000	5,8000	0,06172	32,654
6	0,40416	41,8330	5,2683	7,9410	0,02965	46,815
7	0,39736	57,0000	5,4444	10,4690	0,01535	63,552
8	0,39289	74,5000	5,5652	13,3870	0,00849	82,865
9	0,38980	94,3330	5,6512	16,6930	0,00496	104,753
10	0,38757	116,5000	5,7143	20,3880	0,00304	129,217
∞	0,37796	∞	6	∞	0	∞

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \frac{2}{\gamma - 1}}{\frac{2\,\gamma}{\gamma - 1} M_x^2 - 1} \quad ; \quad \frac{T_y}{T_x} = \frac{(1 + M_x^2 \frac{\gamma - 1}{2})(M_x^2 \frac{2\,\gamma}{\gamma - 1} - 1)}{\frac{(\gamma + 1)^2}{2(\gamma - 1)} M_x^2} \quad ; \quad \frac{p_y}{p_x} = \frac{2\,\gamma}{\gamma + 1} M_x^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

$$\frac{p_{0_y}}{p_{0_x}} = \left(\frac{\frac{\gamma + 1}{2} M_x^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left(\frac{2\,\gamma}{\gamma + 1} M_x^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{1 - g}}$$

LINEAS DE FANNO

Para flujo compresible unidimensional de un gas perfecto

($\gamma = 1{,}0$)

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	v/v^*	F/F^*	$4\lambda L_m/d$
0,00	1	∞	∞	0,00	∞	∞
0,05		20	12,1460	0,05	10,025	393,01
0,10		10	6,0960	0,10	5,050	94,39
0,15		6,657	4,0890	0,15	3,408	39,65
0,20		5	3,0940	0,20	2,600	20,78
0,25		4	2,5030	0,25	2,125	12,227
0,30		3,333	2,1150	0,30	1,817	7,703
0,35		2,857	1,8420	0,35	1,604	5,064
0,40		2,5	1,6430	0,40	1,450	3,417
0,45		2,222	1,4920	0,45	1,336	2,341
0,50		2	1,3750	0,50	1,250	1,614
0,55		1,5150	1,2830	0,55	1,184	1,110
0,60		1,6670	1,2100	0,60	1,133	0,7561
0,65		1,5390	1,1530	0,65	1,0942	0,5053
0,70		1,4290	1,1070	0,70	1,0643	0,3275
0,75		1,3330	1,0714	0,75	1,0417	0,2024
0,80		1,2500	1,0441	0,80	1,0250	0,1162
0,85		1,1760	1,0240	0,85	1,0132	0,05904
0,90		1,1110	1,0104	0,90	1,0056	0,02385
0,95		1,0526	1,0026	0,95	1,0013	0,00545
1,00		1	1	1,00	1	0
1,05		0,9524	1,0025	1,05	1,0012	0,00461
1,10		0,9091	1,0097	1,10	1,0045	0,01707
1,15		0,8695	1,0217	1,15	1,0098	0,03567
1,20		0,8333	1,0384	1,20	1,0167	0,05909
1,25		0,8000	1,0598	1,25	1,025	0,08629
1,30		0,7692	1,0362	1,30	1,0346	0,1164
1,35		0,7407	1,118	1,35	1,0453	0,1489
1,40		0,7143	1,154	1,40	1,0571	0,1831
1,45		0,6897	1,196	1,45	1,0698	0,2188
1,50		0,6667	1,245	1,50	1,0333	0,2554
1,55		0,6452	1,300	1,55	1,0976	0,2927
1,60		0,6250	1,363	1,60	1,112	0,3306
1,65		0,6061	1,434	1,65	1,128	0,3689
1,70		0,5882	1,514	1,70	1,144	0,4073
1,75		0,5714	1,603	1,75	1,161	0,4458
1,80		0,5556	1,703	1,80	1,178	0,4842
1,85		0,5406	1,815	1,85	1,195	0,5225
1,90		0,5263	1,941	0,90	1,213	0,5607
1,95		0,5128	2,082	1,95	1,231	0,5956
2,00		0,5000	2,241	2,00	1,250	0,6363
2,05		0,4378	2,419	2,05	1,269	0,6736
2,10		0,4762	2,620	2,10	1,288	0,7106
2,15		0,4651	2,846	2,15	1,308	0,7472
2,20		0,4545	3,100	2,20	1,327	0,7835
2,25		0,4444	3,388	2,25	1,347	0,8194
2,30		0,4348	3,714	2,30	1,367	0,8549
2,35		0,4256	4,083	2,35	1,388	0,8900
2,40		0,4167	4,502	2,40	1,408	0,9246
2,45		0,4082	4,979	2,45	1,429	0,9588
2,50		0,4000	5,522	2,50	1,45	0,9926
2,55		0,3922	6,142	2,55	1,471	1,026
2,60		0,3847	6,852	2,60	1,492	1,059
2,65		0,3774	7,665	2,65	1,514	1,092
2,70		0,3704	8,60	2,70	1,535	1,124
2,75		0,3636	9,68	2,75	1,557	1,155
2,80		0,3571	10,92	2,80	1,579	1,187

($\gamma = 1{,}1$)

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	v/v^*	F/F^*	$4\lambda L_m/d$
0,00	1,05	∞	∞	0	∞	∞
0,05	1,0499	20,493	11,9990	0,0512	9,785	357,05
0,10	1,0495	10,244	6,0230	0,1024	4,932	85,65
0,15	1,0488	6,828	4,0420	0,1536	3,332	35,92
0,20	1,0479	5,118	3,0590	0,2047	2,545	18,79
0,25	1,0467	4,092	2,4760	0,2558	2,083	11,03
0,30	1,0453	3,408	2,0940	0,3067	1,784	6,936
0,35	1,0436	2,919	1,8250	0,3575	1,577	4,549
0,40	1,0417	2,552	1,6280	0,4082	1,429	3,062
0,45	1,0395	2,266	1,4800	0,4588	1,319	2,093
0,50	1,0370	2,037	1,3650	0,5092	1,737	1,439
0,55	1,0343	1,849	1,2750	0,5594	1,174	0,9871
0,60	1,0314	1,693	1,2040	0,6094	1,125	0,6705
0,65	1,0283	1,560	1,1480	0,6591	1,0382	0,4468
0,70	1,0249	1,446	1,1040	0,7086	1,0599	0,2887
0,75	1,0213	1,347	1,0689	0,7579	1,0386	0,1780
0,80	1,0174	1,261	1,0425	0,8069	1,0731	0,1019
0,85	1,0133	1,184	1,0731	0,8557	1,0122	0,0516
0,90	1,0091	1,116	1,0100	0,9041	1,0051	0,02078
0,95	1,0047	1,0551	1,0024	0,9522	1,0012	0,00472
1,00	1	1	1	1	1	0
1,05	0,9951	0,9501	1,0073	1,0474	1,0011	0,0040
1,10	0,9901	0,9046	1,0092	1,0945	1,0041	0,0147
1,15	0,9849	0,8630	1,0204	1,1412	1,0087	0,0306
1,20	0,9795	0,8247	1,0360	1,1876	1,0148	0,0505
1,25	0,9739	0,7895	1,0559	1,234	1,0221	0,0735
1,30	0,9632	0,7569	1,0801	1,279	1,0304	0,0989
1,35	0,9623	0,7266	1,109	1,324	1,0397	0,1260
1,40	0,9563	0,6985	1,142	1,369	1,0498	0,1544
1,45	0,9501	0,6722	1,180	1,413	1,0605	0,1838
1,50	0,9438	0,6476	1,223	1,457	1,0717	0,2138
1,55	0,9374	0,6246	1,272	1,501	1,0835	0,2443
1,60	0,9309	0,6030	1,326	1,544	1,0958	0,2749
1,65	0,9242	0,5826	1,387	1,586	1,108	0,3056
1,70	0,9174	0,5634	1,454	1,628	1,121	0,3362
1,75	0,9105	0,5453	1,528	1,670	1,134	0,3667
1,80	0,9036	0,5281	1,610	1,711	1,148	0,3969
1,85	0,8966	0,5118	1,701	1,752	1,161	0,4268
1,90	0,8895	0,4964	1,801	1,792	1,175	0,4563
1,95	0,8823	0,4817	1,911	1,832	1,179	0,4854
2,00	0,8750	0,4677	2,032	1,871	1,203	0,5140
2,05	0,8677	0,4544	2,165	1,910	1,217	0,5422
2,10	0,8603	0,4417	2,312	1,948	1,231	0,5698
2,15	0,8529	0,4295	2,473	1,986	1,245	0,5970
2,20	0,8454	0,4179	2,651	2,023	1,259	0,6237
2,25	0,8379	0,4068	2,846	2,060	1,273	0,6498
2,30	0,8304	0,3962	3,061	2,096	1,286	0,6754
2,35	0,8228	0,3860	3,299	2,132	1,300	0,7005
2,40	0,8152	0,3762	3,560	2,167	1,314	0,7251
2,45	0,8076	0,3668	3,848	2,202	1,328	0,7491
2,50	0,8000	0,3578	4,165	2,236	1,342	0,7726
2,55	0,7924	0,3491	4,515	2,270	1,355	0,7957
2,60	0,7848	0,3407	4,902	2,303	1,369	0,8182
2,65	0,7771	0,3327	5,328	2,363	1,382	0,8402
2,70	0,7695	0,3249	5,799	2,368	1,395	0,8617
2,75	0,7619	0,3174	6,320	2,400	1,409	0,8828
2,80	0,7543	0,3102	6,895	2,432	1,422	0,9034

2,85		0,3509	12,35	2,85	1,6	1,218
2,90		0,3449	14,02	2,90	1,622	1,248
2,95		0,3390	15,95	2,95	1,644	1,279
3		0,3333	18,20	3	1,667	1,308
3,5		0,2857	79,22	3,5	1,893	1,587
4		0,2500	452	4	2,125	1,835
4,5		0,2222	3364	4,5	2,361	2,058
5		0,2000	32500	5	2,6	2,259
6		0,1667	6640000	6	3,083	2,611
7		0,1429	3,8E+09	7	3,571	2,912
8		0,1250	6E+12	8	4,062	3,174
9		0,1111	2,6E+16	9	4,556	3,407
10		0,1000	3,1E+20	10	5,05	3,615
∞		0	∞	∞	∞	∞

