II.- FUNDAMENTOS AERODINÁMICOS DE LAS MAQUINAS EÓLICAS

pfernandezdiez.es

El viento está compuesto por partículas de aire en movimiento; cuando la masa de aire esté conformada por filetes yuxtapuestos, perfectamente individualizados, se dice que el movimiento del mismo es laminar, mientras que si los filetes de aire se entrecruzan y no conservan su individualidad, se dice que el movimiento es turbulento; éste es el caso más general que acontece en el viento. Si en cada punto de una masa de aire en movimiento turbulento se miden las velocidades instantáneas, se observa que estas varían en magnitud y en dirección sin ninguna regularidad, pero no suelen apartarse mucho de un valor medio. Los movimientos desordenados del aire a nivel macroscópico se llaman turbulencias, que pueden influir en masas de aire importantes. Cuando el viento se encuentra con un obstáculo, su movimiento empieza a ser perturbado y a hacerse irregular a una cierta distancia del mismo.

II.1.- FUERZAS SOBRE UN PERFIL

Un objeto situado en el seno de una corriente de aire presenta una resistencia al avance deformando los filetes fluidos; ésto depende de la forma del objeto y de su posición con relación a la dirección del viento, Fig II.1. Al estudiar los efectos de la resistencia del aire sobre una placa plana, se observa que. *la resultante* $\vec{R}$ *de las fuerzas aplicadas a la placa es un vector cuyo punto de aplicación es su centro aerodinámico o centro de empuje,* siendo su dirección perpendicular a la placa, su sentido el del viento, y su intensidad proporcional a la superficie S expuesta y al cuadrado de la velocidad del viento v, en la forma:

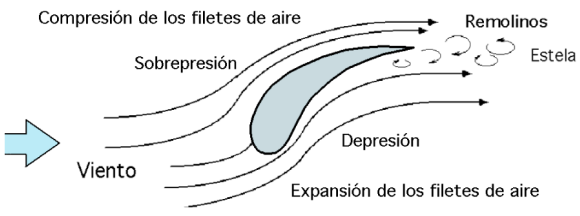


Fig II.1.- Perfil situado en el seno de una corriente fluida

$$R = C_w \ \rho \ \frac{S\, v^2}{2} = k\, S\, v^2$$

en la que:

- *k es un coeficiente que depende del ángulo α de incidencia, de las unidades elegidas y de la turbulencia del movimiento*

- *C_w es el coeficiente de resistencia (penetración)*

- *ρ es la densidad del aire*

- *S es la sección frontal del perfil*

Si el ángulo α que forma el plano de la placa con la dirección del viento es grande, existe una sobrepresión en la parte delantera de la placa y una depresión en su parte posterior de carácter turbillonario, Fig II.2

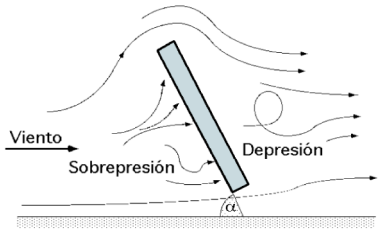


Fig II.2

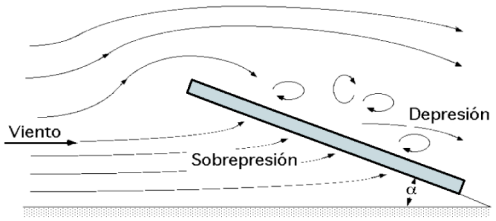


Fig II.3

Si el ángulo de incidencia α es pequeño, la sobrepresión aparece en la parte inferior de la placa y la depresión por encima, por lo que aparece una fuerza que tiende a elevarla, Fig II.3, conocida como fuerza de sustentación o de elevación.

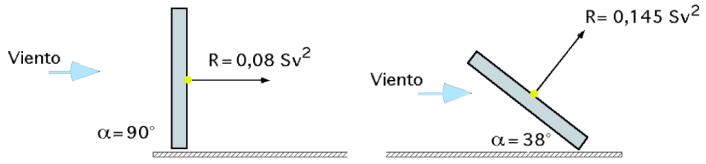


Fig II.4.- Angulos de ataque y efecto sobre perfiles

En la Fig II.4 se representa un perfil placa plana con dos tipos de inclinación; se indican los valores de $\vec{R}$, observándose que contra más pequeño sea el ángulo α de inclinación, la resultante $\vec{R}$ será mayor. Para perfiles planos (fijos) de longitud L paralelos a la velocidad $\vec{v}$ del viento, el valor del nº de Reynolds y el coeficiente de penetración son:

$$Re = \frac{v\,L}{\nu} \quad ; \quad C_w = \begin{cases} \text{Régimen laminar: } C_w = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{Re}} \quad ; \quad Re < 10^5 \\ \text{Régimen turbulento: } \begin{cases} C_w = \dfrac{0{,}074}{Re^{1/5}} \quad ; \quad 10^5 < Re < 10^7 \\ C_w = \dfrac{0{,}455}{(\log Re)^{-2{,}58}} \quad ; \quad Re > 10^7 \end{cases} \end{cases}$$

Para otros perfiles no planos, con su eje de simetría paralelo a la dirección del viento, el valor del coeficiente C_w se indica en la Fig II.5.

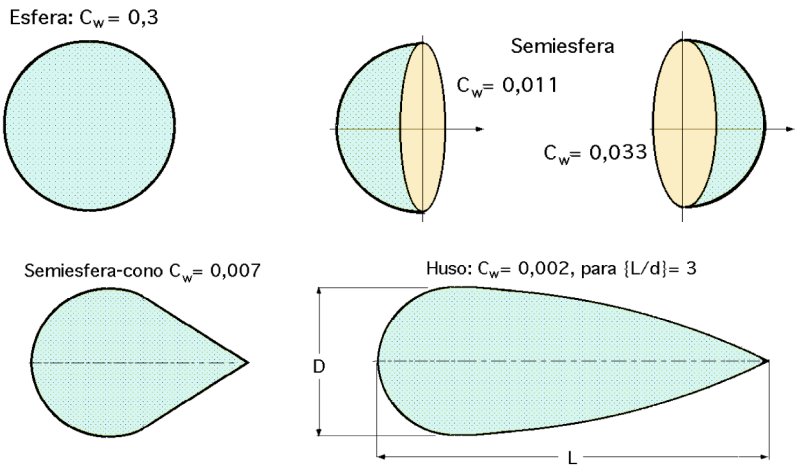


Fig II.5.- Coeficiente C_w para algunos perfiles semiesféricos

Para un perfil diseñado en forma aerodinámica se definen dos zonas que son:

a) El extradós, que es la parte del perfil en donde los filetes de aire están en depresión

b) El intradós, que es la parte del perfil en donde los filetes de aire están en sobrepresión

Si la placa no está perfilada convenientemente, las turbulencias originadas sobre el extradós disminuyen la energía cinética del aire. Si se permite que la placa se desplace bajo el efecto de la fuerza ejercida por el viento, producirá un cierto trabajo recuperable en forma de energía mecánica; contra menor sea la turbulencia, mayor será este trabajo.

Fuerzas de arrastre y ascensional en perfiles fijos.- La componente de $\vec{R}$ en la dirección del viento es la fuerza de arrastre $\vec{F}_{arr}$; la componente de $\vec{R}$ perpendicular a la fuerza de arrastre es la fuerza ascensional $\vec{F}_{asc}$, de la forma $\begin{cases} F_{arr} = R\ sen\ \alpha = k_x\ S\ v^2 \\ F_{asc} = R\ cos\ \alpha = k_y\ S\ v^2 \end{cases}$

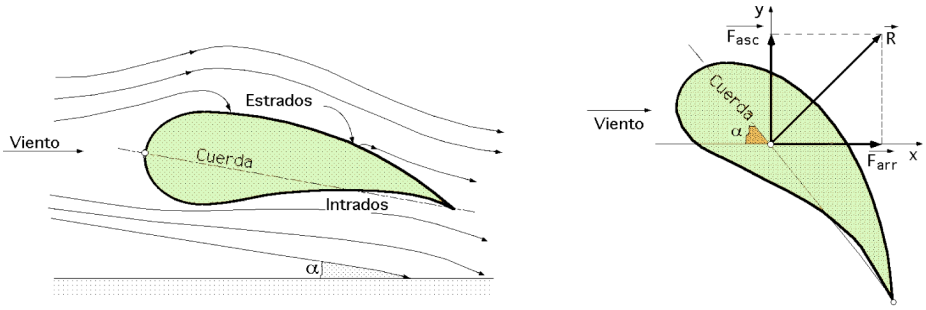


Fig II.6.- Fuerzas de arrastre y ascensional en un perfil fijo

La fuerza $\vec{R}$ se considera normal a la cuerda del perfil, que es al mismo tiempo su longitud característica; el empuje ascensional aumenta a medida que α disminuye. La cuerda se considera desde el borde de ataque del perfil, al borde de salida posterior.

Si la forma del perfil no es plana, se puede descomponer $\vec{R}$ en función de dos tipos de coeficientes, k_x de arrastre y k_y ascensional, siendo el eje ***x*** paralelo a la dirección del viento, Fig II.6.

Polar de un perfil.- Se define la *esbeltez de un perfil,* para un valor dado de α, como la relación entre los coeficientes k_y y k_x, en la forma:

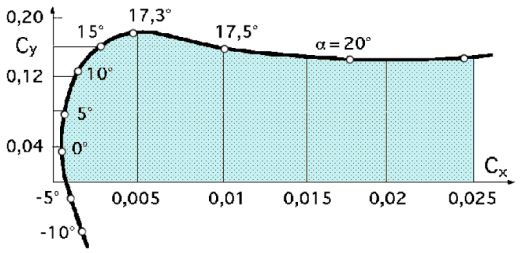


Fig II.7.- Polar de un perfil

$$Esbeltez:\ f = \frac{k_y}{k_x} = \frac{C_y}{C_x} = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

La curva $C_y = f(C_x)$, Fig II.7, se denomina *polar del perfil* y se determina midiendo los valores de $\vec{F}_{arr}$ y $\vec{F}_{asc}$ mediante una balanza de torsión en túnel de viento, para diversos valores del ángulo de ataque α.

