III.- CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN ESTACIONARIO EN FUNCIÓN DE DOS O MAS VARIABLES

pfernandezdiez.es

III.1.- MÉTODO ANALÍTICO

En los casos de conducción de calor estudiados se ha supuesto que la distribución de temperaturas era función de una sola variable, (sistemas unidimensionales), en régimen estacionario. En el presente capítulo vamos a estudiar la conducción térmica en función de dos o más variables independientes en régimen estacionario, y aunque las soluciones analíticas obtenidas para estos casos tengan muy poco valor práctico, se incluyen para hacer resaltar las técnicas matemáticas que han de utilizarse en casos más complejos y de mayor utilidad que se abordarán en el régimen transitorio. Cuando se tenga más interés en los resultados finales que en el desarrollo matemático de las soluciones, la obtención de éstas en algunos problemas de importancia práctica se han conseguido con ayuda de gráficas relativamente sencillas.

CONDUCCIÓN EN RÉGIMEN PERMANENTE EN PLACAS RECTANGULARES.- Vamos a estudiar en primer lugar la conducción en régimen permanente de una placa rectangular como la representada en la Fig III.1.

Para calcular la distribución de temperaturas en la placa utilizaremos coordenadas cartesianas, considerando como plano (x,y) el de la placa y como origen de coordenadas el vértice.

Supondremos que no existe conducción en la dirección z, normal a la placa; ésto se cumplirá si la placa tiene una gran longitud en esta dirección, *sólido infinito*, de forma que no se produzcan efectos de borde L >> b; L >> a, o que éstos efectos sean despreciables, o si las caras x, y están aisladas térmicamente.

La ecuación de conducción del calor para el régimen permanente, en coordenadas cartesianas y dos dimensiones es $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, que es una ecuación diferencial lineal a la que se puede aplicar el principio de superposición.

La solución de la ecuación anterior se obtiene suponiendo que la distribución de temperaturas se puede expresar como el producto de dos funciones, cada una de las cuales depende solamente de una de las variables independientes; es decir, que si $\begin{cases} X(x) \text{ es únicamente función de } x \\ Y(y) \text{ es únicamente función de } y \end{cases}$ *, podemos suponer que la temperatura viene dada por:*

$$T = X(x)\, Y(y)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación diferencial de partida y ordenando la expresión resultante, se tiene:

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad - \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

Como cada miembro de esta ecuación depende sólo de una variable, los dos miembros tienen que ser iguales a una constante λ^2 por lo que se puede poner:

$$- \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \lambda^2$$

sistema que es equivalente al de las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \lambda^2 Y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{cuyas soluciones son:} \left\{\begin{array}{l} Y = B_1\ Sh(\lambda\, y) + B_2\ Ch(\lambda\, y) \\ X = B_3\ sen(\lambda\, x) + B_4\ cos(\lambda\, x) \end{array}\right.$$

por lo que la distribución de temperaturas es:

$$T = \{B_1\ Sh(\lambda\, y) + B_2\ Ch(\lambda\, y)\}\{B_3\ sen(\lambda\, x) + B_4\ cos(\lambda\, x)\}$$

en la que λ y las B son constantes que hay que determinar mediante las condiciones de contorno.

Placa rectangular con distribución de temperatura dada en una arista y nula en las demás.- Consideremos la placa rectangular de la Fig III.2 de dimensiones respectivas a y b, según los ejes x e y. Se puede suponer que la temperatura es nula en los bordes (x = 0), (x = a), (y = 0) y variable en el borde (y = b), que se puede representar como f(x) en el campo $0 \le x \le L$, de forma que se opera como si fuese conocida. La anulación de la temperatura en los otros bordes no es esencial, pues basta conque se mantenga constante, tal como T_c, por lo que el problema se puede reducir al expuesto anteriormente mediante la superposición de una constante $-T_c$ a toda la configuración

Las condiciones de contorno que hay que aplicar a la ecuación general para la determinación de las constantes son, Fig III.2, las siguientes:

Para: $\begin{cases} x = 0,\ T = 0 \quad ; \quad x = a,\ T = 0 \\ y = 0,\ T = 0 \quad ; \quad y = b,\ T = f(x) \end{cases}$

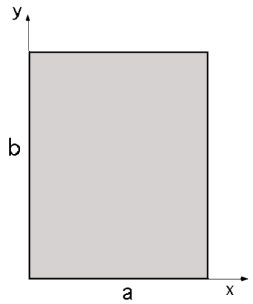


Fig III.1

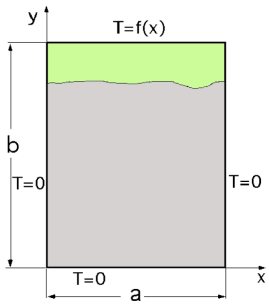


Fig III.2

La aplicación de las condiciones $\begin{cases} y = 0,\ T = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \\ x = 0,\ T = 0 \Rightarrow B_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ que la ecuación general se reduzca a:

$$T = B_1\ Sh\ (\lambda\ y)\ B_3\ \ sen\ (\lambda\ x) = B\ Sh\ (\lambda\ y)\ sen\ (\lambda\ x)$$

en la que B sustituye al producto: $B = B_1\, B_3$

La aplicación de la condición: $\begin{cases} x = a \\ T = 0 \end{cases} \Rightarrow B\ Sh\ (\lambda y)\ sen\ (\lambda\ a) = 0$

Para que esta ecuación se cumpla para todos los valores de *y*, es necesario que: $sen\ (\lambda\ a) = 0$, que se satisface para: $\lambda = 0,\ \frac{\pi}{a},\ \frac{2\ \pi}{a}$, ... y, en general, por: $\lambda_n = \frac{\pi\ n}{a}$, siendo $n = 0, 1, 2, ...$

Para cada valor de *n* se obtiene un valor de λ que proporciona una solución diferente de la ecuación:

$$T = B\ Sh\ (\lambda\ y)\ sen\ (\lambda\ x)$$

por lo que la solución general será la suma de todas estas soluciones parciales, es decir:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\ \ Sh\ (\lambda_n y)\ sen\ (\lambda_n x)$$

en la que B_n representa la constante B para cada una de las soluciones.

Para: $n = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_n = 0$, por lo que el primer sumando de la serie se anula, obteniéndose:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ Sh\ (\lambda_n y)\ sen\ (\lambda_n x)$$

La aplicación de la condición $\begin{cases} y = b \\ T = f(x) \end{cases}$ conduce al cálculo de B_n

$$T = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ \ Sh\ (\lambda_n b)\ sen\ (\lambda_n x),\ \ con,\ \lambda_n = \frac{\pi\ n}{a}\ ,\ \ n = 0, 1, 2, 3, ...\ ;\ \ 0 \le\ x\ \le a$$

En una serie infinita de funciones:

$$sen\ (\lambda_1 x),\ \ sen\ (\lambda_2 x),\ \ sen\ (\lambda_3 x),\ ...\ ,\ sen\ (\lambda_n x),\ ...$$

éstas son ortogonales, cuando se cumple que:

$$\int_0^a sen\,(\lambda_i x)\; sen\,(\lambda_j x)\; dx = 0\;,\;\; con:\;\; i \neq j$$

y tiene un valor determinado en un instante considerado.