2,85	0,7467	0,3032	7,532	2,463	1,434	0,9735
2,90	0,7392	0,2965	8,237	2,493	1,447	0,9432
2,95	0,7316	0,2900	9,016	2,523	1,460	0,9624
3	0,7241	0,2837	9,880	2,553	1,472	0,9812
3,5	0,6512	0,2305	25,830	2,824	1,589	1,1470
4	0,5833	0,1909	71,740	3,055	1,691	1,280
4,5	0,5217	0,1605	205,7	3,25	1,779	1,386
5	0,4667	0,1366	597,3	3,416	1,854	1,472
6	0,3750	0,1021	4911	3,674	1,973	1,601
7	0,3043	0,0788	37919	3,862	2,060	1,689
8	0,2500	0,0625	263000	4	2,125	1,752
9	0,2079	0,05057	1610000	4,104	2,174	1,798
10	0,1750	0,04183	8890000	4,183	2,211	1,832
∞	0	0	∞	4,583	2,4	1,997

(γ = 1,2)

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	v/v^*	F/F^*	$4\lambda L_m/d$
0,00	1,1	∞	∞	0	∞	∞
0,05	1,0997	20,974	11,857	0,05243	9,562	327,09
0,10	1,0989	10,483	5,953	0,1048	4,822	78,36
0,15	1,0975	6,984	3,996	0,1571	3,260	32,81
0,20	1,0956	5,234	3,026	0,2093	2,493	17,13
0,25	1,0932	4,182	2,451	0,2614	2,044	10,04
0,30	1,0902	3,480	2,073	0,3133	1,753	6,298
0,35	1,0867	2,978	1,809	0,3649	1,553	4,121
0,40	1,0827	2,601	1,615	0,4162	1,409	2,768
0,45	1,0782	2,307	1,469	0,4672	1,304	1,887
0,50	1,0732	2,072	1,356	0,5179	1,224	1,294
0,55	1,0677	1,879	1,268	0,5683	1,164	0,8855
0,60	1,0618	1,717	1,199	0,6183	1,118	0,5999
0,65	1,0554	1,581	1,144	0,6678	1,0826	0,3987
0,70	1,0486	1,463	1,100	0,7168	1,0561	0,2570
0,75	1,0414	1,361	1,0666	0,7654	1,0360	0,1579
0,80	1,0338	1,271	1,0410	0,834	1,0214	0,0902
0,85	1,0259	1,192	1,0222	0,8609	1,0112	0,0455
0,90	1,0176	1,121	1,0096	0,9078	1,0047	0,0183
0,95	1,0089	1,0573	1,0023	0,9542	1,0011	0,0041
1,00	1	1	1	1	1	0
1,05	0,9908	0,948	1,0022	1,0451	1,001	0,0035
1,10	0,9813	0,9005	1,0087	1,0896	1,0037	0,0128
1,15	0,9715	0,8571	1,0194	1,134	1,0079	0,0270
1,20	0,9615	0,8172	1,0340	1,177	1,0340	0,0266
1,25	0,9514	0,7803	1,0525	1,219	1,0197	0,0634
1,30	0,9410	0,7462	1,0749	1,261	1,0270	0,0850
1,35	0,9304	0,7145	1,101	1,302	1,0351	0,1080
1,40	0,9197	0,685	1,132	1,342	1,0437	0,1320
1,45	0,9089	0,6575	1,166	1,382	1,0529	0,1567
1,50	0,8980	0,6317	1,205	1,421	1,0625	0,1817
1,55	0,8869	0,6076	1,248	1,459	1,0724	0,2069
1,60	0,8758	0,5849	1,296	1,497	1,0826	0,2323
1,65	0,8646	0,5635	1,349	1,534	1,0930	0,2575
1,70	0,8534	0,5434	1,407	1,570	1,1036	0,2825
1,75	0,8421	0,5244	1,471	1,606	1,114	0,3072
1,80	0,8308	0,5064	1,540	1,641	1,125	0,3316
1,85	0,8195	0,4894	1,615	1,675	1,136	0,3556
1,90	0,8082	0,4732	1,697	1,708	1,147	0,3791
1,95	0,7970	0,4578	1,787	1,741	1,158	0,4021
2,00	0,7857	0,4432	1,884	1,773	1,168	0,4247
2,05	0,7745	0,4293	1,989	1,804	1,179	0,4468
2,10	0,7634	0,4034	2,103	1,835	1,19	0,4684

(γ = 1,3)

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	v/v^*	F/F^*	$4\lambda L_m/d$
0,00	1,15	∞	∞	0	∞	∞
0,05	1,149	21,444	11,721	0,05361	9,354	301,740
0,10	1,148	10,716	5,885	0,1072	4,720	72,200
0,15	1,146	7,137	3,952	0,1606	3,194	30,180
0,20	1,143	5,346	2,994	0,2138	2,445	15,730
0,25	1,139	4,270	2,426	0,2668	2,007	9,201
0,30	1,134	3,551	2,054	0,3195	1,724	5,759
0,35	1,129	3,036	1,793	0,3719	1,530	3,760
0,40	1,123	2,649	1,602	0,4239	1,391	2,520
0,45	1,116	2,348	1,459	0,4754	1,289	1,714
0,50	1,1084	2,106	1,348	0,5264	1,213	1,172
0,55	1,1001	1,907	1,261	0,5769	1,155	0,8004
0,60	1,0911	1,741	1,193	0,6267	1,111	0,5409
0,65	1,0815	1,600	1,140	0,6759	1,0777	0,3586
0,70	1,0713	1,479	1,0972	0,7245	1,0524	0,2305
0,75	1,0605	1,373	1,0644	0,7724	1,0336	0,14131
0,80	1,0493	1,280	1,0395	0,8195	1,0199	0,08044
0,85	1,0376	1,198	1,0214	0,8658	1,0104	0,04053
0,90	1,0254	1,125	1,0092	0,9113	1,0043	0,01623
0,95	1,0129	1,0594	1,0022	0,9561	1,001	0,00367
1,00	1	1	1	1	1	0
1,05	0,9868	0,9461	1,0021	1,043	1,0009	0,00305
1,10	0,9733	0,8969	1,0083	1,0852	1,0033	0,01122
1,15	0,9596	0,8518	1,0183	1,1266	1,0071	0,07324
1,20	0,9457	0,8104	1,0321	1,167	1,012	0,0382
1,25	0,9316	0,7722	1,0495	1,206	1,0177	0,05524
1,30	0,9174	0,7368	1,0704	1,245	1,0241	0,07388
1,35	0,9031	0,7039	1,0948	1,283	1,0312	0,09365
1,40	0,8887	0,6734	1,1227	1,320	1,0388	0,11417
1,45	0,8743	0,6448	1,153	1,356	1,0467	0,13513
1,50	0,8598	0,6182	1,189	1,391	1,0549	0,1564
1,55	0,8454	0,5932	1,228	1,425	1,0634	0,1777
1,60	0,8309	0,5697	1,271	1,458	1,0721	0,1989
1,65	0,8165	0,5477	1,318	1,491	1,0808	0,2200
1,70	0,8022	0,5269	1,369	1,523	1,0897	0,2408
1,75	0,788	0,5073	1,424	1,554	1,0986	0,2613
1,80	0,7739	0,4887	1,484	1,584	1,108	0,2814
1,85	0,7599	0,4712	1,549	1,613	1,116	0,3010
1,90	0,746	0,4546	1,618	1,641	1,125	0,3202
1,95	0,7323	0,4388	1,693	1,669	1,134	0,3390
2,00	0,7188	0,4239	1,773	1,696	1,143	0,3573
2,05	0,7054	0,4097	1,859	1,722	1,151	0,3751
2,10	0,6922	0,3952	1,951	1,747	1,160	0,3924

2,15	0,7523	0,4034	2,226	1,865	1,201	0,4894
2,20	0,7413	0,3913	2,359	1,894	1,211	0,5099
2,25	0,7303	0,3798	2,504	1,923	1,221	0,5299
2,30	0,7194	0,3682	2,660	1,951	1,232	0,5493
2,35	0,7086	0,3582	2,829	1,978	1,242	0,5683
2,40	0,6980	0,3481	3,011	2,005	1,252	0,5868
2,45	0,6874	0,3384	3,208	2,031	1,262	0,6047
2,50	0,6769	0,3291	3,420	2,057	1,272	0,6222
2,55	0,6665	0,3202	3,650	2,082	1,281	0,6392
2,60	0,6563	0,3116	3,898	2,106	1,291	0,6557
2,65	0,6462	0,3033	4,166	2,130	1,300	0,6718
2,70	0,6362	0,2954	4,455	2,154	1,309	0,6874
2,75	0,6263	0,2878	4,767	2,176	1,318	0,7026
2,80	0,6166	0,2804	5,103	2,199	1,327	0,7173
2,85	0,6070	0,2733	5,466	2,220	1,335	0,7316
2,90	0,5975	0,2665	5,858	2,242	1,344	0,7456
2,95	0,5882	0,2600	6,280	2,263	1,352	0,7592
3	0,5789	0,2536	6,735	2,283	1,36	0,7724
3,5	0,4944	0,2009	13,76	2,461	1,434	0,8857
4	0,4231	0,1626	28,35	2,602	1,493	0,9718
4,5	0,3636	0,1340	57,96	2,714	1,541	1,0380
5	0,3143	0,1121	116,31	2,803	1,58	1,0896
6	0,2391	0,0815	434,7	2,934	1,637	1,1630
7	0,1864	0,06168	1458,7	3,023	1,677	1,2120
8	0,1486	0,04819	4353	3,084	1,704	1,2450
9	0,1209	0,03863	13156	3,129	1,724	1,2680
10	0,1	0,03162	29601	3,162	1,739	1,2860
∞	0	0	∞	3,317	1,809	1,3650