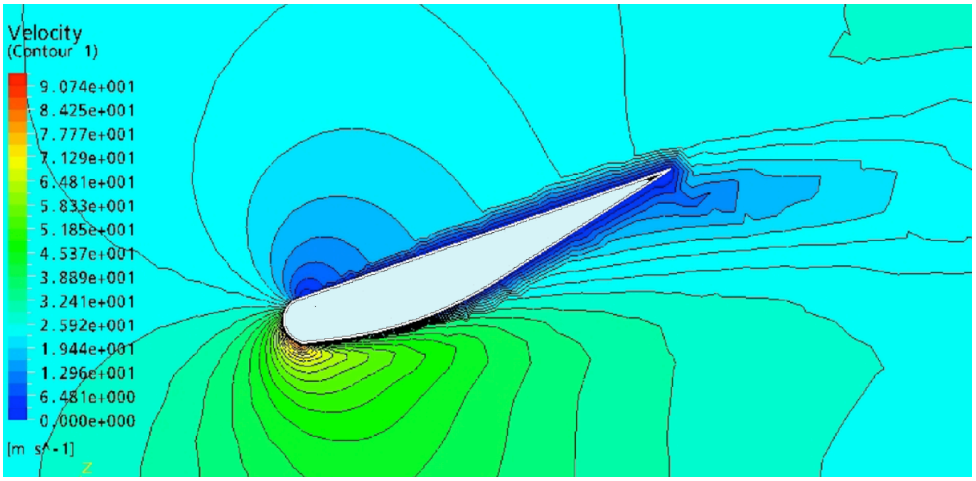


Fig II.8a.- Distribución de velocidades sobre un perfil con α_{ataque}= 12° y $\alpha_{resultante}$= 3,57°

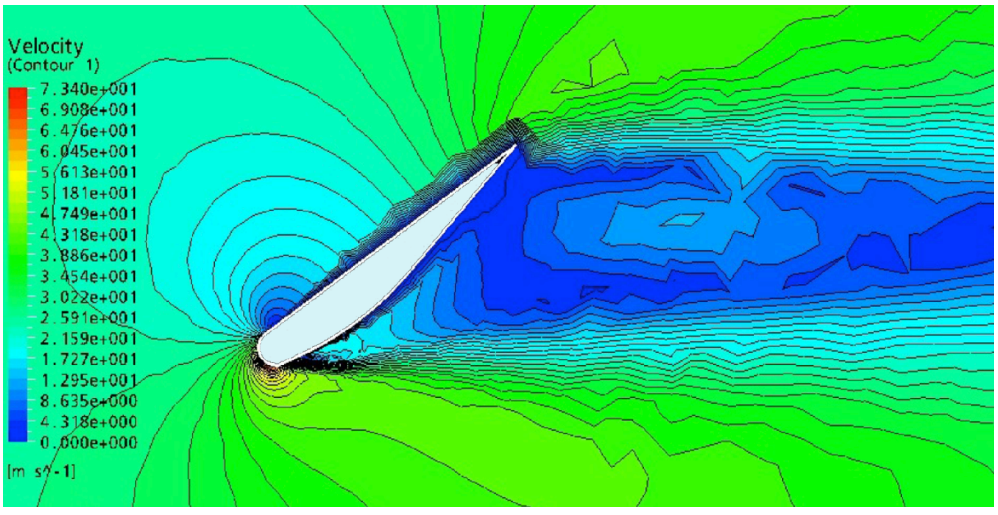


Fig II.8b.- Distribución de velocidades sobre un perfil con α_{ataque}= 30° y $\alpha_{resultante}$= 25,77°

II.2.- ACCIÓN DEL VIENTO SOBRE EL PERFIL. POTENCIA ÚTIL Y RENDIMIENTO

Palas perfiladas.- El elemento básico de una aeroturbina es el rotor, que está formado por una o varias hélices o palas, (su teoría de cálculo elemental es análoga a la de las hélices de avión). En el

rotor están situadas las palas, cuyo número es variable según los casos; cada pala tiene un perfil que tiene forma aerodinámica; éstos perfiles tienen un extremo romo, que es el borde de ataque mientras que el otro extremo, de forma afilada, es el borde de salida.

Los perfiles tienen distintos nombres según su geometría. Se denominan biconvexos si el intradós y el extradós son convexos y plano-convexos si tienen el extradós convexo y el intradós plano y de doble curvatura si el intradós y el extradós son cóncavos. En general, los tipos de perfiles utilizados en las máquinas eólicas rápidas son de la serie NACA (National Advisory Committee of Aeronautics), y vienen determinados por un conjunto de cifras que definen su geometría.

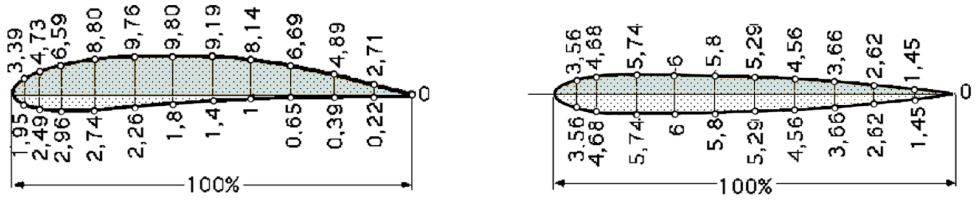
NOMENCLATURA DE PERFILES NACA-4 CIFRAS

La primera cifra tiene un significado geométrico, e indica la máxima flecha de la línea media de la cuerda en % , proporcionando la máxima curvatura.

- La segunda cifra tiene un significado geométrico, e indica su posición, es decir, la distancia desde el borde de ataque hasta la posición de la máxima flecha de la línea media o máxima curvatura

- Las dos últimas cifras indican el espesor relativo máximo del perfil en % respecto a la cuerda.

El perfil se obtiene mediante dos parábolas tangentes en el punto de máxima línea media



NACA 4412 NACA 0012

Fig II.9.- Perfiles NACA

***Ejemplo:** El perfil NACA2415, tiene un 2% de altura máxima de la línea media, situada a un 40% del borde de ataque, con un espesor relativo del 15%.*

Los perfiles NACA44XX tienen el intradós con parte convexa, por lo que son de construcción más compleja y al igual que los anteriores el XX indica el máximo espesor del perfil.

NOMENCLATURA DE PERFILES NACA-5 CIFRAS

- La primera cifra indica el valor del coeficiente de sustentación ideal de la curvatura del perfil, multiplicado por 20 y dividido por 3

- Las dos cifras siguientes indican el doble de la posición de la flecha máxima de la línea media (curvatura) en % de la cuerda

- Las dos últimas cifras indican el espesor relativo máximo del perfil respecto a la cuerda en %, igual al del perfil NACA de 4 cifras

El perfil consiste en una parábola cúbica conectada a una línea recta que llega hasta el borde de salida

La serie 230XX muy utilizada en rotores de aeroturbinas se corresponde con perfiles simétricos biconvexos,

indicando la relación XX el espesor máximo

MODIFICACIONES A LOS PERFILES NACA DE 4 Y 5 CIFRAS

Se pueden añadir dos cifras más a la nomenclatura básica de 4 ó 5 cifras, cuyo significado es el siguiente:

La primera indica el radio de curvatura de la distribución de espesores en el borde de ataque con una escala entre 0 y 8, tal que el nº 6 indica perfil no modificado. La segunda cifra indica la posición de máximo espesor en décimas de cuerda, no estando localizado en el 30%.

Existen otros tipos de perfiles como los de la serie NASA (antecesora de la NACA), Göttinger, Clark, etc, que incluyen en su nomenclatura no sólo características geométricas, sino también su comportamiento aerodinámico.

Ángulos de la cuerda.- La pala de una hélice de un aerogenerador eólico es una pala perfilada que transforma la energía cinética del viento en energía mecánica de rotación. Las fuerzas que actúan sobre un elemento de longitud de pala dx en rotación, se obtienen estudiando la acción del viento relativo que recibe la pala de velocidad $\vec{c}$ (viento aparente o estela), que se puede considerar suma del viento real de velocidad $\vec{v}$ y de un viento originado por el movimiento de rotación de la pala, de velocidad $\vec{u}$, Fig II.10.