Por lo tanto, si la serie:

$$T = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\; Sh(\lambda_n b)\; sen(\lambda_n x) = B_1\; Sh(\lambda_1 b)\; sen(\lambda_1 x) \;+\; \ldots \;+\; B_n\; Sh(\lambda_n b)\; sen(\lambda_n x)$$

es convergente e integrable, y la multiplicamos por $sen(\lambda_n x)$, se obtiene:

$$\int_0^a f(x)\; sen\,(\lambda_n x)\; dx = B_1\; Sh\,(\lambda_1 b) \int_0^a sen\,(\lambda_1 x)\; sen\,(\lambda_n x)\; dx + \ldots + B_n\; Sh\,(\lambda_n b) \int_0^a sen^2\,(\lambda_n x)\; dx + \ldots$$

Por definición de ortogonalidad se hacen cero todas las integrales del segundo miembro, menos la correspondiente al coeficiente B_n por lo que:

$$B_n\; Sh\,(\lambda_n b) = \frac{\int_0^a f(x)\; sen\,(\lambda_n x)\; dx}{\int_0^a sen^2\,(\lambda_n x)\; dx} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x)\; sen\,(\lambda_n x)\; dx$$

y la expresión de la distribución de temperaturas toma la siguiente forma:

$$T = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh\;(\lambda_n y)}{Sh\;(\lambda_n b)}\; sen\;(\lambda_n x) \int_0^a f(x)\; sen\;(\lambda_n x)\; dx = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh\;\frac{\pi\; n\; y}{a}}{Sh\;\frac{\pi\; n\; b}{a}}\; sen\;\frac{\pi\; n\; x}{a} \int_0^a f(x)\; sen\;\frac{\pi\; n\; x}{a}\; dx$$

El calor que atraviesa una superficie se determina a partir de la ecuación de Fourier, particularizando para dicha superficie e integrando a lo largo de ella.

Para el caso particular del calor transmitido a través de la superficie (x = 0), por unidad de longitud, perpendicular al plano (x, y), se tiene:

$$Q_{x=0} = \int_{y=0}^{b} k\; \frac{\partial T(x,\, y)}{\partial x}\Big\rangle_{x=0}\; dy =$$

$$= \int_{y=0}^{b} \{-\frac{2\,k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh\;\frac{\pi\; n\; y}{a}}{Sh\;\frac{\pi\; n\; b}{a}}\; cos\;\frac{\pi\; n\; x}{a}\;\frac{\pi\; n}{a} \int_0^a f(x)\; sen\;\frac{\pi\; n\; x}{a}\; dx + f(x)\; sen\;\frac{\pi\; n\; x}{a}\; sen\;\frac{\pi\; n\; x}{a}\}_{x=0}$$

$$= \int_{y=0}^{y=b} -\frac{2\,k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh\;\frac{\pi\; n\; y}{a}}{Sh\;\frac{\pi\; n\; b}{a}}\;\frac{\pi\; n}{a} \int_0^a f(x)\; sen\;\frac{\pi\; n\; x}{a}\; dx\Big\rangle\; dy =$$

$$= -\frac{2\,k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ch\;\frac{\pi\; n\; y}{a}\Big\rangle_0^b}{\frac{\pi\; n}{a}\; Sh\;\frac{\pi\; n\; b}{a}}\;\frac{\pi\; n}{a} \int_0^a f(x)\; sen\;\frac{\pi\; n\; x}{a}\; dx = -\frac{2\,k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ch\;\frac{\pi\; n\; b}{a} - 1}{Sh\;\frac{\pi\; n\; b}{a}} \int_0^a f(x)\; sen\;\frac{\pi\; n\; x}{a}\; dx$$

Placa con un borde a temperatura uniforme.- En el caso particular Fig III.3 de que el borde *(y = b)* se mantenga a temperatura constante, $f(x) = T_0$, y teniendo en cuenta que:

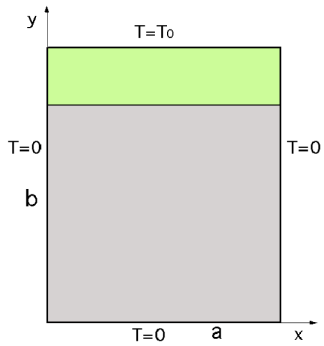


Fig III.3

$$\int_0^a T_0 \; sen \; \frac{\pi \; n \; x}{a} \; dx = \frac{T_0 \; a}{\pi \; n} \; \{1 - (-1)^n \}$$

la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{T}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh \; \frac{\pi \; n \; y}{a}}{Sh \; \frac{\pi \; n \; b}{a}} \; \frac{1 - (-1)^n}{\pi \; n} \; sen \; \frac{\pi \; n \; x}{a} = 4 \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \frac{Sh \; \frac{\pi \; n \; y}{a}}{Sh \; \frac{\pi \; n \; b}{a}} \; \frac{sen \; \frac{\pi \; n \; x}{a}}{\pi \; n}$$

que permite calcular la temperatura en cualquier punto de la placa.

En la Fig III.4 se representa la forma de las isotermas de una placa rectangular calentada por un borde.

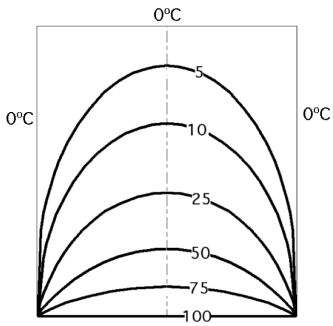


Fig III.4.- Isotermas de una placa rectangular con un borde caliente

- Si el borde caliente es la base inferior, y los demás están a T = 0, la solución se encuentra cambiando y por (b - y):

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,}^{\infty} \frac{Sh \; \frac{\pi \; n \; (b - y)}{a}}{Sh \; \frac{\pi \; n \; b}{a}} \; \frac{sen \; \frac{\pi \; n \; x}{a}}{\pi \; n}$$

- Si el borde caliente es el correspondiente a (x = a) y los demás están a T = 0, la solución se encuentra cambiando y por x ; x por y ; a por b ; b por a:

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,}^{\infty} \frac{Sh \; \frac{\pi \; n \; x}{b}}{Sh \; \frac{\pi \; n \; a}{b}} \; \frac{sen \; \frac{\pi \; n \; y}{b}}{\pi \; n}$$

- Si el borde caliente es el correspondiente a (x = 0) y los demás están a T = 0, la solución se encuentra cambiando en el caso anterior, x por (a - x):

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,}^{\infty} \frac{Sh \; \frac{\pi \; n \; (a - x)}{b}}{Sh \; \frac{\pi \; n \; a}{b}} \; \frac{sen \; \frac{\pi \; n \; y}{b}}{\pi \; n}$$

Placa rectangular con distribución de temperaturas en dos bordes opuestos.- La placa rectangular con distribución de temperaturas en dos bordes opuestos se puede reducir al caso anterior mediante una simple superposición. Consideremos, por ejemplo, el caso que se presenta en la Fig III.5, en el que la placa tiene la distribución, $\begin{cases} T = f(x), \; para \; (y = b) \\ T = \varphi(x), \; para \; (y = 0) \end{cases}$.