2,15	0,6791	0,3833	2,050	1,772	1,163	0,4092
2,20	0,6652	0,371	2,156	1,796	1,176	0,4255
2,25	0,6536	0,3593	2,268	1,819	1,184	0,4413
2,30	0,6412	0,3482	2,388	1,842	1,192	0,4566
2,35	0,629	0,3375	2,517	1,864	1,200	0,4715
2,40	0,617	0,3273	2,654	1,885	1,208	0,4860
2,45	0,6051	0,3175	2,800	1,906	1,215	0,5000
2,50	0,5935	0,3032	2,954	1,926	1,223	0,5136
2,55	0,5822	0,2992	3,119	1,946	1,230	0,5267
2,60	0,5711	0,2906	3,295	1,965	1,237	0,5394
2,65	0,5601	0,2824	3,482	1,983	1,244	0,5517
2,70	0,5493	0,2745	3,681	2,001	1,250	0,5636
2,75	0,5388	0,2669	3,892	2,019	1,257	0,5752
2,80	0,5285	0,2596	4,116	2,036	1,263	0,5864
2,85	0,5184	0,2526	4,354	2,052	1,270	0,5972
2,90	0,5085	0,2459	4,607	2,068	1,276	0,6077
2,95	0,4988	0,2394	4,875	2,084	1,282	0,6179
3	0,4894	0,2332	5,16	2,099	1,288	0,6277
3,5	0,4053	0,1819	9,11	2,228	1,338	0,7110
4	0,3382	0,1454	15,94	2,326	1,378	0,7726
4,5	0,2848	0,1186	27,39	2,402	1,409	0,8189
5	0,2421	0,09841	45,95	2,460	1,433	0,8543
6	0,1797	0,07065	120,1	2,543	1,463	0,9037
7	0,1377	0,05302	285,3	2,598	1,491	0,9355
8	0,1085	0,04117	625,2	2,635	1,507	0,9570
9	0,08745	0,03286	1275	2,662	1,519	0,9722
10	0,07188	0,02769	2438	2,681	1,527	0,9832
∞	0	0	∞	2,769	1,565	1,0326

($\gamma = 1{,}40$)

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	v/v^*	F/F^*	$4\lambda L_m/d$
0,00	1,2	∞	∞	0	∞	∞
0,01	1,2	109,544	57,874	0,01055	45,650	7134,40
0,02	1,1555	54,77	28,942	0,02191	22,834	1778,45
0,03	1,1998	36,511	19,300	0,03286	15,232	787,08
0,04	1,1996	27,382	14,482	0,04381	11,435	440,35
0,05	1,1994	21,903	11,591	0,05476	9,1584	280,02
0,06	1,1991	18,251	9,6659	0,06570	7,6428	193,03
0,07	1,1988	15,642	8,2915	0,07664	6,562	140,66
0,08	1,1985	13,684	7,2616	0,08758	5,7529	106,72
0,09	1,1981	12,162	6,4614	0,09851	5,1249	83,496
0,10	1,1976	10,943	5,8218	0,10943	4,6236	66,922
0,11	1,1971	9,9465	5,2992	0,12035	4,2146	54,688
0,12	1,1966	9,1156	4,8643	0,13126	3,8747	45,408
0,13	1,1960	8,4123	4,4968	0,14216	3,588	38,207
0,14	1,1953	7,8093	4,1824	0,15306	3,3432	32,511
0,15	1,1946	7,2866	3,9103	0,16395	3,1317	27,932
0,16	1,1939	6,8291	3,6727	0,17482	2,9474	24,198
0,17	1,1931	6,4252	3,4635	0,18568	2,7555	21,115
0,18	1,1923	6,0662	3,2779	0,19654	2,6422	18,543
0,19	1,1914	5,7448	3,1123	0,20739	2,5146	16,375
0,20	1,1905	5,4555	2,9635	0,21822	2,4004	14,533
0,21	1,1895	5,1936	2,8293	0,22904	2,2976	12,956
0,22	1,1885	4,9554	2,7076	0,23984	2,2046	11,596
0,23	1,1874	4,7378	2,5563	0,25063	2,1203	10,416
0,24	1,1863	4,5383	2,4556	0,26141	2,0434	9,3865
0,25	1,1852	4,3546	2,4027	0,27217	1,9732	8,4834
0,26	1,1840	4,1850	2,3173	0,28291	1,9088	7,6876
0,27	1,1828	4,0280	2,2385	0,29364	1,8496	6,9832

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	v/v^*	F/F^*	$4\lambda L_m/d$
1,50	0,8276	0,6065	1,1762	1,3646	1,04870	0,13605
1,51	0,8242	0,6012	1,1830	1,3708	1,05016	0,13970
1,52	0,8208	0,5960	1,1899	1,3770	1,05162	0,14335
1,53	0,8173	0,5904	1,1970	1,3832	1,05309	0,14699
1,54	0,8139	0,5858	1,2043	1,3894	1,05456	0,15063
1,55	0,8105	0,5808	1,2116	1,3955	1,05604	0,15427
1,56	0,8072	0,5759	1,2190	1,4015	1,05752	0,15790
1,57	0,8038	0,5710	1,2266	1,4075	1,05900	0,16152
1,58	0,8004	0,5662	1,2343	1,4135	1,06049	0,16514
1,59	0,7970	0,5615	1,2422	1,4195	1,06198	0,16376
1,60	0,7937	0,5568	1,2502	1,4254	1,06348	0,17236
1,61	0,7903	0,5522	1,2583	1,4313	1,06498	0,17595
1,62	0,7870	0,5476	1,2666	1,4371	1,06648	0,17953
1,63	0,7836	0,5430	1,2750	1,4429	1,06798	0,18311
1,64	0,7803	0,5386	1,2835	1,4487	1,06948	0,18667
1,65	0,7770	0,5342	1,2922	1,4544	1,07098	0,19022
1,66	0,7736	0,5299	1,3010	1,4601	1,07249	0,19376
1,67	0,7703	0,5256	1,3099	1,4657	1,07399	0,19729
1,68	0,7670	0,5213	1,3190	1,4713	1,07550	0,20031
1,69	0,7637	0,5171	1,3282	1,4769	1,07701	0,20431
1,70	0,7605	0,5130	1,3376	1,4825	1,07851	0,20780
1,71	0,7572	0,5039	1,3471	1,4830	1,08002	0,21128
1,72	0,7539	0,5048	1,3567	1,4935	1,08152	0,21474
1,73	0,7507	0,5008	1,3665	1,4989	1,08302	0,21819
1,74	0,7474	0,4969	1,3764	1,5043	1,08453	0,22162
1,75	0,7442	0,4930	1,3865	1,5097	1,08603	0,22504
1,76	0,7410	0,4891	1,3967	1,5150	1,03753	0,22844
1,77	0,7377	0,4853	1,4070	1,5203	1,08903	0,23183

0,28	1,1815	3,8820	2,1656	0,30435	1,795	6,3572
0,29	1,1802	3,7460	2,0979	0,31504	1,7446	5,7989
0,30	1,1788	3,6190	2,0351	0,32572	1,6979	5,2992
0,31	1,1774	3,5002	1,9765	0,33637	1,6546	4,8507
0,32	1,1759	3,3888	1,9219	0,34700	1,6144	4,4469
0,33	1,1744	3,2840	1,8708	0,35762	1,5769	4,0821
0,34	1,1729	3,1853	1,8229	0,36822	1,542	3,7520
0,35	1,1713	3,0922	1,7780	0,37880	1,5094	3,4525
0,36	1,1697	3,0042	1,7358	0,35535	1,4789	3,1801
0,37	1,1680	2,9209	1,6961	0,39988	1,4503	2,9320
0,38	1,1663	2,8420	1,6587	0,41039	1,4236	2,7055
0,39	1,1646	2,7671	1,6234	0,42037	1,3985	2,4983
0,40	1,1628	2,6958	1,5901	0,43133	1,3749	2,3085
0,41	1,1610	2,6280	1,5587	0,44177	1,3527	2,1344
0,42	1,1591	2,5634	1,5289	0,45218	1,3318	1,9744
0,43	1,1572	2,5017	1,5007	0,46257	1,3122	1,8272
0,44	1,1553	2,4428	1,4739	0,47293	1,2937	1,8272
0,45	1,1533	2,3865	1,4486	0,48326	1,2763	1,5664
0,46	1,1512	2,3326	1,4246	0,49357	1,2598	1,4509
0,47	1,1492	2,2809	1,4018	0,50385	1,2443	1,3442
0,48	1,1471	2,2314	1,3801	0,51410	1,2296	1,2453
0,49	1,1450	2,1838	1,3595	0,52433	1,2158	1,1539
0,50	1,1429	2,1381	1,3399	0,53453	1,2027	1,06908
0,51	1,1407	2,0942	1,3212	0,54469	1,1903	0,99042
0,52	1,1384	2,0519	1,3034	0,55482	1,1786	0,91741
0,53	1,1362	2,0112	1,2864	0,56493	1,1675	0,84963
0,54	1,1339	1,9719	1,2702	0,57501	1,1571	0,78662
0,55	1,1315	1,9341	1,2549	0,58506	1,1472	0,72805
0,56	1,1292	1,8976	1,2403	0,59507	1,1378	0,67357
0,57	1,1268	1,8623	1,2263	0,60505	1,1289	0,62286
0,58	1,1244	1,8282	1,213	0,61500	1,1205	0,57568
0,59	1,1219	1,7952	1,2003	0,62492	1,1126	0,53174
0,60	1,1194	1,7634	1,1882	0,63481	1,10504	0,49081
0,61	1,1169	1,7325	1,1766	0,64467	1,09793	0,45270
0,62	1,1144	1,7026	1,1656	0,65449	1,09120	0,41720
0,63	1,1118	1,6737	1,1551	0,66427	1,08485	0,38411
0,64	1,1091	1,6456	1,1451	0,67402	1,07883	0,35330
0,65	1,1065	1,6183	1,1356	0,68374	1,07314	0,32460
0,66	1,10383	1,5919	1,1265	0,69342	1,06777	0,29785
0,67	1,10114	1,5662	1,1179	0,70306	1,06271	0,27295
0,68	1,09842	1,5413	1,1097	0,71267	1,05792	0,24978
0,69	1,09567	1,5170	1,1018	0,72226	1,05340	0,22821
0,70	1,09290	1,4934	1,09436	0,73179	1,04915	0,20814
0,71	1,09010	1,4705	1,03729	0,74129	1,04514	0,18949
0,72	1,08727	1,4482	1,08057	0,75076	1,04137	0,17215
0,73	1,08442	1,4265	1,07419	0,76019	1,03783	0,15606
0,74	1,08155	1,4054	1,06815	0,76958	1,03450	0,14113
0,75	1,07865	1,3848	1,06242	0,77893	1,03137	0,12728
0,76	1,07573	1,3647	1,05700	0,78825	1,02844	0,11446
0,77	1,07279	1,3451	1,05188	0,78753	1,02570	0,10262
0,78	1,06982	1,3260	1,04705	0,80677	1,07314	0,09167
0,79	1,06684	1,3074	1,04250	0,81598	1,02075	0,08159
0,80	1,06383	1,2892	1,03823	0,82514	1,01853	0,07229
0,81	1,06080	1,2715	1,03422	0,83426	1,01646	0,06375
0,82	1,05775	1,2542	1,03047	0,84334	1,01455	0,05593
0,83	1,05468	1,2373	1,02696	0,85239	1,01278	0,04878
0,84	1,05160	1,2208	1,07370	0,86140	1,01115	0,04226
0,85	1,04849	1,2047	1,02067	0,87037	1,00966	0,03632
0,86	1,04537	1,1889	1,01787	0,87929	1,00829	0,03097
0,87	1,04223	1,1735	1,01529	0,88818	1,00704	0,02613
0,88	1,03909	1,1584	1,01294	0,89703	1,00591	0,02180
0,89	1,03589	1,1436	1,01080	0,90583	1,00490	0,01793