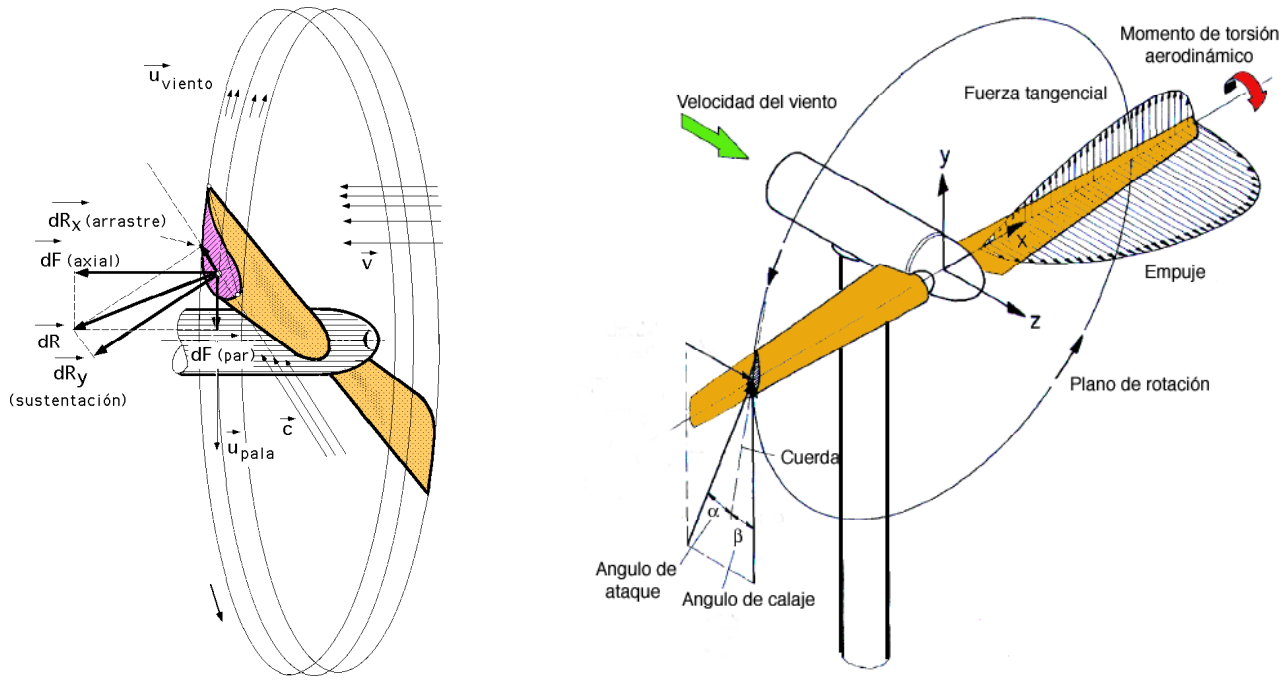


Fig II.10.- Fuerzas que actúan sobre un elemento de pala en rotación

Si se trata de una hélice de avión (propulsiva), como el viento incidente es un viento relativo debido al desplazamiento del avión, existe una diferencia en la posición de la pala respecto a la del aerogenerador, como se indica en las Fig II.11 y 12, en las que:

β *es el ángulo que forma una cuerda del perfil con el plano de rotación; es el ángulo de calaje o de inclinación (cuerda / u)*

α *es el ángulo que forma la cuerda del perfil con la velocidad aparente del viento* $\vec{c}$ *, (ángulo de incidencia o de ataque)*

θ *es el ángulo que forma el plano de rotación con la dirección aparente del viento que pasa por el borde de ataque; se conoce como ángulo aparente del viento*

Se tiene que:

- $\beta = \theta - \alpha$, *para una hélice de aerogenerador*
- $\beta = \theta + \alpha$, *para una hélice de avión*
- $\vec{u}$ *es la velocidad del viento creada por el desplazamiento (giro) de la pala*
- $\vec{v}$ *es la velocidad del viento real (velocidad nominal)*

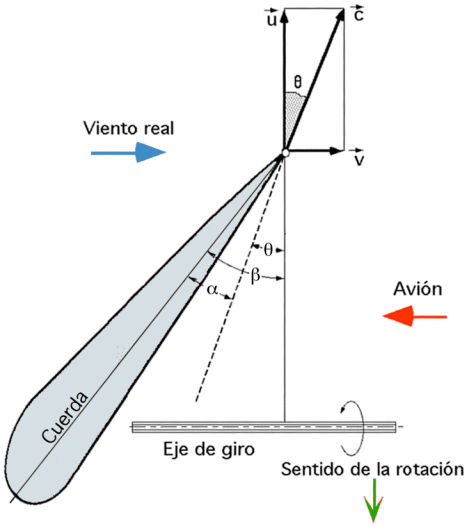


Fig II.11.- Pala de hélice de avión

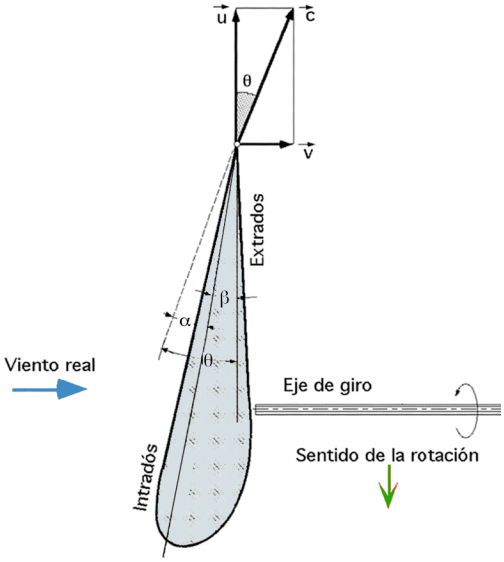


Fig II.12.- Pala de hélice de aerogenerador

El *cabeceo* es una medida de la tendencia de un perfil de ala a bajar su borde de ataque en una corriente frontal del viento, dato importante a la hora de diseñar la estructura de las palas, mecanismos de hélices, etc; algunos perfiles son neutros porque no tienen momento de cabeceo.

La pala de un aerogenerador es más sencilla y fácil de construir que la de un avión, ya que es más lisa, presentando al viento una superficie casi plana, mientras que una hélice de avión girando en las mismas condiciones que la hélice de un aerogenerador, no tendría apenas aplicación para la transformación de la energía eólica.

II.3.- FUERZAS DE ARRASTRE Y ASCENSIONAL EN PERFILES MÓVILES

La fuerza que actúa en el centro aerodinámico de un elemento de pala en rotación, de superficie frontal elemental *dS*, (proyección del perfil sobre la dirección del viento aparente), viene dada por *dR*, Fig II.13; esta fuerza se puede descomponer a su vez en otras dos, tanto a la entrada del viento

en el perfil móvil, como a la salida.

- A la entrada del perfil móvil se tiene un viento de velocidad $\vec{v}$ que da lugar a la fuerza axial F_{ax} y a la fuerza de par F_{par}

- A la salida del perfil móvil se tiene un viento de velocidad aparente $\vec{c}$ que da lugar a la fuerza de arrastre F_{arr} y a la fuerza de sustentación F_{sust}

$dR_x = F_{arr}$ en la dirección $\vec{c}$ del viento aparente se corresponde con una degradación de la energía

$dR_y = F_{sust}$ es la fuerza ascensional o empuje sobre el elemento de pala, que la hace volar

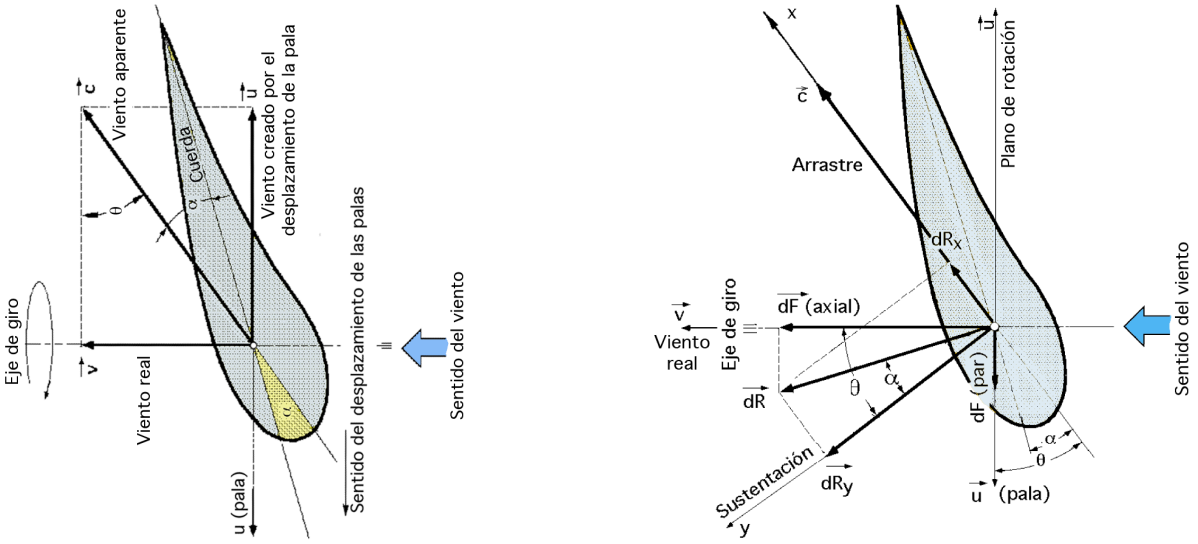


Fig II.13.- a) Velocidades y b) Fuerzas que aparecen sobre una pala de aerogenerador

Para un elemento de pala diferencial en rotación dS y de acuerdo con la Fig II.13 se puede poner:

$$\textit{Fuerza de arrastre: } dR_x = dF_{arr} = \frac{1}{2} C_x \rho c^2 dS$$

$$\textit{Fuerza ascensional: } dR_y = dF_{asc} = \frac{1}{2} C_y \rho c^2 dS$$

$$\textit{en las que: } \left.\begin{matrix} C_x \text{ es el coeficiente de arrastre} \\ C_y \text{ es el coeficiente ascensional} \end{matrix}\right\} \textit{ que dependen del } \begin{cases} \textit{tipo de perfil} \\ \textit{ángulo de incidencia} \\ \textit{número de Reynolds} \end{cases}$$

dS es el área del elemento diferencial de la pala que se ofrece al viento de valor L dr, siendo L la longitud característica del perfil, igual a la longitud de su cuerda

Los coeficientes C_x y C_y están relacionados por el coeficiente aerodinámico total C_T de la forma:

$$C_T^2 = C_x^2 + C_y^2$$

Fuerzas de par y axial.- Si se proyectan las fuerzas de arrastre o de resistencia dR_x y de empuje ascensional o sustentación dR_y, sobre el plano de rotación, se obtiene una fuerza útil dF_{par}, (pa-

ralela a $\vec{u}$) que hace girar la hélice, y otra fuerza perpendicular dF_{axial} (fuerza de empuje del viento sobre el rotor), que se compensa por la reacción del soporte del eje del rotor de la hélice, de la forma:

$$dF_{par} = dR_y \ sen\,\theta - dR_x \ cos\,\theta = \frac{1}{2}\,\rho\, c^2 \ dS\,(C_y \ sen\,\theta - C_x \ cos\,\theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\rho\,\frac{v^2}{sen^2\theta}\,dS\,(C_y \ sen\,\theta - C_x \ cos\,\theta) = \frac{\rho\, v^2}{2}\,(1 + cotg^2\theta)\,dS\,(C_y \ sen\,\theta - C_x \ cos\,\theta)$$

$$dF_{axial} = dR_y \ cos\,\theta + dR_x \ sen\,\theta = \frac{1}{2}\,\rho\, c^2 \ dS\,(C_y \ cos\,\theta + C_x \ sen\,\theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\rho\,\frac{v^2}{sen^2\theta}\,dS\,(C_y \ cos\,\theta + C_x \ sen\,\theta) = \frac{\rho\, v^2}{2}\,(1 + cotg^2\theta)\,dS\,(C_y \ cos\,\theta + C_x \ sen\,\theta)$$

siendo θ el ángulo que forma la dirección del viento aparente, entre los vectores velocidad $\vec{u}$ y $\vec{c}$.