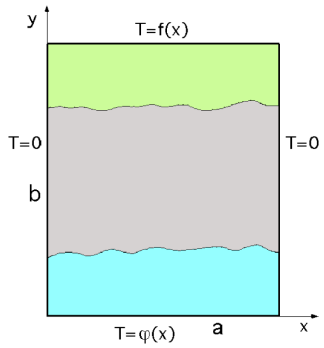


Fig III.5

Si se mantienen los otros bordes a T = 0, se tiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\ ,\ para:\ \begin{cases} y = b\ ,\ T = f(x) \\ y = 0\ ,\ T = \varphi(x) \end{cases}\ ;\quad \begin{cases} x = 0\ ,\ T = 0 \\ x = a\ ,\ T = 0 \end{cases}$$

Debido al carácter lineal de la ecuación diferencial se puede reducir a dos sistemas más sencillos, definiendo u y v de modo que: $T = u + v$

Los símbolos u y v se emplean para designar las soluciones de los dos sistemas siguientes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ ;\ \ para:\ \begin{cases} y = b\ ;\ u = f(x) \\ y = 0\ ;\ u = 0 \end{cases}\ ;\quad \begin{cases} x = 0\ ;\ u = 0 \\ x = a\ ;\ u = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\ ;\ \ para:\ \begin{cases} y = b\ ;\ v = 0 \\ y = 0\ ;\ v = \varphi(x) \end{cases}\ ;\quad \begin{cases} x = 0\ ;\ v = 0 \\ x = a\ ;\ v = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema de la primera de estas ecuaciones es:

$$u = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh\ \frac{\pi\, n\, y}{a}}{Sh\ \frac{\pi\, n\, b}{a}}\ sen\ \frac{\pi\, n\, x}{a}\ \int_0^a f(x)\ sen\ \frac{\pi\, n\, x}{a}\ dx$$

$$\text{Si, } f(x) = T_0\ \ ;\ \ u = 4\, T_0 \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} \frac{Sh\ \frac{\pi\, n\, y}{a}}{Sh\ \frac{\pi\, n\, b}{a}}\ \frac{sen\ \frac{\pi\, n\, x}{a}}{\pi\, n}$$

y mediante el cambio de variable *(y'= b - y)* la solución anterior se aplica a la segunda ecuación, quedando:

$$v = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh\ \frac{\pi\, n\, (b - y)}{a}}{Sh\ \frac{\pi\, n\, b}{a}}\ sen\ \frac{\pi\, n\, x}{a}\ \int_0^a f(x)\ sen\ \frac{\pi\, n\, x}{a}\ dx$$

La solución de la ecuación $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, con sus condiciones de contorno, es la suma de las anteriores:

$$T = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\ \frac{\pi\, n\, x}{a}}{Sh\ \frac{\pi\, n\, b}{a}}\ \left(Sh\ \frac{\pi\, n\, y}{a} + Sh\ \frac{\pi\, n\, (b - y)}{a}\right)\ \int_0^a f(x)\ sen\ \frac{\pi\, n\, x}{a}\ dx$$

Distribución de temperaturas en más de una superficie de contorno.- Una generalización para cuando varias superficies tengan temperaturas diferentes, como es el caso de la placa que se propone en la Fig III.6 con diferentes condiciones de contorno, la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\,;\quad para:\ \begin{cases} y = b\,;\ T = f_2(x) \\ y = 0\,;\ T = T_2 \end{cases}\ ;\ \begin{cases} x = 0\,;\ T = T_1 \\ x = a\,;\ T = f_1(y) \end{cases}$$

que se transforma, restando a todas las caras T_1, en:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0\,;\ para:\ \begin{cases} y = b\,;\ \Phi = f_2(x) - T_1 \\ y = 0\,;\ \Phi = T_2 - T_1 \end{cases}\ ;\ \begin{cases} x = 0\,;\ \Phi = 0 \\ x = a\,;\ \Phi = f_1(y) - T_1 \end{cases}$$

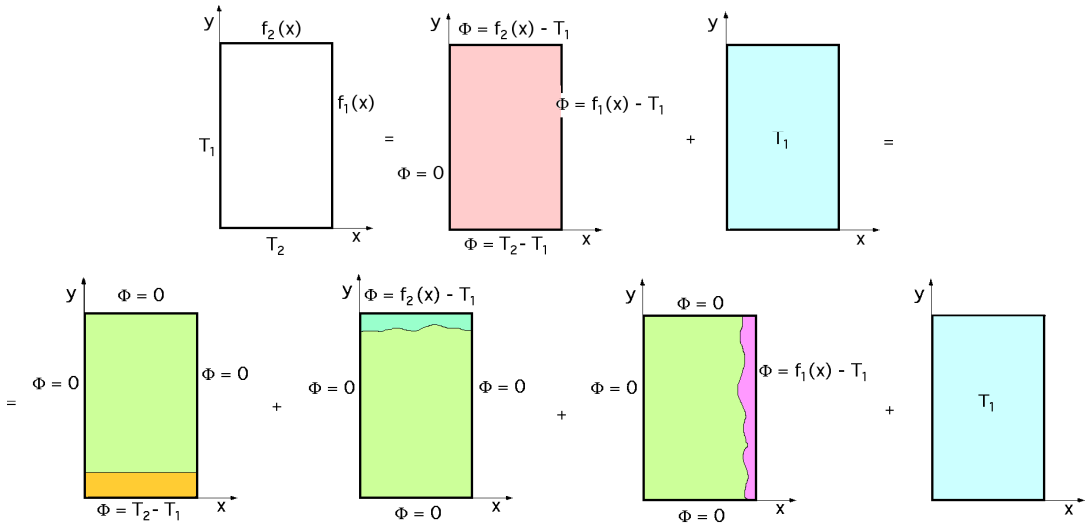


Fig III.6.- Distribución de temperaturas en más de una superficie de contorno

Este sistema se puede descomponer en otros tres de la forma:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0\ ;\ para:\ \begin{cases} y = b\,;\ \Phi_1 = 0 \\ y = 0\,;\ \Phi_1 = T_2 - T_1 \end{cases}\ ;\ \begin{cases} x = 0\,;\ \Phi_1 = 0 \\ x = a\,;\ \Phi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0\ ;\ para:\ \begin{cases} y = b\,;\ \Phi_2 = 0 \\ y = 0\,;\ \Phi_2 = 0 \end{cases}\ ;\ \begin{cases} x = 0\,;\ \Phi_2 = 0 \\ x = a\,;\ \Phi_2 = f_1(y) - T_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} = 0\ ;\ para:\ \begin{cases} y = b\,;\ \Phi_3 = f_2(x) - T_1 \\ y = 0\,;\ \Phi_3 = 0 \end{cases}\ ;\ \begin{cases} x = 0\,;\ \Phi_3 = 0 \\ x = a\,;\ \Phi_3 = 0 \end{cases}$$

por cuanto sumando dichos sistemas de ecuaciones se recompone el sistema inicial $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$, con:

$$\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) + \Phi_3(x, y)$$

y distribución de temperaturas:

$$T(x, y) = T_1 + \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) + \Phi_3(x, y)$$

como suma de soluciones que hemos analizado anteriormente.

CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN.- Cuando exista convección en una o en varias caras del sólido se efectúa un análisis similar al visto anteriormente; si a través de la cara $(x = a)$ existe un intercambio térmico con un fluido exterior a T_F, se tienen las siguientes condiciones

de contorno:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \;\; ; \;\; para: \;\; \begin{cases} y = b \; ; \;\; \Phi = 0 \\ y = 0 \; ; \;\; \Phi = 0 \end{cases} \;\; ; \;\; \begin{cases} x = 0 \; ; \;\; \Phi = 0 \\ x = a \; ; \;\; - k \; \frac{d\Phi(x,y)}{dx}\rangle_{x=a} = h_C \, (T_1 - T_F) \end{cases}$$

Se resuelven matemáticamente las expresiones resultantes y las constantes A_1, A_2, B_1, B_2 y λ, de las que sólo son independientes cuatro de ellas, en función de la nueva condición de unicidad. Finalmente se superponen las soluciones y se calcula la distribución final de las temperaturas reales.

CONDUCCIÓN EN UN CILINDRO CIRCULAR DE LONGITUD FINITA.- Vamos a estudiar la conducción estacionaria de un cilindro sólido de longitud finita L y radio R, en dos dimensiones espaciales, tal como el de la Fig III.8. Si la distribución de temperaturas es función de la coordenada radial *r* y de la axial *z*, *T = T(r,z)*, e independiente de la coordenada circunferencial y suponiendo existe una simetría axial para las condiciones de contorno, la ecuación de conducción general en coordenadas cilíndricas, se reduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

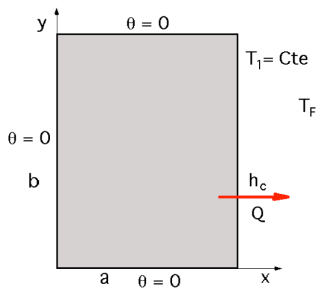


Fig III.7

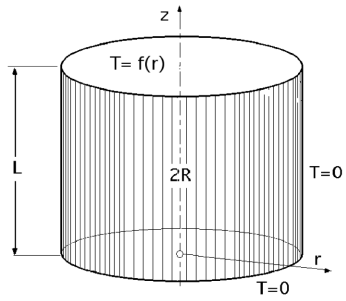


Fig III.8

Este caso es un problema de conducción bidimensional, aunque las condiciones de contorno sean independientes de la coordenada; la distribución de temperaturas es la solución general de la ecuación anterior.

Mediante un método similar buscamos una solución de la forma: $T = R(r)\, Z(z)$, siendo *R(r)* y *Z(z)* función de las variables *r* y *z* respectivamente; sustituyendo en: $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$, y ordenándola en *r* y *z*, se obtiene

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

en la que el miembro de la derecha es función de *z* y el de la izquierda de *r*.

Como los dos miembros son iguales y función de diferentes variables, ambos habrán de ser iguales a una constante $-\lambda^2$, obteniéndose así un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial R}{\partial r} = -\,\frac{1}{Z}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\,\lambda^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial R}{\partial r} + \lambda^2 R = 0 \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} R = B_1\ J_0(\lambda\ r) + B_2\ Y_0(\lambda\ r) \\ Z = B_3\ Sh(\lambda\ z) + B_4\ Ch(\lambda\ z) \end{array}\right.$$

La primera de estas ecuaciones es la función de Bessel de orden cero, mientras que la segunda conduce a funciones hiperbólicas; las expresiones $J_0(\lambda r)$ y $Y_0(\lambda r)$, son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente, y orden cero.

Por consiguiente, aplicando las definiciones de R y de Z de la ecuación, $T = R(r)\ Z(z)$, la solución de la ecuación en coordenadas cilíndricas se puede expresar en la forma:

$$T = \{B_1\ J_0(\lambda\ r) + B_2\ Y_0(\lambda\ r)\}\ \{B_3\ Sh(\lambda\ z) + B_4\ Ch(\lambda\ z)\}$$

Si en el cilindro de la Fig III.8 se mantienen todas las superficies a temperatura nula, excepto en la base superior del cilindro (z = L) donde supondremos una temperatura *f(r)*, la ecuación que proporciona la distribución de temperaturas a través del cilindro se obtiene teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

Para: $z = 0,\ T = 0$

Para: $z = L,\ T = f(r)$

Para: $r = R,\ T = 0$

Para: r = 0, la temperatura debe ser finita en r = 0, por lo que $Y_0(0) \rightarrow -\infty$, *para* $(\lambda r \rightarrow 0)$, *es decir,* $B_2 = 0$

- *Por la condición (z = 0, T = 0) se tiene,* $B_4 = 0$, *quedando:* $T = B\ J_0(\lambda\ r)\ Sh(\lambda\ z)$

- *La aplicación de la condición (r = R, T = 0) exige que:* $0 = B\ J_0(\lambda\ R)\ Sh(\lambda\ z)$

y para que esta condición pueda ser satisfecha por todos los valores de $(\lambda\ R)$ comprendidos entre 0 y L, es necesario que:

$$J_0(\lambda_n R) = 0$$

Las tablas de valores de $J_0(\lambda\ R)$ indican que J_0 toma valores nulos según una sucesión de valores de $(\lambda_n R)$ que difieren entre sí una cantidad que tiende a 2π conforme $\lambda_n\ R \rightarrow \infty$; por consiguiente, hay un número infinito de valores de λ que satisfacen $J_0(\lambda_n\ R) = 0$.

La solución general es la suma de las correspondientes a cada una de las λ_n de la forma:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ Sh(\lambda_n z)\ J_0(\lambda_n r)$$

- *La aplicación de la condición {z = L, T = f(r)} permite determinar los valores de* B_n *si la serie*

siguiente es convergente:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \ Sh(\lambda_n L)\, J_0(\lambda_n r) = B_1 \ Sh(\lambda_1 L)\, J_0(\lambda_1 r) + \ldots + B_n \ Sh(\lambda_n L)\, J_0(\lambda_n r)$$

para lo cual las funciones, $J_0(\lambda_1 r)$, $J_0(\lambda_2 r)$,..., $J_0(\lambda_n r)$, deben formar un agrupamiento ortogonal en el intervalo, $0 \le r \le R$, con respecto a un factor ponderal r.