1,78	0,7345	0,4815	1,4175	1,5256	1,09053	0,73520
1,79	0,7313	0,4778	1,4282	1,5308	1,09202	0,73855
1,80	0,7282	0,4741	1,4390	1,5360	1,09352	0,24189
1,81	0,7250	0,4704	1,4499	1,5412	1,09500	0,24521
1,82	0,7218	0,4668	1,4610	1,5463	1,09649	0,24851
1,83	0,7187	0,4632	1,4723	1,5514	1,09798	0,25180
1,84	0,7155	0,4597	1,4837	1,5564	1,09946	0,25507
1,85	0,7124	0,4562	1,4952	1,5614	1,10090	0,25832
1,86	0,7174	0,4528	1,5069	1,5664	1,10240	0,26156
1,87	0,7061	0,4494	1,5188	1,5714	1,10390	0,26478
1,88	0,7030	0,4460	1,5308	1,5763	1,10540	0,26798
1,89	0,7000	0,4427	1,5429	1,5812	1,10680	0,27116
1,90	0,6969	0,4394	1,5552	1,5861	1,10830	0,27433
1,91	0,6938	0,4361	1,5677	1,5909	1,10970	0,27748
1,92	0,6907	0,4324	1,5804	1,5957	1,11120	0,28061
1,93	0,6877	0,4297	1,5932	1,6005	1,11260	0,28372
1,94	0,6847	0,4265	1,6062	1,6052	1,11410	0,28681
1,95	0,6816	0,4234	1,6193	1,6099	1,11550	0,28989
1,96	0,6786	0,4703	1,6326	1,6146	1,11700	0,29295
1,97	0,6756	0,4172	1,6461	1,6193	1,11840	0,29599
1,98	0,6726	0,4142	1,6597	1,6239	1,11980	0,29901
1,99	0,6696	0,4112	1,6735	1,6284	1,12130	0,30201
2,00	0,6667	0,4083	1,6875	1,6330	1,12270	0,30499
2,01	0,6637	0,4053	1,7017	1,6375	1,12410	0,30796
2,02	0,6608	0,4024	1,7160	1,6420	1,12550	0,31091
2,03	0,6578	0,3995	1,7305	1,6465	1,12690	0,31384
2,04	0,6549	0,3967	1,7452	1,6509	1,12830	0,31675
2,05	0,6520	0,3939	1,7600	1,6553	1,12970	0,31965
2,06	0,6491	0,3911	1,7750	1,6597	1,13110	0,32253
2,07	0,6462	0,3883	1,7902	1,6640	1,13250	0,32538
2,08	0,6433	0,3856	1,8056	1,6683	1,13390	0,32322
2,09	0,6405	0,3829	1,8212	1,6726	1,13520	0,33104
2,10	0,6376	0,3802	1,8369	1,6769	1,13660	0,33385
2,11	0,6348	0,3776	1,8528	1,6811	1,13800	0,33664
2,12	0,6320	0,3750	1,8690	1,6853	1,13930	0,33940
2,13	0,6291	0,3724	1,8853	1,6895	1,14070	0,34215
2,14	0,6263	0,3698	1,9018	1,6936	1,14200	0,34488
2,15	0,6235	0,3673	1,9185	1,6977	1,14340	0,34760
2,16	0,6208	0,3648	1,9354	1,7018	1,14470	0,35030
2,17	0,6180	0,3623	1,9525	1,7059	1,14600	0,35298
2,18	0,6152	0,3598	1,9698	1,7099	1,14740	0,35564
2,19	0,6125	0,3574	1,9873	1,7139	1,14870	0,35823
2,20	0,6098	0,3549	2,0050	1,7179	1,15000	0,36091
2,21	0,6070	0,3525	2,0228	1,7219	1,15130	0,36352
2,22	0,6043	0,3502	2,0409	1,7258	1,15160	0,36352
2,23	0,6016	0,3478	2,0592	1,7297	1,15390	0,36868
2,24	0,5990	0,3455	2,0777	1,7336	1,15520	0,37124
2,25	0,5963	0,3432	2,0964	1,7374	1,1565	0,37378
2,26	0,5936	0,3409	2,1154	1,7412	1,1578	0,37630
2,27	0,5910	0,3387	2,1345	1,7450	1,1590	0,37881
2,28	0,5883	0,3364	2,1538	1,7488	1,1603	0,38130
2,29	0,5857	0,3342	2,1733	1,7526	1,1616	0,38377
3,30	0,5831	0,3320	2,1931	1,7563	1,1629	0,38623
2,31	0,5805	0,3296	2,2131	1,7600	1,1641	0,38867
2,32	0,5779	0,3277	2,2333	1,7637	1,1653	0,39109
2,33	0,5753	0,3255	2,2537	1,7673	1,1666	0,39350
2,34	0,5728	0,3234	2,2744	1,7709	1,1678	0,39589
2,35	0,5702	0,3213	2,2953	1,7745	1,1690	0,39826
2,36	0,5677	0,3193	2,3164	1,7781	1,1703	0,40062
2,37	0,5651	0,3172	2,3377	1,7817	1,1715	0,40296
2,38	0,5626	0,3152	2,3593	1,7852	1,1727	0,40523
2,39	0,5601	0,3313	2,3811	1,7887	1,1739	0,40760

0,90	1,03270	1,12913	1,00387	0,91459	1,00399	0,01451
0,91	1,02950	1,11500	1,00714	0,92332	1,00318	0,01152
0,92	1,02627	1,10114	1,00560	0,93701	1,00248	0,00892
0,93	1,02304	1,08758	1,00426	0,94065	1,00188	0,00669
0,94	1,01978	1,07430	1,00311	0,94925	1,00136	0,00482
0,95	1,01652	1,06129	1,00215	0,95782	1,00093	0,00323
0,96	1,01324	1,04854	1,00137	0,96634	1,00059	0,00206
0,97	1,00995	1,03605	1,00076	0,97481	1,00033	0,00114
0,98	1,00664	1,02379	1,00033	0,98324	1,00014	0,00049
0,99	1,00333	1,01178	1,00008	0,99164	1,00003	0,00012
1,00	1	1	1	1	1	0
1,01	0,99666	0,98844	1,00008	1,00331	1,00003	0,00011
1,02	0,99331	0,97771	1,00033	1,01658	1,00013	0,00046
1,03	0,98995	0,96598	1,00073	1,02481	1,00030	0,00101
1,04	0,98658	0,95506	1,00130	1,03300	1,00053	0,00177
1,05	0,98320	0,94435	1,00203	1,04115	1,00082	0,00271
1,06	0,97982	0,93383	1,00291	1,04925	1,00116	0,00384
1,07	0,97642	0,92350	1,00394	1,05731	1,00155	0,00513
1,08	0,97302	0,91335	1,00512	1,06533	1,00200	0,00658
1,09	0,96960	0,90338	1,00645	1,07331	1,00250	0,00819
1,10	0,96518	0,89359	1,00793	1,08124	1,00305	0,00993
1,11	0,96276	0,88397	1,00955	1,08913	1,00365	0,01181
1,12	0,95933	0,87451	1,01131	1,09698	1,00429	0,01382
1,13	0,95589	0,86522	1,01322	1,10479	1,00497	0,01595
1,14	0,95244	0,85608	1,01527	1,11256	1,00569	0,01887
1,15	0,94899	0,84710	1,01746	1,1203	1,00645	0,02053
1,16	0,94554	0,83827	1,01978	1,1280	1,00726	0,02298
1,17	0,94208	0,82958	1,02224	1,1356	1,00310	0,02552
1,18	0,93862	0,82104	1,02484	1,1432	1,00397	0,02814
1,19	0,93515	0,81263	1,02757	1,1508	1,00988	0,03085
1,20	0,93163	0,80436	1,03044	1,1583	1,01082	0,03364
1,21	0,92820	0,79623	1,03344	1,1658	1,01178	0,03650
1,22	0,92473	0,78822	1,03657	1,1732	1,01278	0,03942
1,23	0,92125	0,78034	1,03983	1,1806	1,01381	0,04241
1,24	0,91777	0,77258	1,04323	1,1879	1,01486	0,04547
1,25	0,91429	0,76495	1,04676	1,1952	1,01594	0,04858
1,26	0,91080	0,75743	1,05041	1,2025	1,01705	0,05174
1,27	0,90732	0,75003	1,05419	1,2097	1,01818	0,05494
1,28	0,90383	0,74274	1,05809	1,2169	1,01933	0,05820
1,29	0,90035	0,73556	1,06213	1,2240	1,02050	0,06150
1,30	0,89686	0,72848	1,06630	1,2311	1,02169	0,06483
1,31	0,89338	0,72152	1,07060	1,2382	1,02291	0,06320
1,32	0,88989	0,71465	1,07502	1,2452	1,02415	0,07161
1,33	0,88641	0,70789	1,07957	1,2522	1,02540	0,07504
1,34	0,88292	0,70123	1,08424	1,2591	1,02666	0,07850
1,35	0,87944	0,69466	1,08904	1,2660	1,02794	0,08199
1,38	0,87596	0,68818	1,09397	1,2729	1,02924	0,08550
1,37	0,87249	0,68180	1,09902	1,2797	1,03056	0,08904
1,38	0,86901	0,67551	1,1041	1,2864	1,03189	0,09259
1,39	0,86554	0,66931	1,1098	1,2932	1,03323	0,09616
1,40	0,86207	0,66320	1,1149	1,2999	1,03458	0,09974
1,41	0,85860	0,65717	1,1205	1,3065	1,03595	0,10333
1,42	0,85514	0,65122	1,1262	1,3131	1,03733	0,10694
1,43	0,85163	0,64536	1,1320	1,3197	1,03872	0,11056
1,44	0,84822	0,63958	1,1379	1,3262	1,04012	0,11419
1,45	0,84477	0,63387	1,1440	1,3327	1,04153	0,11782
1,46	0,84133	0,62824	1,1502	1,3392	1,04295	0,12146
1,47	0,83788	0,62269	1,1565	1,3456	1,04438	0,12510
1,48	0,83445	0,61722	1,1629	1,3520	1,04581	0,12875
1,49	0,83101	0,61181	1,1695	1,3583	1,04725	0,13240