Los valores que intervienen en el cálculo de estos elementos diferenciales son función de las velocidades en cada zona y, por tanto, del ángulo de ataque α, ya que conocido éste, es posible obtener los valores de C_x y C_y en función de él.

Como:

$$C_y \ cos\,\theta - C_x \ sen\,\theta = \left| tg\,\alpha = \frac{C_x}{C_y} \right| = C_y\,(sen\,\theta - \frac{C_x}{C_y}\,cos\,\theta) = C_y\,(sen\,\theta - tg\,\alpha\ cos\,\theta) = C_y\ \frac{sen\,(\theta - \alpha)}{cos\,\alpha}$$

$$C_y \ cos\,\theta + C_x \ sen\,\theta = \left| tg\,\alpha = \frac{C_x}{C_y} \right| = C_y\,(cos\,\theta + \frac{C_x}{C_y}\,sen\,\theta) = C_y\,(cos\,\theta + tg\,\alpha\ sen\,\theta) = C_y\ \frac{cos\,(\theta - \alpha)}{cos\,\alpha}$$

$$resulta: \begin{cases} dF_{par} = \frac{1}{2}\,\rho\, v^2\, dS\, C_y\ \frac{sen\,(\theta - \alpha)}{sen^2\theta\ cos\,\alpha} \\ dF_{axial} = \frac{1}{2}\,\rho\, v^2\, dS\, C_y\ \frac{cos\,(\theta - \alpha)}{sen^2\theta\ cos\,\alpha} \end{cases}$$

La fuerza de sustentación aumenta con el ángulo de ataque α hasta un máximo y luego disminuye. Como $\vec{u}$ varía con el radio *r*, $\vec{c}$ también variará, por lo que el ángulo β deberá variar a lo largo de la pala, y de ahí que éstas se construyan alabeadas.

Par motor.- *Los aerogeneradores eólicos cuyo par motor se obtiene a partir de la fuerza de arrastre* dF_{arr}*, son los aerogeneradores Savonius y los Molinos multipala* (12 a 24) palas.

$$dC = r\,dF_{arr} = \frac{r}{2}\,C_x\,\rho\, c^2\, dS = \frac{r}{2}\,C_x\,\rho\, v^2\,(1 + cotg^2\theta)\,dS = \frac{r}{2}\,C_y\,\rho\, v^2\,\frac{sen\,(\theta - \alpha)}{sen^2\theta\ cos\,\alpha}\,dS$$

Los aerogeneradores eólicos en los que el par motor se obtiene a partir de la fuerza de par dF_{par}*, son los aerogeneradores Darrieux y Hélice*.

$$dC = r\, dF_{par} = \frac{r}{2}\ \rho\ v^2\ \ dS\,(1 + cotg^2\theta)\,(C_y\ \ sen\ \theta\ -\ C_x\ \ cos\ \theta)$$

Rendimiento aerodinámico de las hélices.- La potencia útil generada por un elemento diferencial de pala es:

$$dN_{útil} = dF_{par}\ \ u$$

y la potencia consumida por el viento:

$$dN_{viento} = dF_{axial}\ \ v$$

por lo que se puede definir el rendimiento aerodinámico $\eta_{(aerod)}$ como la relación entre la potencia útil generada por la pala y la consumida por el viento, en la forma:

$$\eta_{aerod} = \frac{dF_{par}\ u}{dF_{axial}\ v} = \frac{dR_y\ \ sen\ \theta\ -\ dR_x\ \ cos\ \theta}{dR_y\ \ cos\ \theta + dR_x\ \ sen\ \theta}\ \frac{u}{v} = \frac{sen\,(\theta - \alpha)}{cos\,(\theta - \alpha)}\ \frac{u}{v} = tg\,(\theta - \alpha)\ \frac{u}{v} =$$

$$= \frac{(dR_y / dR_x) - cotg\ \theta}{(dR_y / dR_x)\ cotg\ \theta + 1}\ \frac{u}{v} = \left| \begin{array}{l} f = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{dR_y}{dR_x} = \dfrac{C_y}{C_x} = \dfrac{1}{tg\ \theta} \\ TSR = \dfrac{u_{máx}}{v} = cotg\ \theta_{máx} = \dfrac{R\,w}{v} \end{array} \right| = \frac{1 - \mu\ cotg\ \theta}{1 + \mu\ tg\ \theta} = \frac{f - cotg\ \theta}{f + tg\ \theta}$$

que depende de la esbeltez *f*, Fig II.14, y del TSR (Tip-Speed-Ratio) definido como la relación entre la velocidad periférica de la pala $\vec{u}$ y la del viento $\vec{v}$, sin intervención de velocidades inducidas, siendo un concepto que en estas máquinas sustituye al número específico de revoluciones.

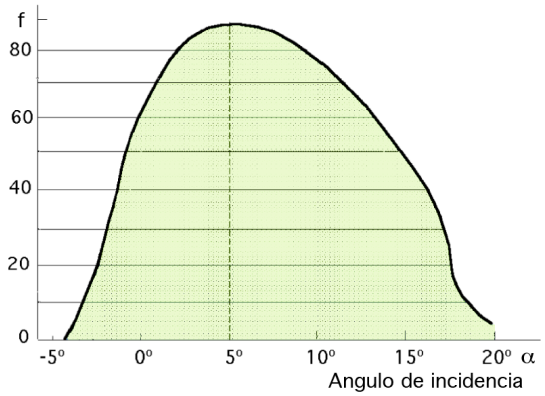


Fig II.14.- Esbeltez de un perfil NACA

La relación entre la velocidad angular $\breve{w}$ para un radio *r* cualquiera y el ángulo θ, es:

$$SR = \frac{u}{v} = cotg\ \theta = \frac{r\,w}{v} = \frac{\pi\ r\ n}{30\ v}$$

con SR (Speed-Ratio), en la que *r* es la distancia del elemento de pala considerado al eje de rotación del aerogenerador; si *r* disminuye el ángulo θ aumenta; si β es constante, el ángulo de incidencia α aumenta.

De la expresión del rendimiento de una pala de aerogenerador en función de su esbeltez *f* y del ángulo aparente del viento θ, se deduce que contra menor sea el valor de μ, (o contra mayor sea el valor de la esbeltez *f*), tanto mayor será el rendimiento $\eta_{(aerod)}$, obteniéndose para ($\mu = 0$) ó ($f = \infty$), un rendimiento máximo igual a la unidad, cuestión imposible por el Teorema de Betz.

Cuando se proyecta un aerogenerador hay que elegir una velocidad $\vec{v}$ del viento que sea la más

adecuada y a partir de ella intentar obtener el rendimiento máximo; ésta es la velocidad nominal, dependiendo su elección del paraje en donde se vaya a instalar el aparato; una vez fijada se elige el tipo de perfil de la pala y la velocidad de rotación deseada. Conociendo la velocidad nominal $\vec{v}$ del viento y la velocidad periférica de rotación $\vec{u}$, se determina el ángulo aparente del viento θ que varía a lo largo de la pala según la distancia al eje de rotación de la hélice.

También hay que tener en cuenta que para obtener el $\eta_{aerod.máx}$ el ángulo de incidencia del viento sobre la pala debe tener un valor fijo α_0 a todo lo largo de la misma; para que ésto sea así es necesario que el ángulo $\beta = \theta - \alpha$ varíe al mismo tiempo que θ. Para obtener un mayor rendimiento aerodinámico, la pala debe tener forma helicoidal en la que el ángulo β es muy importante al principio y lo es menos en su extremidad.