Tabla III.1.- Valores de las funciones de Bessel $J_0(x)= 0$ y $J_1(x)= 0$

$J_0(x) = 0$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711
$J_1(x) = 0$	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159

Los valores de B son constantes que hay que determinar; si la serie es convergente e integrable, se puede poner:

$$\int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr = B_1 \ Sh(\lambda_1 L) \int_0^R r\, J_0(\lambda_1 r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr + B_2 \ Sh(\lambda_2 L) \int_0^R r\, J_0(\lambda_2 r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr + \ldots$$

$$\ldots + B_n \ Sh(\lambda_n L) \int_0^R r\, J_0^2(\lambda_n r)\ dr + \ldots$$

Por definición de ortogonalidad:

$$\int_0^R r\, J_0(\lambda_i r)\, J_0(\lambda_j r)\ dr = 0 \text{ , con: } i \neq j$$

todas las integrales del segundo miembro a excepción de la última, son cero, es decir:

$$\int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr = B_n \ Sh(\lambda_n L) \int_0^R r\, J_0^2(\lambda_n r)\ dr$$

en la que:

$$\int_0^R r\ J_0^2(\lambda_n r)\ dr = \frac{R^2}{2} \{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)\} = \frac{R^2 J_1^2(\lambda_n R)}{2}$$

$$B_n \ Sh(\lambda_n L) = \frac{\int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr}{\frac{R^2}{2} J_1^2(\lambda_n R)}$$

obteniéndose la siguiente distribución de temperaturas:

$$T = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh(\lambda_n z)\, J_0(\lambda_n r)}{Sh(\lambda_n L)\, J_1^2(\lambda_n R)} \int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr$$

En el caso particular de que la temperatura en la base superior sea constante, $f(r) = T_0$, permaneciendo nula en las restantes superficies, y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^R r\, J_0(\lambda_n r)\ dr = \frac{R}{\lambda_n} J_1(\lambda_n R) \text{ , resulta: } \frac{T}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n R} \frac{Sh(\lambda_n z)\, J_0(\lambda_n r)}{Sh(\lambda_n L)\, J_1(\lambda_n R)}$$

Tabla III.2.- Valores de las funciones de Bessel $J_0(x)$ y $J_1(x)$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	1,0000	0,0000	2,20	0,1103	0,5559	4,50	-0,3205	-0,2310
0,05	0,9993	0,0249	2,25	0,0827	0,5483	4,55	-0,3086	-0,2441
0,10	0,9975	0,0499	2,30	0,0555	0,5398	4,60	-0,2961	-0,2565
0,15	0,9943	0,0747	2,35	0,0287	0,5304	4,65	-0,2830	-0,2681
0,20	0,9900	0,0995	2,40	0,0025	0,5201	4,70	-0,2693	-0,2790
0,25	0,9844	0,1240	2,45	-0,0232	0,5090	4,75	-0,2551	-0,2891
0,30	0,9776	0,1483	2,50	-0,0483	0,4970	4,80	-0,2404	-0,2985
0,35	0,9696	0,1723	2,55	-0,0729	0,4843	4,85	-0,2252	-0,3070
0,40	0,9604	0,1960	2,60	-0,0968	0,4708	4,90	-0,2097	-0,3146
0,45	0,9500	0,2193	2,65	-0,1199	0,4565	4,95	0,1938	0,3215
0,50	0,9384	0,2422	2,70	-0,1424	0,4416	5,00	-0,1776	-0,3275
0,55	0,9257	0,2647	2,75	-0,1641	0,4259	5,10	-0,1443	-0,3371
0,60	0,9120	0,2867	2,80	-0,1850	0,4097	5,20	-0,1103	-0,3432
0,65	0,8971	0,3081	2,85	-0,2051	0,3928	5,30	-0,0758	-0,3460
0,70	0,8812	0,3290	2,90	-0,2243	0,3754	5,40	-0,0412	-0,3453
0,75	0,8642	0,3492	2,95	-0,2426	0,3574	5,50	-0,0068	-0,3414
0,80	0,8462	0,3688	3,00	-0,2600	0,3390	5,60	0,0270	-0,3343
0,85	0,8273	0,3877	3,05	-0,2765	0,3201	5,70	0,0599	-0,3241
0,90	0,8075	0,4059	3,10	-0,2920	0,3009	5,80	0,0917	-0,3110
0,95	0,7867	0,4233	3,15	-0,3066	0,2812	5,90	0,1220	-0,2951
1,00	0,7652	0,4400	3,20	-0,3201	0,2613	6,00	0,1506	-0,2767
1,05	0,7428	0,4559	3,25	-0,3327	0,2411	6,10	0,1773	-0,2559
1,10	0,7196	0,4709	3,30	-0,3443	0,2206	6,20	0,2017	-0,2329
1,15	0,6957	0,4950	3,35	-0,3548	0,2000	6,30	0,2238	-0,2081
1,20	0,6711	0,4982	3,40	-0,3643	0,1792	6,40	0,2433	-0,1816
1,25	0,6459	0,5106	3,45	-0,3727	0,1583	6,50	0,2601	-0,1538
1,30	0,6200	0,5220	3,55	-0,3864	0,1164	6,6	0,27404	-0,12498
1,35	0,5937	0,5324	3,65	-0,3960	0,0745	6,8	0,29310	-0,06252
1,40	0,5668	0,5419	3,70	-0,3923	0,0538	7,0	0,30007	-0,00468
1,45	0,5395	0,5504	3,75	-0,4014	0,0332	7,2	0,29507	0,05432
1,50	0,5118	0,5579	3,80	-0,4025	0,0128	7,4	0,27859	0,10963
1,55	0,4837	0,5644	3,85	-0,4026	-0,0073	7,6	0,25160	0,15921
1,60	0,4554	0,5699	3,90	-0,4018	-0,0272	7,8	0,25541	0,20136
1,65	0,4267	0,5743	3,95	-0,3999	-0,0468	8,0	0,17165	0,23464
1,70	0,3979	0,5777	4,00	-0,3971	-0,0660	8,2	0,12222	0,25800
1,75	0,3690	0,5801	4,05	-0,3933	-0,0848	8,4	0,06916	0,27079
1,80	0,3399	0,5815	4,10	-0,3886	-0,1032	8,6	0,01462	0,27275
1,85	0,3109	0,5818	4,15	-0,3830	-0,1212	8,8	-0,03923	0,26407
1,90	0,2818	0,5811	4,20	-0,3765	-0,1386	9,0	-0,09033	0,24531
1,95	0,2528	0,5794	4,25	-0,3692	-0,1555	9,2	-0,13675	0,21471
2,00	0,2238	0,5767	4,30	-0,3610	-0,1719	9,4	-0,17677	0,18163
2,05	0,1951	0,5730	4,35	-0,3520	-0,1876	9,6	-0,20898	0,13952
2,10	0,1666	0,5682	4,40	-0,3422	-0,2027	9,8	-0,23227	0,09284
2,15	0,1383	0,5626	4,45	-0,3370	-0,2172	10,0	-0,24594	0,04347

En el caso de que la temperatura en las demás superficies tenga un valor constante en vez de ser nula, T_0 se interpreta sencillamente como la diferencia entre la temperatura en el extremo $z = L$ y este valor constante. El principio de superposición se puede aplicar a la resolución de otros casos, como la distribución de temperaturas en un cilindro calentado a temperatura uniforme en los extremos, y a temperatura cero en la superficie lateral, que se puede encontrar sumando dos soluciones de la forma de la ecuación anterior.