2,40	0,5576	0,3111	2,4031	1,7922	1,1751	0,40989
2,41	0,5551	0,3092	2,4254	1,7956	1,1763	0,40939
2,42	0,5527	0,3072	2,4479	1,7991	1,1775	0,41442
2,43	0,5502	0,3053	2,4706	1,8025	1,1786	0,41667
2,44	0,5478	0,3033	2,4936	1,8059	1,1798	0,41891
2,45	0,5453	0,3014	2,5163	1,8092	1,1810	0,42113
2,46	0,5429	0,2995	2,5403	1,8126	1,1821	0,42333
2,47	0,5405	0,2977	2,5640	1,8159	1,1833	0,42551
2,48	0,5381	0,2958	2,5880	1,8192	1,1844	0,42768
2,49	0,5357	0,2940	2,6122	1,8225	1,1856	0,42983
2,50	0,5333	0,2921	2,6367	1,8257	1,1867	0,43197
2,51	0,5310	0,2903	2,6615	1,8290	1,1879	0,43410
2,52	0,5286	0,2885	2,6865	1,8322	1,1890	0,43631
2,53	0,5263	0,2867	2,7117	1,8354	1,1910	0,43831
2,54	0,5239	0,2850	2,7372	1,8386	1,1912	0,44040
2,55	0,5216	0,2832	2,7630	1,8417	1,1973	0,44247
2,56	0,5193	0,2815	2,7891	1,8448	1,1934	0,44452
2,57	0,5170	0,2798	2,8154	1,8479	1,1945	0,44655
2,58	0,5147	0,2781	2,6420	1,8510	1,1956	0,44857
2,59	0,5125	0,2764	2,8689	1,8541	1,1967	0,45059
2,60	0,5102	0,2747	2,8960	1,8571	1,1978	0,45259
2,61	0,5080	0,2731	2,9234	1,8602	1,1989	0,45457
2,62	0,5057	0,2714	2,9511	1,8632	1,2000	0,45654
2,63	0,5035	0,2698	2,9791	1,8662	1,2011	0,45850
2,64	0,5013	0,2682	3,0074	1,8691	1,2021	0,46044
2,65	0,4991	0,2666	3,0359	1,8721	1,2031	0,46237
2,66	0,4969	0,2650	3,0647	1,8750	1,2052	0,46619
2,68	0,4925	0,2617	3,1234	1,8808	1,2062	0,46807
2,69	0,4904	0,2603	3,1530	1,8837	1,2073	0,46996
2,70	0,4882	0,2588	3,1830	1,8865	1,2083	0,47182
2,71	0,4861	0,2573	3,2133	1,8894	1,2093	0,47367
2,72	0,4839	0,2558	3,2440	1,8922	1,2103	0,47551
2,73	0,4818	0,2543	3,2749	1,8950	1,2113	0,47734
2,74	0,4797	0,2528	3,3061	1,8978	1,2123	0,47915
2,75	0,4776	0,2513	3,3376	1,9005	1,2133	0,48095
2,76	0,4755	0,2499	3,3695	1,9032	1,2143	0,48274
2,77	0,4735	0,2484	3,4017	1,9060	1,2153	0,48452
2,78	0,4714	0,2470	3,4342	1,9087	1,2163	0,48628
2,79	0,4693	0,2456	3,4670	1,9114	1,2173	0,48803
2,80	0,4673	0,2441	3,5001	1,9140	1,2182	0,48976
2,81	0,4653	0,2427	3,5336	1,9167	1,2192	0,49148
2,82	0,4632	0,2414	3,5674	1,9193	1,2202	0,49321
2,84	0,4592	0,2386	3,6359	1,9246	1,2221	0,49660
2,86	0,4553	0,2359	3,7058	1,9297	1,2240	0,49995
2,88	0,4513	0,2333	3,7771	1,9348	1,2258	0,50326
2,90	0,4474	0,2307	3,8498	1,9398	1,2277	0,50651
2,92	0,4436	0,2281	3,9738	1,9448	1,2295	0,50973
2,94	0,4398	0,2256	3,9993	1,9497	1,2313	0,51291
2,96	0,4360	0,2231	4,0763	1,9545	1,2331	0,51603
2,98	0,4323	0,2206	4,1547	1,9592	1,2348	0,51912
3	0,4286	0,2182	4,2346	1,9640	1,2366	0,52216
3,5	0,3478	0,1685	6,7896	2,0642	1,2743	0,58643
4	0,2857	0,1336	10,719	2,1381	1,3029	0,63306
5	0,2000	0,0894	25,00	2,2361	1,3416	0,69381
6	0,1463	0,0638	53,18	2,2953	1,3655	0,72987
7	0,1111	0,0476	104,14	2,3333	1,3810	0,75281
8	0,0870	0,0369	190,11	2,3591	1,3915	0,76820
9	0,0698	0,0294	327,19	2,3772	1,3989	0,77898
10	0,0571	0,0239	535,94	2,3905	1,4044	0,78683
∞	0	0	∞	2,4495	1,4289	0,82153

($\gamma = 1{,}67$)

M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	v/v^*	F/F^*	$4\lambda L_m/d$	M	T/T^*	p/p^*	p_0/p_0^*	v/v^*	F/F^*	$4\lambda L_m/d$
0,00	1,335	∞	∞	0	∞	∞	1,80	0,6402	0,4445	1,351	1,440	1,0673	0,1692
0,05	1,334	23,099	11,265	0,05775	8,687	234,36	1,85	0,6219	0,4263	1,392	1,459	1,0722	0,1800
0,10	1,331	11,535	5,661	0,1154	4,392	55,53	1,90	0,6042	0,4091	1,436	1,477	1,0770	0,1905
0,15	1,325	7,674	3,505	0,1727	2,982	23,21	1,95	0,5871	0,3929	1,482	1,494	1,0817	0,2007
0,20	1,317	5,735	2,887	0,2296	2,293	12,11	2,00	0,5705	0,3776	1,530	1,510	1,0863	0,2105
0,25	1,303	4,574	2,344	0,2555	1,892	6,98	2,05	0,5544	0,3632	1,580	1,526	1,0908	0,2199
0,30	1,296	3,755	1,989	0,3415	1,635	4,337	2,10	0,5388	0,3496	1,632	1,541	1,0952	0,2290
0,35	1,282	3,235	1,741	0,3963	1,460	2,810	2,15	0,5238	0,3367	1,687	1,556	1,0994	0,2377
0,40	1,267	2,814	1,560	0,4502	1,336	1,868	2,20	0,5093	0,3244	1,744	1,570	1,1035	0,2461
0,45	1,250	2,455	1,424	0,5031	1,245	1,260	2,25	0,4952	0,3128	1,803	1,583	1,107	0,2542
0,50	1,232	2,220	1,320	0,5549	1,178	0,8545	2,30	0,4816	0,3017	1,865	1,596	1,111	0,2620
0,55	1,212	2,002	1,239	0,6056	1,128	0,5757	2,35	0,4684	0,2912	1,929	1,608	1,115	0,2694
0,60	1,151	1,819	1,176	0,6545	1,0909	0,3877	2,40	0,4557	0,2813	1,995	1,620	1,119	0,2766
0,65	1,169	1,664	1,126	0,7029	1,0628	0,2545	2,45	0,4434	0,2718	2,064	1,631	1,122	0,2835
0,70	1,146	1,530	1,0874	0,7496	1,0418	0,1625	2,50	0,4315	0,2628	2,135	1,642	1,126	0,2901
0,75	1,1233	1,413	1,0576	0,7949	1,0265	0,0987	2,55	0,4200	0,2542	2,209	1,653	1,129	0,2965
0,80	1,0993	1,311	1,0351	0,8388	1,0155	0,05576	2,60	0,4089	0,2460	2,285	1,663	1,132	0,3026
0,85	1,0748	1,220	1,0189	0,8812	1,0080	0,02780	2,65	0,3982	0,2381	2,364	1,672	1,135	0,3085
0,90	1,0501	1,139	1,0081	0,9222	1,0033	0,01106	2,70	0,3878	0,2306	2,445	1,682	1,138	0,3141
0,95	1,0251	1,0657	1,0019	0,9618	1,0008	0,00248	2,75	0,3778	0,2235	2,529	1,691	1,141	0,3196
1,00	1	1	1	1	1	0	2,80	0,3681	0,2167	2,616	1,699	1,144	0,3248
1,05	0,9749	0,9404	1,0018	1,0368	1,0006	0,00203	2,85	0,3587	0,2102	2,705	1,707	1,146	0,3299
1,10	0,9499	0,8860	1,0070	1,0721	1,0024	0,00740	2,90	0,3497	0,2039	2,797	1,715	1,149	0,3348
1,15	0,9251	0,8364	1,0154	1,1061	1,0051	0,01522	2,95	0,3410	0,1979	2,892	1,723	1,152	0,3395
1,20	0,9006	0,7908	1,0266	1,1388	1,0084	0,02481	3	0,3325	0,1922	2,990	1,730	1,154	0,3440
1,25	0,8763	0,7489	1,0406	1,170	1,0124	0,03564	3,5	0,2616	0,1461	4,134	1,790	1,174	0,3810
1,30	0,8524	0,7100	1,0573	1,200	1,0167	0,04733	4	0,2099	0,1145	5,608	1,833	1,189	0,4071
1,35	0,8289	0,6744	1,0765	1,229	1,0213	0,05957	4,5	0,1715	0,0920	7,456	1,864	1,200	0,4261
1,40	0,8059	0,6412	1,0981	1,257	1,0262	0,07212	5	0,1424	0,0755	9,721	1,887	1,208	0,4402
1,45	0,7833	0,6104	1,122	1,284	1,0313	0,08481	6	0,1022	0,0533	15,68	1,918	1,220	0,4594
1,50	0,7612	0,5817	1,148	1,309	1,0364	0,09749	7	0,0767	0,0396	23,85	1,938	1,227	0,4714
1,55	0,7397	0,5545	1,176	1,333	1,0416	0,11010	8	0,0595	0,0305	34,58	1,951	1,232	0,4793
1,60	0,7187	0,5255	1,207	1,356	1,0468	0,12250	9	0,0475	0,0242	48,24	1,960	1,735	0,4849
1,65	0,6982	0,5054	1,240	1,378	1,0520	0,13460	10	0,0387	0,0200	65,18	1,967	1,238	0,4889
1,70	0,6783	0,4845	1,275	1,400	1,0572	0,14650	∞	0	0	∞	1,996	1,249	0,5064
1,76	0,6590	0,4639	1,312	1,421	1,0623	0,15800							