Potencia máxima.- Para hallar la potencia maximal se puede partir de la expresión de la potencia útil de la forma:

$$dN_{útil} = u\, dF_{par} = u\,(dR_y\ sen\,\theta - dR_x\ cos\,\theta) = \frac{u}{2}\,\rho\, c^2\ dS\,(C_y\ sen\,\theta - C_x\ cos\,\theta) =$$

$$= \frac{u}{2}\,\rho\, v^2 dS\,(cotg^2\theta + 1)\,(C_y sen\,\theta - C_x cos\,\theta) = \frac{\rho\, v^3 dS}{2}\ cotg\,\theta\,(cotg^2\theta + 1)\,(C_y sen\,\theta - C_x cos\,\theta)$$

que en la práctica se simplifica ya que $\theta < 20^o$, por lo que:

$$tg\,\theta = sen\,\theta \quad ;\ cos\,\theta \approx 1 \quad ;\ cotg\,\theta \approx \frac{1}{sen\,\theta}$$

quedando la expresión de $dN_{útil}$ en la forma:

$$dN_{útil} = \frac{\rho\, v^3 dS}{2}\ \frac{1}{sen\,\theta}\,(cotg^2\theta + 1)\,(C_y\ sen\,\theta - C_x) = \frac{\rho\, v^3 dS}{2}\,\{C_y\,(cotg^2\theta + 1) - C_x\,\frac{cotg^2\theta + 1}{sen\,\theta}\} =$$

$$= \frac{\rho\, v^3 dS}{2}\,(\ \frac{C_y}{sen^2\theta} - \frac{C_x}{sen^3\theta}\ ) = \frac{\rho\, v^3 dS}{2}\,(\ C_y cotg^2\theta - C_x cotg^3\theta\ )$$

La condición de potencia maximal desarrollada por el viento correspondiente al elemento de superficie de pala dS, se calcula derivando la expresión de la $dN_{útil}$ respecto de θ, obteniéndose:

$$2\,C_y\ cotg\,\theta - 3\,C_x\ cotg^2\theta = 0$$

$$cuyas\ soluciones\ son:\ \begin{cases} cotg\,\theta = 0 \\ 2\,C_y = 3\,C_x\ cotg\,\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad cotg\,\theta = \frac{2\,C_y}{3\,C_x} = \frac{2\,f}{3} = \frac{2}{3\,m}$$

$$dN_{útil\ máx} = \frac{\rho\, v^3\ dS}{2}\,(\ C_y\ \frac{4\,C_y^2}{9\,C_x^2} - C_x\ \frac{8\,C_y^3}{27\,C_x^3}\ ) = \frac{2\,\tau\ v^3\ dS}{27}\ \frac{C_y^3}{C_x^2}$$

Par motor máximo.- El par motor *dC* correspondiente al elemento de superficie de pala *dS* se

ha calculado anteriormente como:

$$dC = r\, dF_{par} = \frac{r}{2}\, \rho\, v^2\, dS\, (1 + cotg^2\theta)\, (C_y\, sen\, \theta - C_x\, cos\, \theta)$$

También se puede obtener a partir de la $dN_{útil}$ en la forma:

$$dC = \frac{dN_{útil}}{w} = \frac{dN_{útil}}{u}\, r = \frac{dN_{útil}}{v\, cotg\, \theta}\, r = \frac{r\, \rho\, v^2\, dS}{2}\, (C_y\, cotg\, \theta - C_x\, cotg^2\theta)$$

que se anula para: $cotg\, \theta = \frac{C_y}{C_x}$

La condición de par motor máximo se obtiene igualando a cero la anterior:

$$C_y = 2\, C_x\, cotg\, \theta \quad \Rightarrow \quad cotg\, \theta = \frac{C_y}{2\, C_x}$$

$$dC_{máx} = \frac{r\, \rho\, v^2\, dS}{2}\, (\frac{C_y^2}{2\, C_x} - \frac{C_x\, C_y^2}{4\, C_x^2}) = \frac{r\, \rho\, v^2\, dS}{8}\, \frac{C_y^2}{C_x}$$

Velocidad angular máxima.- La velocidad angular máxima $\breve{w}_{máx}$ es:

$$w_{máx} = (\frac{dN}{dC})_{máx} = \frac{\frac{2\, \rho\, v^3\, dS}{27}\, \frac{C_y^3}{C_x^2}}{\frac{r\, \rho\, v^2\, dS}{8}\, \frac{C_y^2}{C_x}} = \frac{16}{27}\, \frac{v}{r}\, \frac{C_y}{C_x} = \frac{\pi\, n_{máx}}{30}$$

En los aerogeneradores de eje horizontal, para obtener una velocidad angular $\breve{w}$ uniforme, es necesario que tanto la velocidad $\vec{v}$ del viento, como su dirección, permanezcan constantes respecto a la pala. La relación $TSR = cotg\, \theta$ está comprendida entre $0{,}2 \div 13$, lo que permite hacer la siguiente clasificación de maquinaria eólica de eje horizontal para $\begin{cases} grandes\ molinos,\ u/v < 1 \\ aerogeneradores\ de\ palas\ múltiples,\ u/v \approx 3 \\ aerogeneradores\ rápidos\ de\ hélice,\ u/v \approx 10 \end{cases}$

II.4.- MODELO TEÓRICO DE BETZ

Vamos a suponer que la energía eólica se puede recuperar y transformar mediante un aerogenerador de hélice (dato éste no estrictamente necesario, por cuanto la demostración es válida para cualquier otro medio de transformación).

La hélice se supone inmersa en una corriente de aire de velocidad $\vec{v}$ que, aguas abajo, posee una velocidad $\vec{v}_2$ no nula, lo que permite asegurar que no es posible la transformación y recuperación de toda la energía del viento en otra forma de energía.

Se supondrá que aguas arriba de la hélice, el aire que circula por el tubo de corriente indicado

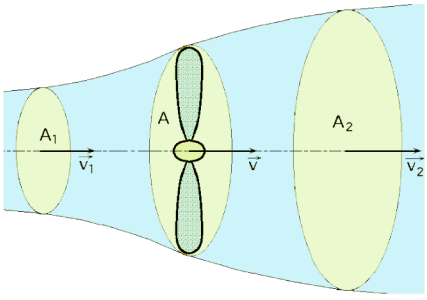


Fig II.15.- Modelo de Betz

en la Fig II.15, posee una velocidad $\vec{v}_1$ en la sección transversal ficticia A_1, que es la velocidad del viento sin perturbar, mientras que la velocidad $\vec{v}_2$ se corresponde con otra sección transversal ficticia A_2 aguas abajo de la zona en que se encuentra la hélice. En el plano que contiene la hélice, la sección transversal batida por la misma sería un disco imaginario de sección A, siendo $\vec{v}$ la velocidad útil del viento en la misma.

La hélice se supone como un disco de diámetro d que capta la energía del aire en movimiento que llega a él. Si el disco fuese capaz de captar toda la energía cinética del viento, aguas abajo del mismo el aire estaría en reposo y, por lo tanto, la velocidad sería $(v_2 = 0)$.

Suponiendo que el gasto másico G de aire que circula por el tubo es constante, se puede poner:

$$G = \rho\, A_1\, v_1 = \rho\, A_2\, v_2 = \rho\, A\, v$$

La variación de la energía cinética del viento en la unidad de tiempo es de la forma:

$$\Delta E_{cinética} = E_{c1} - E_{c2} = \frac{G}{2}\,(v_1^2 - v_2^2) = \frac{\rho\, A\, v}{2}\,(v_1^2 - v_2^2)$$

La fuerza $\vec{F}$ ejercida por el viento en la unidad de tiempo $\Delta t = 1$ sobre el área ficticia A barrida por la hélice, es igual a la variación de la cantidad de movimiento del aire que la atraviesa; el trabajo generado por esta fuerza $\vec{F}$ en la unidad de tiempo, es la potencia $N_{útil}$, de la forma:

$$N_{útil} = F\, v = \left| F = \frac{G\,\Delta v}{\Delta t} = \rho\, A\, v\,(v_1 - v_2) \right| = \rho\, A\, v^2\,(v_1 - v_2)$$

que es igual a la variación de energía cinética del aire, en el mismo tiempo, pudiéndose poner:

$$N_{útil} = \rho\, A\, v^2\,(v_1 - v_2) = \frac{\rho\, A\, v}{2}\,(v_1^2 - v_2^2) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Si se hace el cambio $v_2 = b\, v_1$ con $(0 < b < 1)$, resulta:

$$N_{útil} = \frac{\rho\, A\,(v_1 + v_2)}{4}\,(v_1^2 - v_2^2) = \frac{\rho\, A\, v_1^3}{4}\,(1 + b)\,(1 - b^2)$$

El máximo valor de $N_{útil}$ se obtiene haciendo $\frac{dN_{útil}}{db} = 0$, resultando

$$(1 - b^2) + (1 + b)\,(-2\,b) = 0 \quad ; \quad (1 + b)\,(1 - 3\,b) = 0$$

$$\text{cuyas soluciones son} \begin{cases} b = -1\,, \text{ que no cumple con la condición } (0 < b < 1) \\ b = \frac{1}{3} = \frac{v_2}{v_1} \quad ; \quad v_1 = 3\, v_2 \end{cases}$$

que permite hallar la potencia máxima suministrada por el rotor, de valor:

$$N_{útil\ máx} = \frac{\rho\ A\ v_1^3}{4}\ (1 + \frac{1}{3})\ (1 - \frac{1}{9}) = \frac{8\ \rho\ A\ v_1^3}{27} = 0{,}37\ A\ v_1^3$$

que se conoce como *ecuación de Betz*, y en la que se ha tomado como densidad media del aire (ρ = 1,25) kg/m^3, ya que en invierno ésta viene a ser del orden de 1,33 y en verano de 1,15.

De todo ésto se deduce que la potencia máxima teórica es proporcional al diámetro D del círculo barrido por la pala y al cubo de la velocidad nominal del viento $\vec{v}_1$.

Como la potencia del viento aguas arriba de la hélice, viene dada por la expresión:

$$N_{disponible\ viento} = \frac{\rho\ A\ v_1^3}{2} = 0{,}625\ A\ v_1^3$$

el rendimiento maximal aerodinámico (o factor de potencia maximal) es:

$$h_{maximal} = \frac{N_{útil\ máxima}}{N_{viento}} = \frac{16}{27} = 0{,}595 = 59{,}5\%$$

que es el límite teórico o *coeficiente de Betz*, resultado que ninguna máquina eólica, por muy sofisticada que sea, puede superar.