En la Fig III.9 se ha representado la distribución de la temperatura en el eje, r = 0, para el ci-

lindro sólido calentado a temperatura constante en una base y en las dos bases; la solución se consigue por superposición a partir del primer caso.

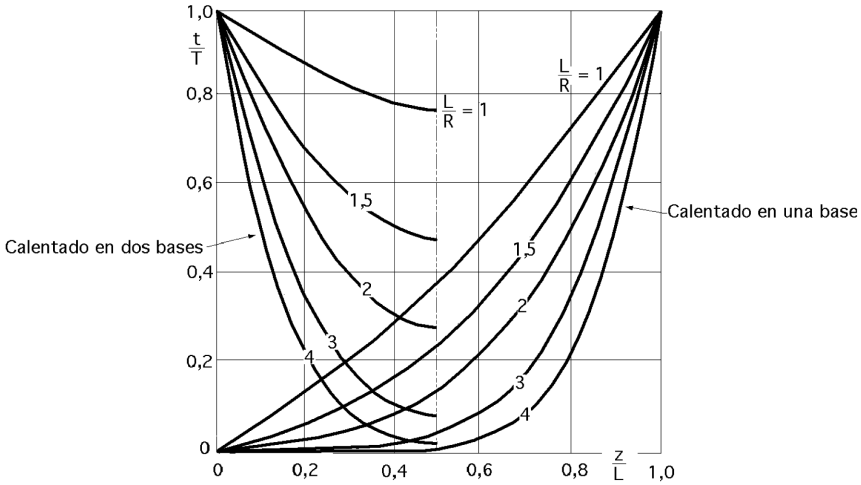
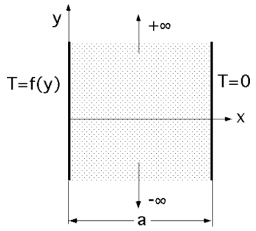


Fig III.9.- Distribución axial de la temperatura en un cilindro sólido de longitud finita

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN SECCIONES RECTANGULARES

a) Rectángulo infinito con distribución de temperatura inicial en, x = 0

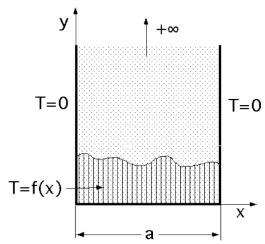


$$\begin{cases} x = 0 \ ; \ -\infty < y < +\infty \ ; \ T = f(y) \\ x = a \ ; \ -\infty < y < +\infty \ ; \ T = 0 \end{cases}$$

$$T(x,y) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, sen\, \frac{\pi x}{a}\, \frac{dy}{cos\, \frac{\pi\,(a-x)}{a} + Ch\, \frac{\pi\,(x-y)}{a}}$$

.....

b) Rectángulo semiinfinito con distribución de temperatura inicial en, y = 0



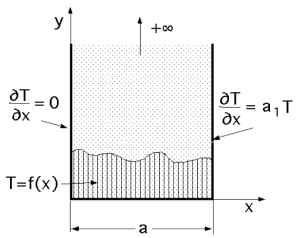
$$\begin{cases} x = 0 \ ; \ 0 < y < \infty \ ; \ T = 0 \\ x = a \ ; \ 0 < y < \infty \ ; \ T = 0 \\ y = 0 \ ; \ 0 < x < a \ ; \ T = f(x) \end{cases}$$

$$T(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} sen(\lambda_n x)\, e^{-(\lambda_n y)} \int_0^a f(x)\, sen\,(\lambda_n x)\, dx, \ \ con\ \lambda_n\ raíces\ de:\ \lambda_n = \frac{\pi n}{a}$$

$$Para: f(x) = \Phi_0 \ ; \ \Phi(x,y) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen(\lambda_{2n+1}\, x)\, e^{-\lambda_{2n+1}\, y}}{2n+1} \ ; \ \lambda_{2n+1} = \frac{\pi\,(2n+1)}{a}$$

.....

c) Rectángulo semiinfinito con distribución de temperaturas en la base, con convección lateral en una cara y con aislamiento en la otra cara



$$\begin{cases} x = 0 \;;\; 0 < y < \infty \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial x}\rangle_{x=0} = 0 \\ y = 0 \;;\; 0 < x < a \;;\; T = f(x) \\ x = a \;;\; 0 < y < \infty \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial x}\rangle_{x=a} = a_1\, T = -\,\dfrac{h_C}{k}\, T \end{cases}$$

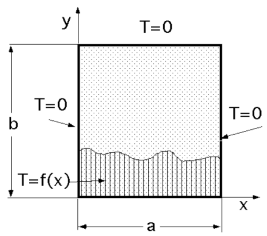
$$T(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 + a_1^2)\, e^{-(\lambda_n x)}}{a\,(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1}\, \cos(\lambda_n x) \int_0^a f(x) \cos(\lambda_n x)\, dx$$

con λ_n *raíces de:* $\lambda_n\, tg(\lambda_n a) = a_1 = -\,\dfrac{h_C}{k}$

Para: $f(x) = \Phi_0$; $\dfrac{\Phi(x,y)}{\Phi_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1\, e^{-\lambda_n y}}{a\,(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1}\, \dfrac{\cos(\lambda_n x)}{\cos(\lambda_n a)}$

.....

d) Rectángulo finito, con distribución de temperatura en la base inferior



$$\begin{cases} x = 0 \;;\; 0 < y < b \;;\; T = 0 \\ x = a \;;\; 0 < y < b \;;\; T = 0 \\ y = 0 \;;\; 0 < x < a \;;\; T = f(x) \\ y = b \;;\; 0 < x < a \;;\; T = 0 \end{cases}$$

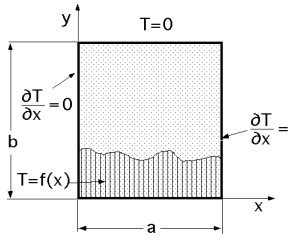
$$T(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Sh\{\lambda_n (b - y)\}}{Sh(\lambda_n b)}\, sen(\lambda_n x) \int_0^a f(x)\, sen(\lambda_n x)\, dx$$

con λ_n *raíces de:* $\lambda_n = \dfrac{\pi\, n}{a}$

Para: $f(x) = \Phi_0$; $\dfrac{F(x,y)}{F_0} = \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1,3...}^{\infty} \dfrac{Sh\{\lambda_n (b - y)\}}{Sh(\lambda_n b)}\, \dfrac{sen(\lambda_n x)}{n}$

.....

e) Rectángulo finito, con distribución de temperatura en la base inferior, convección en una de las caras y aislamiento en la otra.