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)} \quad ; \quad \frac{F}{F^*} = \frac{1}{M}\,\frac{1+\gamma M^2}{\sqrt{2\,(\gamma+1)\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}} \quad ; \quad M^* = \frac{V}{V^*} = M\,\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}}$$

$$\frac{p}{p_0} = (1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad ; \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\,\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}} \quad ; \quad \frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\,(\frac{2\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{\gamma+1})^{\frac{\gamma+1}{2\,(\gamma-1)}}$$

$$\frac{4\,\lambda\,L_{máx}}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma\,M^2} + \frac{\gamma+1}{2\,\gamma}\,ln\,\frac{(1+\gamma)\,M^2}{2\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}$$

FUNCIONES PARA EL FLUJO ISENTROPICO COMPRESIBLE UNIDIMENSIONAL ($\gamma = 1{,}40$)

M	M^*	A/A^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	F/F^*
0	0	∞	1	1	1	∞
0,01	0,01096	57,8740	0,99993	0,99995	0,99998	45,6500
0,02	0,02191	28,9420	0,99972	0,99980	0,99992	22,8340
0,03	0,03286	19,3000	0,99937	0,99955	0,99982	15,2320
0,04	0,04381	14,4820	0,98880	0,99920	0,99968	11,4350
0,05	0,05476	11,5920	0,99825	0,99875	0,99950	9,1584
0,06	0,06570	9,6659	0,99748	0,99820	0,99928	7,6420
0,07	0,07664	8,2915	0,99658	0,99755	0,99902	6,5620
0,08	0,08758	7,2616	0,99553	0,99800	0,99872	5,7520
0,09	0,09851	6,4613	0,99435	0,99596	0,99838	5,1240
0,10	0,10943	5,8218	0,99303	0,99502	0,99800	4,6236
0,11	0,12035	5,2992	0,99157	0,99398	0,99758	4,2146
0,12	0,13126	4,8643	0,98998	0,99284	0,99714	3,8740
0,13	0,14216	4,4968	0,98826	0,99160	0,99664	3,5881
0,14	0,15306	4,1824	0,98640	0,99027	0,99610	3,3430
0,15	0,16395	3,9103	0,98441	0,98884	0,99552	3,1310
0,16	0,17483	3,6727	0,98228	0,98731	0,99490	2,9474
0,17	0,18569	3,4635	0,98003	0,98569	0,99425	2,7855
0,18	0,19654	3,2779	0,97765	0,98398	0,99356	2,6420
0,19	0,20738	3,1122	0,97514	0,98217	0,99283	2,5141
0,20	0,21822	2,9635	0,97250	0,98027	0,99206	2,4004
0,21	0,22904	2,8293	0,96973	0,97828	0,99125	2,2976
0,22	0,23984	2,7076	0,96685	0,97621	0,99041	2,2046
0,23	0,25063	2,5968	0,96383	0,97403	0,98953	2,1203
0,24	0,26141	2,4956	0,96070	0,97177	0,98861	2,0434
0,25	0,27216	2,4027	0,95745	0,96942	0,98765	1,9732
0,26	0,28291	2,3173	0,95408	0,96699	0,98666	1,9088
0,27	0,29364	2,2385	0,95060	0,96446	0,98563	1,8456
0,28	0,30435	2,1656	0,94700	0,96185	0,98456	1,7950
0,29	0,31504	2,0979	0,94329	0,95916	0,98346	1,7446
0,30	0,32572	2,0351	0,93947	0,95638	0,98232	1,6979
0,31	0,33638	1,9765	0,93554	0,95352	0,98114	1,6546
0,32	0,34701	1,9218	0,93150	0,95058	0,97993	1,6144
0,33	0,35762	1,8707	0,92736	0,94756	0,97868	1,5769
0,34	0,36821	1,8229	0,92312	0,94446	0,97740	1,5420
0,35	0,37879	1,7780	0,91877	0,94128	0,97608	1,5094
0,36	0,38935	1,7358	0,91433	0,93803	0,97473	1,4789
0,37	0,39988	1,6661	0,90979	0,93470	0,97335	1,4503
0,38	0,41039	1,6587	0,90516	0,93129	0,97193	1,4236
0,39	0,42087	1,6234	0,90044	0,92782	0,97048	1,3985
0,40	0,43133	1,5901	0,89562	0,92428	0,96899	1,3749
0,41	0,44177	1,5587	0,89071	0,92066	0,96747	1,3527
0,42	0,45218	1,5289	0,88572	0,91697	0,96592	1,3318
0,43	0,46256	1,5007	0,88065	0,91322	0,96434	1,3122
0,44	0,47292	1,4740	0,87550	0,90940	0,96272	1,2937
0,45	0,48326	1,4487	0,87027	0,90552	0,96108	1,2763
0,46	0,49357	1,4246	0,86496	0,90157	0,95940	1,2598
0,47	0,50385	1,4018	0,85958	0,89756	0,95769	1,2443
0,48	0,51410	1,3801	0,85413	0,89349	0,95595	1,2296
0,49	0,52432	1,3594	0,84861	0,88936	0,95418	1,2158
0,50	0,53452	1,3398	0,84302	0,88517	0,95238	1,2027
0,51	0,54469	1,3212	0,83737	0,88092	0,95055	1,1903
0,52	0,55482	1,3034	0,83166	0,87662	0,94869	1,1786
0,53	0,56493	1,2864	0,82589	0,87227	0,94681	1,1675
0,54	0,57501	1,2703	0,82005	0,86788	0,94489	1,1571
0,55	0,58506	1,2550	0,81416	0,86342	0,94295	1,1472
0,56	0,59508	1,2403	0,80822	0,85892	0,94098	1,1378
0,57	0,60506	1,2263	0,80224	0,85437	0,93898	1,1289

M	M^*	A/A^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	F/F^*
1,64	1,44870	1,2835	0,22168	0,34093	0,65023	1,0694
1,65	1,45440	1,2922	0,21839	0,33731	0,64746	1,0710
1,66	1,46010	1,3010	0,21515	0,33372	0,64470	1,0725
1,67	1,46570	1,3039	0,21195	0,33016	0,64194	1,0740
1,68	1,47130	1,3190	0,20879	0,32664	0,63919	1,0755
1,69	1,47690	1,3282	0,20567	0,32315	0,63645	1,0770
1,70	1,48250	1,3376	0,20259	0,31969	0,63372	1,0785
1,71	1,48800	1,3471	0,19955	0,31626	0,63099	1,0800
1,72	1,49350	1,3567	0,19656	0,31286	0,62827	1,0815
1,73	1,49890	1,3665	0,19361	0,30950	0,62556	1,0830
1,74	1,50430	1,3764	0,19070	0,30617	0,62286	1,0845
1,75	1,50370	1,3865	0,18782	0,30287	0,62016	1,0860
1,76	1,51500	1,3967	0,18499	0,29959	0,61747	1,0875
1,77	1,52030	1,4071	0,15220	0,29635	0,61479	1,0890
1,78	1,52560	1,4176	0,17944	0,29314	0,61211	1,0905
1,79	1,53080	1,4282	0,17672	0,28697	0,60945	1,0920
1,80	1,53600	1,4390	0,17404	0,28682	0,60680	1,0935
1,81	1,54120	1,4499	0,17140	0,28370	0,60415	1,0950
1,82	1,54630	1,4610	0,16879	0,28061	0,60151	1,0965
1,83	1,55140	1,4723	0,16622	0,27756	0,59888	1,0980
1,84	1,55640	1,4837	0,16369	0,27453	0,59626	1,0995
1,85	1,56140	1,4952	0,16120	0,27153	0,59365	1,1009
1,86	1,56640	1,5069	0,15874	0,26857	0,59105	1,1024
1,87	1,51400	1,5188	0,15631	0,26563	0,58845	1,1039
1,88	1,57630	1,5308	0,15392	0,26272	0,58586	1,1054
1,89	1,58120	1,5429	0,15156	0,25984	0,58329	1,1068
1,90	1,58610	1,5552	0,14924	0,25699	0,58072	1,1083
1,91	1,59090	1,5677	0,14695	0,25417	0,57816	1,1097
1,92	1,59570	1,5804	0,14469	0,25138	0,57561	1,1112
1,93	1,60050	1,5932	0,14247	0,24862	0,57307	1,1126
1,94	1,60520	1,6062	0,14028	0,24588	0,57054	1,1141
1,95	1,60990	1,6193	0,13813	0,24317	0,56802	1,1155
1,96	1,61600	1,6326	0,13600	0,24049	0,56551	1,1170
1,97	1,61930	1,6461	0,13390	0,23784	0,56301	1,1184
1,98	1,62390	1,6597	0,13184	0,23522	0,56051	1,1198
1,99	1,62850	1,6735	0,12981	0,23262	0,55803	1,1213
2,00	1,63300	1,6875	0,12780	0,23005	0,55556	1,1227
2,01	1,63750	1,7017	0,12583	0,22751	0,55310	1,1241
2,02	1,64200	1,7160	0,12389	0,22499	0,55064	1,1255
2,03	1,64650	1,7305	0,12198	0,22250	0,54819	1,1269
2,04	1,65090	1,7452	0,12009	0,22004	0,54576	1,1283
2,05	1,65530	1,7600	0,11823	0,21760	0,54333	1,1297
2,06	1,65970	1,7750	0,11640	0,21519	0,54091	1,1311
2,07	1,66400	1,7902	0,11460	0,21281	0,53850	1,1325
2,08	1,66830	1,8056	0,11282	0,21045	0,53611	1,1339
2,09	1,67260	1,8212	0,11107	0,20811	0,53373	1,1352
2,10	1,67690	1,8369	0,10935	0,20580	0,53135	1,1366
2,11	1,68110	1,8529	0,10766	0,20352	0,52898	1,1380
2,12	1,68530	1,8690	0,10599	0,20126	0,52663	1,1393
2,13	1,68950	1,8853	0,10434	0,19902	0,52428	1,1407
2,14	1,69360	1,9018	0,10272	0,19681	0,52194	1,1420
2,15	1,69770	1,9185	0,10113	0,19463	0,51962	1,1434
2,16	1,70180	1,9354	0,09956	0,19247	0,51730	1,1447
2,17	1,70590	1,9525	0,09802	0,19033	0,51499	1,1460
2,18	1,70990	1,9698	0,09650	0,18821	0,51269	1,1474
2,19	1,71390	1,9873	0,09500	0,18612	0,51041	1,1487
2,20	1,71790	2,0050	0,09352	0,18405	0,50813	1,1500
2,21	1,72190	2,0229	0,09207	0,18200	0,50586	1,1513