Consideraciones prácticas.- La ecuación de Betz proporciona el límite superior de las posibilidades de un aerogenerador, pero en sí es poco fina, pues no tiene en cuenta una serie de factores como la
- *resistencia aerodinámica de las palas*
- *pérdida de energía por la estela generada en la rotación*
- *compresibilidad del fluido*
- *interferencia de las palas*

El rendimiento práctico depende del tipo de rotor, por lo que multiplicando la expresión anterior de la potencia máxima teórica por un coeficiente del rendimiento teórico máximo, que compendia los factores anteriores, y que está comprendido en el intervalo $0{,}3 \div 0{,}8$ se obtiene:

$$N_{máxima\ real} = (0{,}11 \div 0{,}30)\ A\ v_1^3$$

En realidad habrá que tener en cuenta además el rendimiento de los diversos mecanismos que componen el aerogenerador; considerando para los distintos componentes el siguiente balance del rendimiento de
- *Betz, 59,3%*
- *la hélice, 85%*
- *el multiplicador, 98%*
- *el alternador, 95%*
- *el transformador, 98%*

, se obtiene un rendimiento global de la instalación del 46%.

En la práctica el rendimiento del aerogenerador es aún menor, por lo que se puede aceptar como un valor bastante razonable para la potencia del mismo, la expresión:

$N_{útil} = (0{,}11 \div 0{,}17)\, A\, v_1^3$

II.5.- ROTOR MULTIPALA

Fuerza axial sobre una pala.- Si la hélice tiene Z palas, siendo L la longitud de la cuerda del perfil y t el paso tangencial de las palas, la fuerza axial que se ejerce sobre un elemento de pala es:

$$dF_{axial} = \frac{1}{2}\ \frac{C_y\ \rho\ v^2\ \cos(\theta - \alpha)\, L\, dr}{\cos\alpha\ sen^2\theta}$$

Fuerza axial total.- La fuerza $dF_{axial\,total}$, para Z palas es:

$$dF_{axial\ total} = Z\, dF_{axial} = \frac{Z}{2}\ \frac{C_y\ \rho\ v^2\ \cos(\theta - \alpha)\, L\, dr}{\cos\alpha\ sen^2\theta}$$

Si se produjese un aprovechamiento total del viento $v_2 = 0$ se tendría que $v = \frac{v_1}{2}$, y la fuerza F_{total} en la dirección del eje del aerogenerador sería:

$$dF_{axial\ total} = \rho\ dA\, v\,(v_1 - v_2) = 2\ \rho\ dA\, v^2 = \left| dA = 2\,\pi\, r\, dr \right| = 4\,\pi\,\rho\ v^2\ r\, dr$$

Igualando las dos expresiones de $dF_{axial\,total}$ se obtiene:

$$\frac{Z}{2}\ \frac{C_y\ \rho\ v^2 \cos(\theta - \alpha)\, L\, dr}{\cos\alpha\ sen^2\theta} = 4\,\pi\ \rho\ v^2\ r\, dr \quad \Rightarrow \quad \frac{Z\, L\, C_y}{2\,\pi\ r} = \frac{4\cos\alpha\ sen^2\theta}{\cos(\theta - \alpha)}$$

Conocida la relación entre el paso tangencial t y el número de palas Z, se obtiene:

$$Z = \frac{2\,\pi\ r}{t}\ ;\quad \frac{Z}{2\,\pi\ r} = \frac{1}{t}\ ;\quad \frac{L\, C_y}{t} = 4\ \frac{\cos\alpha\ sen^2\theta}{\cos(\theta - \alpha)}$$

que es la relación que existe entre el ángulo de incidencia del viento α y el del movimiento relativo θ del mismo a la salida, en función de la longitud de la cuerda L, el paso t, y el coeficiente de sustentación C_y

Para una velocidad aguas abajo de la forma $v_2 = b\, v_1$ se tiene:

$$\frac{Z\, L\, C_y}{2\,\pi\ r} = \frac{4\cos\alpha\ sen^2\theta}{\cos(\theta - \alpha)}\ \frac{1 - b}{1 + b} = \frac{L\, C_y}{t} = SP = Parámetro\ de\ forma$$

Fuerza de par.- La fuerza de par dF_{par} es de la forma:

$$dF_{par} = dR\ sen(\theta - \alpha) = dF_{axial}\ \ tg(\theta - \alpha) = \frac{1}{2}\ \frac{C_y\ \rho\ v^2\ sen(\theta - \alpha)\, L\, dr}{\cos\alpha\ sen^2\theta}$$

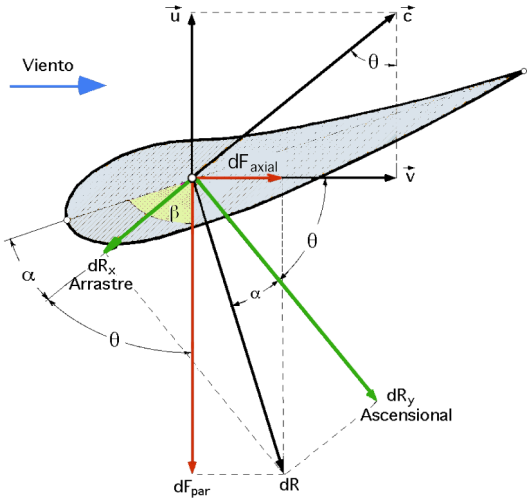


Fig II.16.- Fuerzas sobre un perfil de pala

El viento llega axialmente a una pala, pero sabemos que a la salida de la misma ha cambiado de dirección, adquiriendo una velocidad aparente $\vec{c}$ que tiene una componente $\vec{u}$ (igual y de signo contrario a la velocidad periférica de la pala).

El viento aparente a la entrada de la pala tiene una velocidad $\vec{c}_1$ y el viento aparente a la salida tiene una velocidad $\vec{c}_2$, Fig II.16, conformando a partir de los triángulos de velocidades, una componente para la velocidad aparente, de la forma:

$$c = c_1 - c_2 = 2\, u\, a = 2\, w\, r\, a$$

en la que
- w es la velocidad angular de la hélice
- r es la distancia de la sección dS considerada al eje de giro
- a es una variable a determinar, que depende de r, v, w y θ

Si se aplica el Teorema de la Cantidad de movimiento a la sección anular barrida por las palas de anchura dr y que es atravesada por el viento en el tiempo unidad $\Delta t = 1$, se tiene:

$$dF_{par}\,\Delta t = dG\,(c_1 - c_2) \xrightarrow{\Delta t = 1} dF_{par} = (2\,\pi\, r\, dr\, \rho\, v)\,(2\, w\, r\, a) = 4\,\pi\, \rho\, a\, w\, v\, r^2 dr$$

que es una expresión de dF_{par} para Z palas por cuanto en su determinación se ha tenido en cuenta el área barrida por las mismas, independientemente de su número.

Par motor.- El momento dC aplicado al elemento de superficie dS se obtiene multiplicando dR por su distancia r al eje de giro:

$$dC = dF_{par}\, r = 4\,\pi\, \rho\, a\, w\, v\, r^3 dr$$

La expresión de dC, para Z palas, es de la forma:

$$dC = 4\,\pi\, \rho\, a\, w\, v\, r^3 dr = \frac{Z}{2}\,\frac{C_y\, r\, \rho\, v^2\, sen\,(\theta - \alpha)\, L\, dr}{cos\,\alpha\, sen^2\theta}$$

e igualando ambas expresiones del par motor se obtiene:

$$\frac{Z\, C_y v\, L}{2}\,\frac{sen\,(\theta - \alpha)}{cos\,\alpha\, sen^2\theta} = 4\,\pi\, a\, w\, r^2 = \left| \; Z = \frac{2\,\pi\, r}{t} \quad ; \quad r = \frac{Z\, t}{2\,\pi} \; \right| = 4\,\pi\, a\, w\, r\,\frac{t\, Z}{2\,\pi}$$

función del radio r, paso t de las palas y su número Z, llegándose a:

$$\frac{L\, C_y}{t} = \frac{4\, a\, w\, r}{v}\,\frac{cos\,\alpha\, sen^2\theta}{sen\,(\theta - \alpha)} = \frac{SP}{2\,\pi}$$

siendo (SP) el parámetro de forma.

Igualando las expresiones encontradas para $\frac{L\,C_y}{t}$ se llega a:

$$\frac{4\,a\,w\,r}{v}\,\frac{\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta}{\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha)} = 4\,\frac{\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta}{\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{r\,w}{v} = \frac{tg\,(\theta-\alpha)}{a} = SR$$

Para una velocidad aguas abajo de la forma $v_2 = b\,v_1$, *se tiene:*

$$SR = \frac{1-b}{1+b}\,\frac{tg\,(\theta-\alpha)}{a}$$

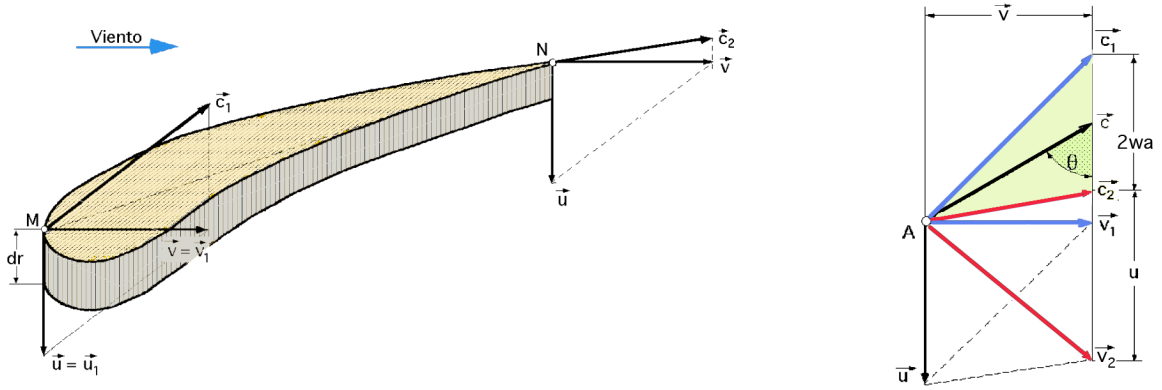


Fig II.17.- Triángulos de velocidades a la entrada y salida del perfil

Teniendo en cuenta los triángulos de velocidades a la entrada, a la salida y en el centro de sustentación de la pala, Fig II.17, se encuentra el valor de a:

$$tg\,\theta = \frac{v}{w\,r - w\,a\,r} = \frac{v}{w\,r\,(1-a)} = \frac{v}{u\,(1-a)} = \frac{1}{SR\,(1-a)} \quad ; \quad a = 1 - \frac{1}{SR\,tg\,\theta}$$

deduciéndose una relación entre la velocidad del viento $\vec{v}$ y la velocidad tangencial de las palas $\vec{u}$, en función de los ángulos θ y α, de la forma:

$$v\,\{tg\,\theta\;tg\,(\theta-\alpha)+1\} = w\,r\,tg\,\theta = \frac{\pi\,n}{30}\,r\,tg\,\theta \quad ; \quad \frac{v}{r\,w} = \frac{v}{u} = \frac{tg\,\theta}{tg\,\theta\;tg\,(\theta-\alpha)+1} = \frac{1}{SR}$$