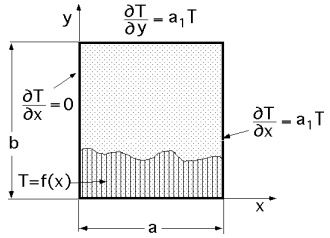
$$\begin{cases} x = 0 \;;\; 0 < y < b \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial x}\rangle_{x=0} = 0 \\ x = a \;;\; 0 < y < b \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial x}\rangle_{x=a} = a_1\, T = -\,\dfrac{h_C}{k}\, T \\ y = 0 \;;\; 0 < x < a \;;\; T = f(x) \\ y = b \;;\; 0 < x < a \;;\; T = 0 \end{cases}$$

$$T(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 + a_1^2)\cos(\lambda_n x)}{a\,(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1}\, \frac{Sh\{\lambda_n (b - y)\}}{Sh(\lambda_n b)} \int_0^a f(x) \cos(\lambda_n x)\, dx,\ \text{con } \lambda_n \text{ raíces de: } \lambda_n tg(\lambda_n a) = a_1 = -\,\frac{h_C}{k}$$

Para: $f(x) = \Phi_0$; $\dfrac{\Phi(x,y)}{\Phi_0} = 2\, a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{Sh\{\lambda_n (b - y)\}}{\cos(\lambda_n a)\, Sh(\lambda_n b)}\, \dfrac{\cos(\lambda_n x)}{a\,(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1}$

.....

f) Rectángulo finito, con distribución de temperatura en la base inferior, convección en una de las caras y en la base superior y aislamiento en la otra.



$$\begin{cases} x = 0 \;;\; 0 < y < b \;;\; \frac{\partial T}{\partial x}\rangle_{x=0} = 0 \\ x = a \;;\; 0 < y < b \;;\; \frac{\partial T}{\partial x}\rangle_{x=a} = a_1\, T = -\,\frac{h_C}{k}\, T \\ y = 0 \;;\; 0 < x < a \;;\; T = f(x) \\ y = b \;;\; 0 < x < a \;;\; \frac{\partial T}{\partial y}\rangle_{y=b} = a_1\, T = -\,\frac{h_C}{k}\, T \end{cases}$$

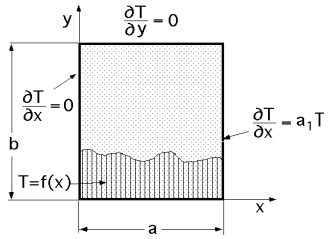
$$T(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 + a_1^2)\cos(\lambda_n x)}{a(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1} \; \frac{\lambda_n\, Ch\{\lambda_n (b - y)\} + a_1\, Sh\{\lambda_n (b - y)\}}{\lambda_n\, Ch(\lambda_n b) + a_1\, Sh(\lambda_n b)} \int_0^a f(x)\cos(\lambda_n x)\, dx$$

con λ_n *raíces de:* $\lambda_n\, tg(\lambda_n a) = a_1 = -\,\frac{h_C}{k}$

Para: $f(x) = \Phi_0$; $\frac{\Phi(x,y)}{\Phi_0} = 2\, a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n\, Ch\{\lambda_n (b - y)\} + a_1\, Sh\{\lambda_n (b - y)\}}{\cos(\lambda_n a)\,\{\lambda_n\, Ch\{\lambda_n b\} + a_1\, Sh\{\lambda_n b\}\}} \; \frac{\cos(\lambda_n x)}{a(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1}$

.....

g) Rectángulo finito, con distribución de temperatura en la base inferior, convección en una de las caras y aislamiento en la otra cara y en la base superior.



$$\begin{cases} x = 0 \;;\; 0 < y < b \;;\; \frac{\partial T}{\partial x}\rangle_{x=0} = 0 \\ x = a \;;\; 0 < y < b \;;\; \frac{\partial T}{\partial x}\rangle_{x=a} = a_1\, T = -\,\frac{h_C}{k}\, T \\ y = 0 \;;\; 0 < x < a \;;\; T = f(x) \\ y = b \;;\; 0 < x < a \;;\; \frac{\partial T}{\partial y}\rangle_{y=b} = 0 \end{cases}$$

$$T(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 + a_1^2)\cos(\lambda_n x)}{a(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1} \; \frac{Ch\{\lambda_n (b - y)\}}{Ch(\lambda_n b)} \int_0^a f(x)\cos(\lambda_n x)\, dx$$

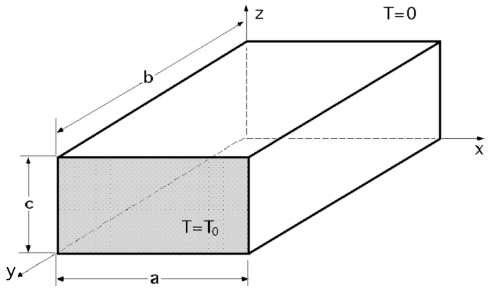
con λ_n *raíces de:* $\lambda_n\, tg(\lambda_n a) = a_1 = -\,\frac{h_C}{k}$

Para: $f(x) = \Phi_0$; $\frac{\Phi(x,y)}{\Phi_0} = 2\, a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ch\{\lambda_n (b - y)\}}{\cos(\lambda_n a)\; Ch(\lambda_n b)} \; \frac{\cos(\lambda_n x)}{a(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1}$

.....

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN PARALELEPÍPEDOS

a) Paralelepípedo con una cara a T_0 *y el resto a* $T = 0$



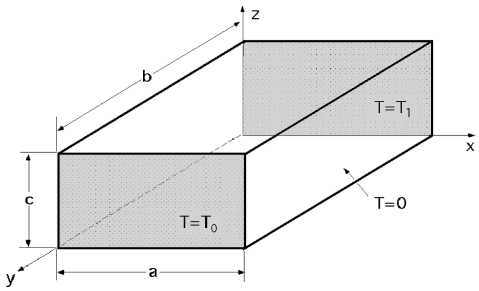
$$\begin{cases} x = 0 \;;\; x = a \;;\; T = 0 \\ y = 0 \;;\; T = 0 \\ y = b \;;\; T = T_0 \\ z = 0 \;;\; z = c \;;\; T = 0 \end{cases}$$

$$T(x,y,z) = 16\, T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Sh(\alpha y)}{Sh(\alpha b)} \; \frac{Sh(\eta_m z)}{\eta_m} \; \frac{Sh(\lambda_n x)}{\lambda_n}$$

$$\eta_m = \frac{(2m+1)\,\pi}{c} \quad ; \quad \lambda_m = \frac{(2n+1)\,\pi}{a} \quad ; \quad a^2 = \lambda_n^2 + \eta_m^2$$

.....