0,58	0,61500	1,2130	0,79621	0,84977	0,93696	1,1205
0,59	0,62491	1,2003	0,79012	0,84513	0,93491	1,1126
0,60	0,63480	1,1882	0,78400	0,84045	0,93284	1,1050
0,61	0,64466	1,1766	0,77784	0,83573	0,93074	1,0979
0,62	0,65448	1,1656	0,77154	0,83096	0,92861	1,0912
0,63	0,66427	1,1551	0,76540	0,82616	0,92646	1,0849
0,64	0,67402	1,1451	0,75913	0,82132	0,92428	1,0788
0,65	0,68374	1,1356	0,75283	0,81644	0,92208	1,0731
0,66	0,69342	1,1265	0,74650	0,81153	0,91986	1,0678
0,67	0,70307	1,1178	0,74014	0,80659	0,91762	1,0627
0,68	0,71268	1,1096	0,73376	0,80162	0,91535	1,0572
0,69	0,72225	1,1018	0,72735	0,79662	0,91306	1,0534
0,70	0,73179	1,0944	0,72092	0,79158	0,91075	1,0492
0,71	0,74129	1,0873	0,71448	0,78652	0,90842	1,0451
0,72	0,75076	1,0806	0,70802	0,78143	0,60606	1,0414
0,73	0,76019	1,0742	0,70155	0,77632	0,90368	1,0378
0,74	0,76958	1,0681	0,69507	0,77116	0,90129	1,0345
0,75	0,77893	1,0624	0,68857	0,76603	0,89888	1,0314
0,76	0,78825	1,0570	0,68207	0,76086	0,89644	1,0284
0,77	0,79753	1,0519	0,67556	0,75567	0,89399	1,0257
0,78	0,80677	1,0471	0,66905	0,75046	0,89152	1,0231
0,79	0,81597	1,0425	0,66254	0,74524	0,88903	1,0208
0,80	0,82514	1,0382	0,65602	0,74000	0,88652	1,0185
0,81	0,83426	1,0342	0,64951	0,73474	0,88400	1,0165
0,82	0,84334	1,0305	0,64300	0,72947	0,88146	1,0146
0,83	0,85239	1,0270	0,63650	0,72419	0,87890	1,0128
0,84	0,86140	1,0237	0,63000	0,71890	0,87633	1,0112
0,85	0,87037	1,0207	0,62351	0,71361	0,87374	1,0097
0,86	0,87929	1,0179	0,61703	0,70831	0,87114	1,0083
0,87	0,88817	1,0153	0,61057	0,70300	0,86852	1,0070
0,88	0,89702	1,0129	0,60412	0,69769	0,86589	1,0059
0,89	0,90583	1,0108	0,59768	0,69237	0,86324	1,0049
0,90	0,91460	1,0089	0,59126	0,68704	0,86058	1,0040
0,91	0,92333	1,0071	0,58486	0,68171	0,85791	1,0032
0,92	0,93201	1,0056	0,57848	0,67639	0,85523	1,0025
0,93	0,94065	1,0043	0,57212	0,67107	0,85253	1,0019
0,94	0,94925	1,0031	0,56578	0,66575	0,84982	1,0014
0,95	0,95781	1,0021	0,55946	0,66044	0,84710	1,0009
0,96	0,96633	1,0014	0,55317	0,65513	0,84437	1,0006
0,97	0,97481	1,0008	0,54691	0,64982	0,84162	1,0003
0,98	0,98325	1,0003	0,54067	0,64452	0,83887	1,0001
0,99	0,99165	1,0001	0,53446	0,63923	0,83611	1,0000
1,00	1,00000	1,0000	0,52828	0,63394	0,83333	1,0000
1,01	1,00831	1,0001	0,52213	0,62866	0,83055	1,0000
1,02	1,01658	1,0003	0,51602	0,62339	0,82776	1,0001
1,03	1,02481	1,0007	0,50994	0,61813	0,82496	1,0003
1,04	1,03300	1,0013	0,50389	0,61288	0,82215	1,0005
1,05	1,04114	1,0020	0,49787	0,60765	0,81933	1,0008
1,06	1,04924	1,0029	0,49189	0,60243	0,81651	1,0012
1,07	1,05730	1,0039	0,48595	0,59722	0,81368	1,0016
1,08	1,06532	1,0051	0,48005	0,59203	0,81084	1,0020
1,09	1,07330	1,0065	0,47418	0,58685	0,80800	1,0025
1,10	1,08124	1,0079	0,46835	0,58169	0,80515	1,0031
1,11	1,08914	1,0096	0,46256	0,57655	0,80230	1,0037
1,12	1,09699	1,0113	0,45682	0,57143	0,79944	1,0043
1,13	1,10480	1,0132	0,45112	0,56632	0,79657	1,0050
1,14	1,11256	1,0153	0,44545	0,56123	0,79370	1,0057
1,15	1,12030	1,0175	0,43983	0,55616	0,79083	1,0065
1,16	1,12800	1,0198	0,43425	0,55112	0,78795	1,0073
1,17	1,13560	1,0222	0,42872	0,54609	0,78507	1,0081

2,22	1,72580	2,0409	0,09064	0,17998	0,50361	1,1526
2,23	1,72970	2,0592	0,08923	0,17798	0,50136	1,1539
2,24	1,73360	2,0777	0,08784	0,17600	0,49912	1,1565
2,25	1,73740	2,0964	0,08648	0,17404	0,49689	1,1578
2,26	1,74120	2,1154	0,08514	0,17211	0,49468	1,1590
2,27	1,74500	2,1345	0,08382	0,17020	0,49247	1,1603
2,28	1,74880	2,1538	0,08252	0,16830	0,49027	1,1616
2,29	1,75260	2,1734	0,08123	0,16643	0,48809	1,1629
2,30	1,75630	2,1931	0,07997	0,16458	0,48591	1,1641
2,31	1,76000	2,2131	0,07873	0,16275	0,48374	1,1653
2,32	1,76370	2,2333	0,07751	0,16095	0,48158	1,1666
2,33	1,76730	2,2537	0,07631	0,15916	0,47944	1,1678
2,34	1,77090	2,2744	0,07513	0,15739	0,47730	1,1690
2,35	1,77450	2,2953	0,07396	0,15564	0,47517	1,1703
2,36	1,77810	2,3164	0,07281	0,15391	0,47305	1,1715
2,37	1,78170	2,3377	0,07168	0,15220	0,47095	1,1727
2,38	1,78520	2,3593	0,07057	0,15052	0,46885	1,1739
2,39	1,78870	2,3811	0,06948	0,14885	0,46676	1,1751
2,40	1,79220	2,4031	0,06840	0,14720	0,46468	1,1763
2,41	1,79570	2,4254	0,06734	0,14557	0,46262	1,1775
2,42	1,79910	2,4479	0,06630	0,14395	0,46056	1,1786
2,43	1,80250	2,4706	0,06527	0,14235	0,45851	1,1798
2,44	1,80590	2,4936	0,06426	0,14078	0,45647	1,1810
2,45	1,80930	2,5168	0,06327	0,13922	0,45444	1,1821
2,46	1,81260	2,5403	0,62290	0,13768	0,45242	1,1833
2,47	1,81590	2,5640	0,06133	0,13610	0,45041	1,1844
2,48	1,81920	2,5880	0,06038	0,13465	0,44841	1,1856
2,49	1,82250	2,6122	0,05945	0,13316	0,44642	1,1867
2,50	1,82580	2,6367	0,05853	0,13169	0,44444	1,1879
2,51	1,82900	2,6615	0,05763	0,13023	0,44247	1,1890
2,52	1,83220	2,6865	0,05674	0,12879	0,44051	1,1901
2,53	1,83540	2,7117	0,05586	0,12737	0,43856	1,1512
2,54	1,83860	2,7372	0,05500	0,12597	0,43662	1,1923
2,55	1,84170	2,7630	0,05415	0,12458	0,43469	1,1934
2,56	1,84480	2,7891	0,05332	0,12321	0,43277	1,1945
2,57	1,84790	2,8154	0,05250	0,12185	0,43085	1,1956
2,58	1,85100	2,8420	0,05169	0,12051	0,42894	1,1967
2,59	1,85410	2,8689	0,05090	0,11418	0,42705	1,1978
2,60	1,85720	2,8960	0,05012	0,11787	0,45170	1,1989
2,61	1,86020	2,9234	0,04935	0,11658	0,42330	1,2000
2,62	1,86320	2,9511	0,04859	0,11530	0,42143	1,2011
2,63	1,86620	2,9791	0,04784	0,11403	0,41957	1,2021
2,64	1,86920	3,0074	0,04711	0,11278	0,41772	1,2031
2,65	1,87210	3,0356	0,04639	0,11154	0,41589	1,2042
2,66	1,87500	3,0647	0,04568	0,11032	0,41406	1,2052
2,67	1,87790	3,0938	0,04498	0,10911	0,41224	1,2062
2,68	1,88080	3,1233	0,04429	0,10192	0,41013	1,2073
2,69	1,88370	3,1530	0,04361	0,10674	0,40863	1,2083
2,70	1,88650	3,1830	0,04295	0,10557	0,40684	1,2093
2,71	1,88940	3,2133	0,04230	0,10442	0,40505	1,2103
2,72	1,89220	3,2440	0,04166	0,10328	0,40327	1,2113
2,73	1,89500	3,2749	0,04102	0,10215	0,40151	1,2123
2,74	1,89780	3,3061	0,04039	0,10104	0,39976	1,2133
2,75	1,90050	3,3376	0,03977	0,09994	0,36801	1,2143
2,76	1,90320	3,3695	0,03917	0,09885	0,39627	1,2153
2,77	1,90600	3,4017	0,03858	0,09777	0,39454	1,2163
2,78	1,90870	3,4342	0,03800	0,09671	0,39282	1,2173
2,79	1,91140	3,4670	0,03742	0,09566	0,39111	1,2182
2,80	1,91400	3,5001	0,03685	0,09462	0,38941	1,2192
2,81	1,91670	3,5336	0,03629	0,09360	0,38771	1,2202