La representación gráfica de las ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{SP}{2\,\pi} = \dfrac{C_y\,L}{t} = \dfrac{4\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\,(\theta-\alpha)}\,\dfrac{1-b}{1+b} \\ SR = \dfrac{1-b}{1+b}\,tg\,(\theta-\alpha) + \dfrac{1}{tg\,\theta} \end{cases}$, en función del

ángulo θ se presenta en la Fig II.18, en el intervalo $(0^o < \theta < 70^o)$, para diversas situaciones de la velocidad del viento aguas abajo $(b = 0,\ y\ b = 0{,}448)$, y diversos ángulos de ataque $(\alpha = 1^o\ y\ \alpha = 8^o)$; se observa que en el intervalo de valores de α comprendidos entre 0º y 6º, el valor de SR pasa por un mínimo para θ del orden de 45º.

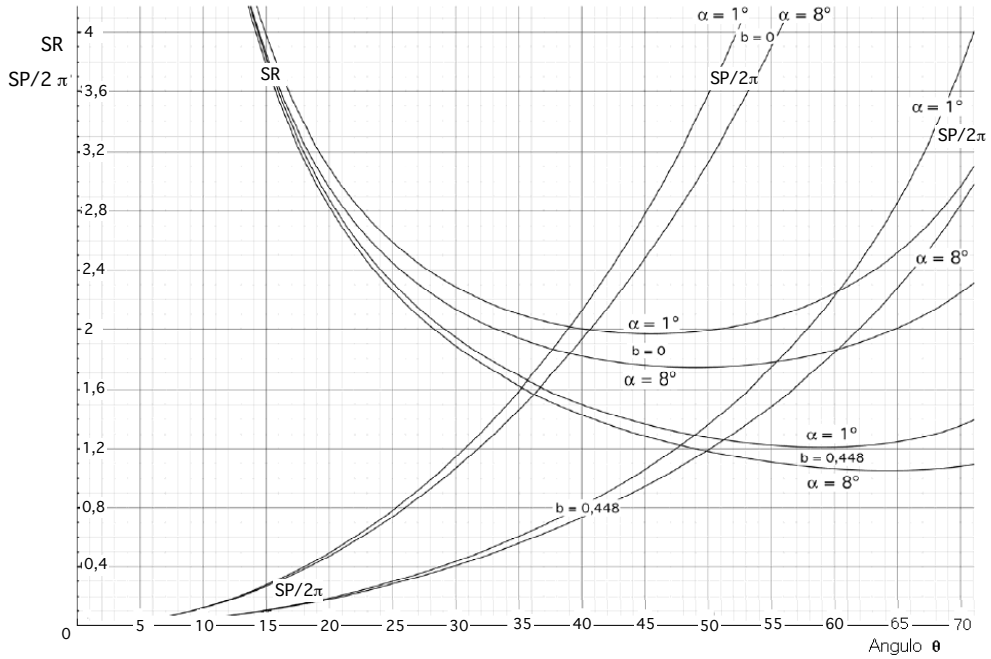


Fig II.18. Parámetros de diseño

Si se fija la velocidad angular $\breve{w}$, el flujo de aire se hace maximal cuando $\frac{SP}{2\,\pi} = \frac{L\,C_y}{t}$ alcanza, para $b = 0$, valores comprendidos entre $1{,}8 < \frac{L\,C_y}{t} < 2$ que son demasiado elevados, lo que implicaría el riesgo de desprendimiento de la pala y la consiguiente destrucción del aparato.

Si se considera la estadística de Rayleigh, en la que:

$$v_1 = v\,\sqrt{\frac{6}{\pi}} = 1{,}382\,v \;\Rightarrow\; \begin{cases} v = \dfrac{v_1}{1{,}382} = 0{,}724\,v_1 \\ v_2 = 0{,}618\,v = 0{,}448\,v_1 = b\,v_1 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}448 \end{cases}$$

, resultando $1 < \frac{L\,C_y}{t} < 1{,}2$ que es un valor más razonable

Los valores de la fuerza axial total y la relación $\frac{L\,C_y}{t}$ serían:

$$dF_{axial\ total} = 2\,\pi\,r\,dr\,\rho\,v\,(v_1 - v_2) = 2\,\pi\,r\,dr\,\rho\,v^2\,(1{,}382 - 0{,}618) = 4{,}8\,\rho\,v^2 r\,dr$$

$$\frac{L\,C_y}{t} = 1{,}525\,\frac{\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta}{\cos(\theta - \alpha)}$$

pudiéndose volver a repetir con estos datos el método anteriormente expuesto.

Estas velocidades no afectan al par motor ya que no se han tenido en cuenta en su deducción, ya que la fuerza de par total se ha obtenido a partir del área barrida por las palas.

II.6.- TEORÍA TURBILLONARIA DE HÉLICES EÓLICAS

En lo anteriormente visto, las pérdidas de energía que se han considerado son mínimas, ya que se han despreciado algunos efectos importantes como son la pérdida de potencia por el giro de la es-

tela, la interferencia de las palas, la resistencia aerodinámica de las mismas, la compresibilidad del aire, etc. En la teoría de la pala no se han considerado velocidades inducidas, ni la rotación de la estela, defectos que se subsanan en la teoría turbillonaria.

La velocidad del viento aguas arriba del rotor es $\vec{v}_1$ y al llegar al rotor se modifica de forma que su valor es $\vec{v}_1$ menos una velocidad inducida axial que llamamos $v_{ind\ axial} = k\, v_1$, Fig II.19.

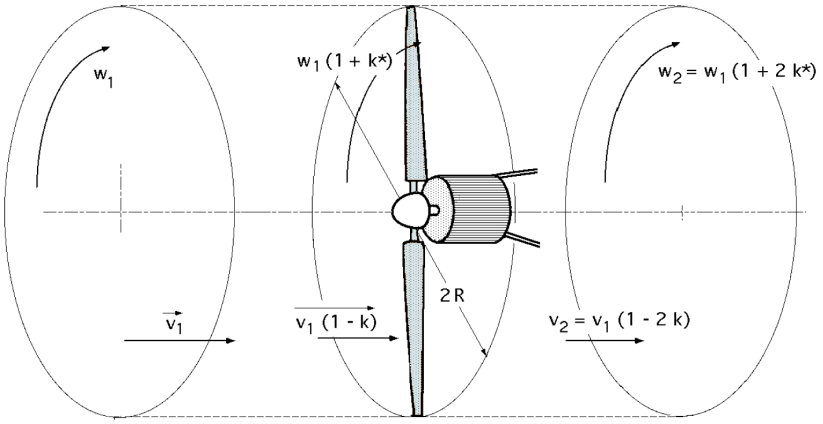


Fig II.19.- Velocidades inducidas axiales y de rotación

Se puede considerar, por lo tanto, que la velocidad del viento en el rotor es de la forma:

$$v = v_1\,(1 - k)$$

De igual manera, a la estela se la puede suponer que aguas arriba del rotor gira con una velocidad angular $\vec{w}_1$; al llegar al rotor, el valor de $\vec{w}_1$ se ve afectado por una velocidad inducida de rotación de la forma:

$$v_{ind\ rot} = k^*\, w_1$$

por lo que se puede considerar que la velocidad angular de la estela en el rotor es:

$$w = w_1\ (1 + k^*)$$

Aguas abajo del rotor, la velocidad $\begin{cases} \text{axial de salida del viento es: } v_2 = v_1\,(1 - 2\,k) \\ \text{angular de la estela es: } w_2 = w_1\ (1 + 2\,k^*) \end{cases}$

Aplicando el Teorema de la cantidad de movimiento y del momento cinético al elemento diferencial de espesor *dr*, a la distancia *r* del eje de giro, se obtiene para una pala:

$$dF_{axial\ total} = \rho\ dA\ v\,(v_1 - v_2) = \left| \begin{array}{l} v = v_1\,(1 - k) \\ v_2 = v_1\,(1 - 2\,k) \end{array} \right| = \rho\ (2\,\pi\ r\,dr)\ v_1\,(1 - k)\ \{v_1 - v_1\,(1 - 2\,k)\} = 4\,\pi\ \rho\ k\ r\,dr\ v_1^2\,(1 - k)$$

$$dC = 2\,\pi\ r\,dr\ \rho\ v\ r\,(u_2 - u_1) = \left| \begin{array}{l} u_2 = r\,w_2 \\ u_1 = r\,w_1 \end{array} \right| = 2\,\pi\ r^3\ dr\ \rho\ v\,(w_2 - w_1) =$$

$$= 2\,\pi\,r^3\,dr\,\rho\,v_1\,(1-k)\{w_1\,(1+2\,k^*)-w_1\} = 4\,\pi\,r^3\,dr\,\rho\,v_1\,(1-k)\,w_1\,k^*$$