1,18	1,14320	1,0248	0,42323	0,54108	0,78218	1,0090
1,19	1,15000	1,0276	0,41778	0,53610	0,77929	1,0099
1,20	1,15830	1,0304	0,41238	0,53114	0,77640	1,0108
1,21	1,16580	1,0334	0,40702	0,52620	0,77350	1,0118
1,22	1,17320	1,0366	0,40171	0,52129	0,77061	1,0128
1,23	1,18060	1,0398	0,39645	0,51640	0,76771	1,0138
1,24	1,18790	1,0432	0,39123	0,51154	0,76481	1,0149
1,25	1,19520	1,0468	0,38606	0,50670	0,76190	1,0159
1,26	1,20250	1,0504	0,33090	0,50189	0,75900	1,0171
1,27	1,20970	1,0542	0,37586	0,49710	0,75610	1,0182
1,28	1,21690	1,0581	0,37083	0,49234	0,75319	1,0193
1,29	1,22400	1,0621	0,36585	0,48761	0,75029	1,0205
1,30	1,31100	1,0663	0,36092	0,48291	0,74738	1,0217
1,31	1,23820	1,0706	0,35603	0,47823	0,74448	1,0229
1,32	1,24520	1,0750	0,35119	0,47358	0,74158	1,0242
1,33	1,25220	1,0796	0,34640	0,46895	0,73867	1,0254
1,34	1,25910	1,0842	0,31660	0,46436	0,73577	1,0267
1,35	1,26600	1,0890	0,33697	0,45980	0,73287	1,0279
1,36	1,27290	1,0940	0,33233	0,45527	0,72997	1,0292
1,37	1,27970	1,0990	0,32774	0,45076	0,72707	1,0306
1,38	1,28650	1,1042	0,32319	0,44628	0,72418	1,0319
1,39	1,29320	1,1095	0,31869	0,44183	0,72128	1,0332
1,40	1,29990	1,1149	0,31424	0,43742	0,71839	1,0346
1,41	1,30650	1,1205	0,30984	0,43304	0,71550	1,0360
1,42	1,31310	1,1262	0,30549	0,42869	0,71261	1,0373
1,43	1,31970	1,1320	0,30119	0,42436	0,70973	1,0387
1,44	1,32620	1,1379	0,29693	0,42007	0,70685	1,0401
1,45	1,33270	1,1440	0,29272	0,41581	0,70397	1,0415
1,46	1,33920	1,1502	0,28856	0,41158	0,70110	1,0430
1,47	1,34560	1,1565	0,28445	0,40738	0,69823	1,0444
1,48	1,35200	1,1629	0,28039	0,40322	0,69537	1,0458
1,49	1,35830	1,1695	0,27637	0,39909	0,69251	1,0473
1,50	1,36460	1,1762	0,27240	0,39498	0,68965	1,0487
1,51	1,37080	1,1830	0,26848	0,39091	0,68680	1,0502
1,52	1,37700	1,1899	0,26461	0,38687	0,68396	1,0516
1,53	1,38320	1,1970	0,26078	0,38287	0,68112	1,0531
1,54	1,38940	1,2042	0,25700	0,37890	0,67828	1,0546
1,55	1,39550	1,2115	0,25326	0,37496	0,67545	1,0560
1,56	1,40160	1,2190	0,24957	0,37105	0,67262	1,0575
1,57	1,40760	1,2266	0,24593	0,36717	0,66980	1,0590
1,58	1,41350	1,2343	0,24233	0,36332	0,66699	1,0605
1,59	1,41950	1,2422	0,23878	0,35951	0,66418	1,0620
1,60	1,42540	1,2502	0,23527	0,35573	0,66138	1,0635
1,61	1,43130	1,2583	0,23181	0,35198	0,65858	1,0650
1,62	1,43710	1,2666	0,22839	0,34826	0,65579	1,0665
1,63	1,44290	1,2750	0,22501	0,34458	0,65301	1,0580

2,82	1,91930	3,5674	0,03574	0,09259	0,38603	1,2211
2,83	1,92200	3,6015	0,03520	0,09158	0,38435	1,2221
2,84	1,92460	3,6359	0,03467	0,09059	0,38268	1,2230
2,85	1,92710	3,6707	0,03415	0,08662	0,38102	1,2240
2,86	1,92970	3,7058	0,03363	0,08865	0,37937	1,2249
2,87	1,93220	3,7413	0,03312	0,08769	0,37773	1,2258
2,88	1,93480	3,7771	0,03262	0,08674	0,37610	1,2268
2,89	1,93730	3,8133	0,03213	0,08581	0,37448	1,2268
2,90	1,93980	3,8498	0,03165	0,08489	0,37286	1,2277
2,91	1,94230	3,8866	0,03118	0,08398	0,37125	1,2286
2,92	1,94480	3,9238	0,03071	0,08308	0,36965	1,2295
2,93	1,94720	3,9614	0,03025	0,08218	0,36806	1,2304
2,94	1,94970	3,9993	0,02980	0,08130	0,36648	1,2313
2,95	1,95210	4,0376	0,02935	0,08043	0,36490	1,2322
2,96	1,95450	4,0763	0,02891	0,07957	0,36333	1,2331
2,97	1,95690	4,1153	0,02848	0,07872	0,36177	1,2340
2,98	1,95930	4,1547	0,02805	0,07788	0,36022	1,2348
2,99	1,96160	4,1944	0,02764	0,07705	0,35868	1,2357
3	1,96400	4,2346	0,02722	0,07623	0,35714	1,2366
3,1	1,98660	4,6573	0,02345	0,06852	0,34223	1,2450
3,2	2,00790	5,1210	0,02023	0,06165	0,32808	1,2530
3,3	2,02790	5,6287	0,01748	0,05554	0,31466	1,2605
3,4	2,04660	6,1837	0,01512	0,05009	0,30193	1,2676
3,5	2,06420	6,7896	0,01311	0,04523	0,28986	1,2743
3,6	2,08080	7,4501	0,01138	0,04089	0,27840	1,2807
3,7	2,09640	8,1691	0,00990	0,03702	0,26752	1,2867
3,8	2,11110	8,9506	0,00863	0,03355	0,25720	1,2924
3,9	2,12500	9,7990	0,00753	0,03044	0,24740	1,2978
4	2,13810	10,7190	0,00658	0,02766	0,23810	1,3029
4,1	2,15050	11,7150	0,00577	0,02516	0,22925	1,3077
4,2	2,16220	12,7920	0,00506	0,02292	0,22085	1,3123
4,3	2,17320	13,9550	0,00445	0,02090	0,21286	1,3167
4,4	2,18370	15,2100	0,00392	0,01909	0,20525	1,3208
4,5	2,19360	16,5620	0,00346	0,01745	0,19802	1,3247
4,6	2,20300	18,0180	0,00305	0,01597	0,19113	1,3284
4,7	2,21190	19,5830	0,00270	0,01463	0,18457	1,3320
4,8	2,22040	21,2640	0,00240	0,01343	0,17832	1,3354
4,9	2,22840	23,0670	0,00213	0,01233	0,17235	1,3386
5	2,23610	25,0000	0,00189	0,01134	2,98	1,3416
6	2,29530	53,1800	0,00063	0,00519	0,12195	1,3655
7	2,33330	104,143	0	0,00261	0,09259	1,3810
8	2,35910	190,109	0	0,00141	0,07246	1,3915
9	2,37720	327,189	0,00005	0	0,05814	1,3989
10	2,39040	535,938	0	0	0,04762	1,4044
∞	2,44950	∞	0	0	0	1,4289

$$M^* = \frac{V}{V^*} = M \sqrt{\frac{1+\gamma}{2\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}} \qquad \frac{A}{A^*} = \frac{\Omega}{\Omega^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{2\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$F = p\,A\,(1+\gamma\,M^2) \quad ; \quad \frac{F}{F^*} = \frac{1}{M}\,\frac{1+\gamma\,M^2}{\sqrt{2\,(\gamma+1)\,(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \quad ; \quad \frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad ; \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}} \quad ; \quad \frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2 (\gamma - 1)}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{1 - \gamma}} \quad ; \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{1 + \gamma}}$$