La fuerza $dF_{axial\,total}$ para Z palas (deducida anteriormente) quedaría en la forma:

$$dF_{axial\,total} = \frac{Z}{2}\,\frac{C_y\;\rho\;v^2\cos(\theta-\alpha)\,L\,dr}{\cos\alpha\;sen^2\theta} = \left| v = v_1(1-k) \right| = Z\,\frac{C_y\;\rho\;v_1^2(1-k)^2\cos(\theta-\alpha)\,L\,dr}{2\cos\alpha\;sen^2\theta}$$

Igualmente, la fuerza dF_{par} para Z palas es:

$$dF_{par\,total} = Z\,\frac{C_y\;\rho\;v^2\;sen(\theta-\alpha)\,L\,dr}{2\cos\alpha\;sen^2\theta} = \left| v = v_1(1-k) \right| = Z\,\frac{C_y\;\rho\;v_1^2(1-k)^2 sen(\theta-\alpha)\,L\,dr}{2\cos\alpha\;sen^2\theta}$$

y el par motor:

$$dC = dF_{par}\,r = \frac{Z\,C_y\;\rho\;v_1^2(1-k)^2\;sen(\theta-\alpha)\,L\,dr}{2\cos\alpha\;sen^2\theta}\,r$$

Igualando las dos expresiones de $dF_{total\,axial}$ se obtiene:

$$4\,\pi\;\rho\;k\,r\,dr\,v_1^2(1-k) = Z\,\frac{C_y\;\rho\;v_1^2(1-k)^2\cos(\theta-\alpha)\,L\,dr}{2\cos\alpha\;sen^2\theta}$$

$$\frac{k}{1-k} = \frac{Z\,L\,C_y}{8\,\pi\,r}\,\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha\;sen^2\theta} = \left| Solidez\;\Omega = \frac{Z\,L}{\pi\,r} \right| = \frac{\Omega\;C_y}{8}\,\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha\;sen^2\theta}$$

Haciendo lo mismo con las dos expresiones del momento:

$$4\,\pi\;r^3 dr\,\rho\;v_1\;(1-k)\,w_1\;k^* = \frac{Z\,C_y\;\rho\;v_1^2(1-k)^2\;sen(\theta-\alpha)\,L\,dr}{2\cos\alpha\;sen^2\theta}\,r$$

$$\frac{k^*}{1-k^*} = \frac{Z\,v_1\,L\,C_y}{8\,\pi\,r^2\,w_1}\,\frac{sen(\theta-\alpha)}{\cos\alpha\;sen^2\theta} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{v}{u} = tg\,\theta = \dfrac{v_1(1-k)}{r\,w_1(1+k^*)} \\ \dfrac{v_1}{r\,w_1} = \dfrac{1+k^*}{1-k}\,tg\,\theta \end{array} \right| = \frac{Z\,L\,C_y}{8\,\pi\,r}\,\frac{1+k^*}{1-k}\,tg\,\theta\,\frac{sen(\theta-\alpha)}{\cos\alpha\;sen^2\theta}$$

$$\frac{k^*}{1+k^*} = \frac{Z\,L\,C_y}{8\,\pi\,r}\,\frac{sen(\theta-\alpha)}{sen\,\theta\,\cos\theta\,\cos\alpha} = \left| Solidez\;\Omega = \frac{Z\,L}{\pi\,r} \right| = \frac{\Omega\;C_y}{8}\,\frac{sen(\theta-\alpha)}{sen\,\theta\,\cos\theta\,\cos\alpha}$$

$$TSR = \frac{u_1}{v_1} = \frac{R\,w_1}{v_1} = \frac{(1-k)\,cotg\,\theta}{r\,(1+k^*)}$$

Las expresiones anteriores permiten un procedimiento de cálculo de palas de aerogeneradores calculando los valores de k y k^*:

En primer lugar se toma una sección cualquiera del perfil ya diseñado, con su espesor, cuerda, etc, y se supone inicialmente un ángulo de ataque α*, que junto con la torsión ó calaje* β *que se ha dado a la pala, permiten entrar en las expresiones:*

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\Omega\ C_y}{8}\ \frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha\ \text{sen}^2\theta}$$

$$\frac{k^*}{1+k^*} = \frac{\Omega\ C_y}{8}\ \frac{\text{sen}(\theta-\alpha)}{\text{sen}\,\theta\ \cos\theta\ \cos\alpha}$$

de las que se conoce todo el segundo miembro.

Los ángulos de ataque que van apareciendo, deben ser tales que no produzcan discontinuidades a lo largo de la pala.

Conocidos k y k se entra en:*

$$TSR = \frac{u_1}{v_1} = \frac{R\,w_1}{v_1} = \frac{(1-k)\,\text{cotg}\,\theta}{1+k^*}$$

y si el valor obtenido para el TSR es correcto, se ha concluido; si no es así habrá que iniciar de nuevo un proceso iterativo.

Para el estudio general se toma un determinado perfil, y se calcula el valor de C_y para cada ángulo de ataque y para cada espesor, para diversos valores de α, y con ello se prepara un programa informático que permita obtener datos para cada situación.

Como la velocidad del viento aguas abajo del rotor es:

$v_2 = v_1\ (1 - 2\,k)$

el valor de k no puede ser mayor de 0,5 porque implicaría velocidades negativas.

Un buen valor de *k,* que estaría de acuerdo con los valores de *b* dados por la estadística de Weibull, es:

$$k = \frac{1-b}{2} = \frac{1-0{,}448}{2} = 0{,}276$$

II.7.- OPTIMIZACIÓN DE UNA INSTALACIÓN EÓLICA

La optimización de una instalación eólica radica en conseguir la máxima generación de energía para un coste dado. Por tanto, y teniendo en cuenta que el coste principal procede de la amortización de la inversión, es evidente que el objetivo es conseguir que el equipo instalado genere la mayor cantidad de energía posible. Esta energía se puede calcular como la potencia eléctrica media que ha generado la instalación a lo largo de un año, multiplicada por el número de horas de ese año.

Suponiendo que la velocidad del viento se puede representar como una variable aleatoria de la función de densidad *f(v)*, la potencia eléctrica media generada será:

$$N_{eléct.\ generada} = \frac{\rho\ A}{2}\ \int_{v_{conex}}^{v_{nom}} \eta_p\ \eta_m\ \eta_g\ v\ f(v)\ dv + \frac{\rho\ A\ \eta_p\ \eta_m\ \eta_g\ v}{2}\ \int_{v_{nom}}^{v_{emb}} f(v)\ dv = \eta_p\ \eta_m\ \eta_g\ N_{viento}$$

en la que:

$\eta_p < 59{,}5\%$, *es la eficiencia conque la energía del viento se convierte en energía mecánica (Betz)*

$\eta_m < 0{,}83$, *es la eficiencia conque la energía mecánica es cedida al generador a través de la transmisión mecánica*

$\eta_g < 0{,}93$, *es la eficiencia conque la energía cedida al generador se transforma en electricidad*

Por lo tanto, para un emplazamiento dado se debe escoger un aerogenerador cuyos parámetros v_{conex}, v_{nom} y v_{emb} hagan máxima esta potencia eléctrica media. Para que este cálculo se pueda realizar, es necesario conocer la función de distribución de velocidades del viento *f(v)* y la relación existente entre η_p, η_m y η_g con la velocidad del viento *v*; no obstante, debido a que el funcionamiento del generador para potencias inferiores a la nominal es poco conveniente, se puede realizar la optimización considerando solamente la segunda integral de la ecuación anterior.

Además, como es evidente, el generador óptimo (independientemente de las características del viento), debería tener $\begin{cases} v_{conex} = 0 \\ v_{emb} = \infty \end{cases}$, quedando como parámetro a elegir el valor de $(v_{nom} = v)$; pero ésto no es posible por cuanto la $\begin{cases} v_{conex} > 0 \text{ debido a la existencia de rozamientos y pérdidas} \\ v_{emb} < \infty \text{ por razones de resistencia mecánica de las palas} \end{cases}$

Para calcular el valor de v_{nom} que hace óptimo a $N_{eléctr.\ generada}$ se puede efectuar una simplificación adicional, basándose en que N_n es proporcional al cubo de v_{nom}; en primera aproximación, se puede suponer además que $(v_{emb} = \infty)$, obteniéndose:

$$\frac{dN_{eléctrica\ generada}}{dv_{nominal}} = 0$$

En el caso de utilizar la distribución de Rayleigh se tiene:

$$v_{nominal} = v\ \sqrt{\frac{6}{\pi}} = 1{,}382\ v = v_1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_1}{1{,}382} = 0{,}724\ v_1$$

y en el caso de utilizar la distribución de Weibull (*k* factor de distribución de forma):

$$v_{nominal} = \frac{\hat{v}}{\Gamma(1 + \frac{1}{k})}\ (\frac{3}{k})^{\frac{1}{k}}$$

Si no se acepta esta simplificación, la ecuación resultante sería:

Para la distribución de Rayleigh: $\{3 - \frac{\pi}{2} (\frac{v_{nom}}{\hat{v}})^2 \} e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{v_{nom}}{\hat{v}})^2} = 3\, e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{v_{emb}}{\hat{v}})^2}$

Para la distribución de Weibul: $\{3 - k (\frac{v_{nom}}{c})^k \} e^{(\frac{v_{nom}}{c})^k} = 3\, e^{-(\frac{v_{emb}}{c})^k}$

Para valores pequeños de v la influencia de v_{emb} es despreciable y se puede utilizar la $v_{nominal}$ de Weibull anterior, pero conforme v aumenta, la diferencia entre ambas expresiones se hace cada vez mayor.