b) Paralelepípedo con una cara a T_0 y la opuesta a T_1



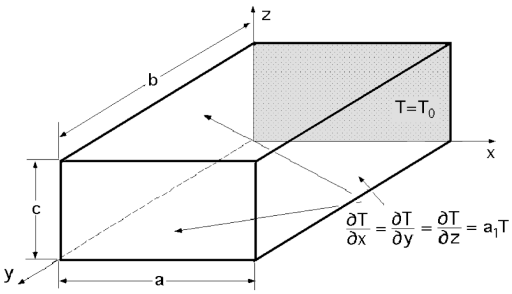
$$\begin{cases} x = 0 \;\; ; \;\; x = a \;\; ; \;\; T = 0 \\ y = 0 \;\; ; \;\; T = T_1 \\ y = b \;\; ; \;\; T = T_0 \\ z = 0 \;\; ; \;\; z = c \;\; ; \;\; T = 0 \end{cases}$$

$$T(x,y,z) = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T_1 \; Sh\,\{\alpha(b-y)\}}{Sh\,(\alpha\, b)} \; \frac{Sh\,(\eta_m z)}{\eta_m} \; \frac{Sh\,(\lambda_n x)}{\lambda_n}$$

$$\eta_m = \frac{(2m+1)\,\pi}{c} \quad ; \quad \lambda_m = \frac{(2n+1)\,\pi}{a} \quad ; \quad a^2 = \lambda_n^2 + \eta_m^2$$

.....

c) Paralelepípedo con una cara a T_0 y convección en las demás



$$\begin{cases} y = 0 \;\; ; \;\; T = T_0 \qquad ; \;\; y = b \;\; \rightarrow \;\; \dfrac{\partial T}{\partial y}\Big\rangle_{y=b} = a_1 \\ x = 0 \;\; ; \;\; \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big\rangle_{x=0} = -\,a_1 \;\; ; \;\; x = a \;\; \rightarrow \;\; \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big\rangle_{x=a} = a_1 \\ z = 0 \;\; ; \;\; \dfrac{\partial T}{\partial z}\Big\rangle_{z=0} = -\,a_1 \;\; ; \;\; z = c \;\; \rightarrow \;\; \dfrac{\partial T}{\partial z}\Big\rangle_{z=c} = a_1 \end{cases}$$

$$T(x,y,z) = 4\, a_1^2\, T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_1\, Sh\,\{\alpha(b-y)\} + \alpha\, Ch\,(b-y)}{\{a_1\, Sh\,(\alpha\, b) + \alpha\, Ch\,(\alpha\, b)\}\, cos\,(\lambda_n a)\, cos\,(\eta_m c)} \; \frac{cos\,(\lambda_n x)\, cos\,(\eta_m z)}{\{a\,(\lambda_n^2 + a_1^2) + a_1\}\,\{c\,(\eta_m^2 + a_1^2) + a_1\}}$$

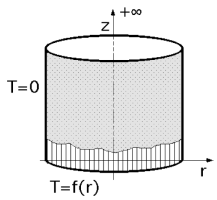
$$\eta_m = \frac{(2m+1)\,\pi}{c} \quad ; \quad \lambda_m = \frac{(2n+1)\,\pi}{a} \quad ; \quad \alpha^2 = \lambda_n^2 + \eta_m^2$$

con λ_n y η_m raíces de: $\lambda_n\, tg\,(\lambda_n a = a_1 \;\; ; \;\; \eta_m\, tg\,(\eta_m c) = a_1$

.....

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN CILINDROS

a) Cilindro semiinfinito con distribución de temperatura inicial en la base



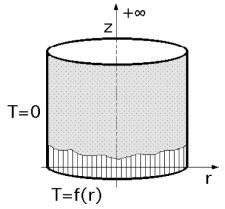
$$\begin{cases} z = 0 \;\; ; \;\; 0 < r < R \;\; ; \;\; T = f(r) \\ r = R \;\; ; \;\; 0 < z < \infty \;\; ; \;\; T = 0 \end{cases}$$

$$T\left(r,z\right) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\,(\lambda_n r)}{J_1^2\,(\lambda_n R)}\; e^{-(\lambda_n z)} \int_0^R r\, f(r)\, J_0\,(\lambda_n r)\; dr \quad ; \quad J_0\,(\lambda_n R) = 0$$

Para: $f(r) = \Phi_0 \quad ; \quad \Phi(r,z) = \dfrac{2\,\Phi_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0\,(\lambda_n r)\, e^{-\lambda_n z}}{\lambda_n\; J_1(\lambda_n R)}$

.....

b) Cilindro finito con distribución de temperaturas en su base



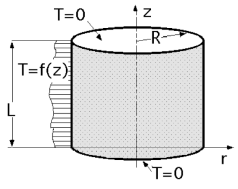
$$\begin{cases} z = 0 \ ; \ 0 < r < R \ ; \ T = f(r) \\ r = R \ ; \ 0 < z < \infty \ ; \ T = 0 \\ z = L \ ; \ 0 < z < L \ ; \ T = 0 \end{cases}$$

$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)\ Sh\{\lambda_n (L - z)\}}{J_1^2(\lambda_n R)\ Sh(\lambda_n L)} \int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr \quad ; \quad J_0(\lambda_n R) = 0$$

$$Para: f(r) = \Phi_0 \quad ; \quad \Phi(r,z) = 2\,\Phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)\ Sh\{\lambda_n (L - z)\}}{(\lambda_n R)\, J_1(\lambda_n R)\, Sh(\lambda_n L)}$$

.....

c) Cilindro finito con distribución de temperaturas lateral



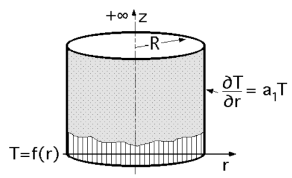
$$\begin{cases} z = 0 \ ; \ 0 < r < R \ ; \ T = 0 \\ r = R \ ; \ 0 < z < b \ ; \ T = f(z) \\ z = L \ ; \ 0 < z < L \ ; \ T = 0 \end{cases}$$

$$T(r,z) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\pi\ n\ r}{L}\right) sen\left(\frac{\pi\ n\ z}{L}\right)}{I_0\left(\frac{\pi\ n\ R}{L}\right)} \int_0^L f(z)\, sen\left(\frac{\pi\ n\ z}{L}\right)\ dz$$

$$Para:\ f(r) = \Phi_0 \quad ; \quad \Phi(r,z) = \frac{4\,\Phi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{(2\,n+1)\,\pi\ r}{L}\right)}{I_0\left(\frac{(2\,n+1)\,\pi\ R}{L}\right)} \frac{sen\left(\frac{(2\,n+1)\,\pi\ z}{L}\right)}{2\,n+1}$$

.....

d) Cilindro semiinfinito con distribución de temperaturas en la base y convección lateral



$$\begin{cases} z = 0 \ ; \ 0 < r < R \ ; \ T = f(r) \\ r = R \ ; \ 0 < z < L \ ; \ \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right\rangle_{r=R} = a_1\, T = -\ \frac{h_C}{k}\ T \end{cases}$$

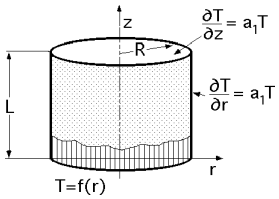
$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2\ J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 + a_1^2)\, J_0^2(\lambda_n R)}\ e^{-(\lambda_n z)} \int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr$$

$$con\ \lambda_n\ raíces\ de:\ a_1\ J_0(\lambda_n R) = \lambda_n\ J_1(\lambda_n R) \quad ; \quad \frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \frac{\lambda_n}{a_1} = \frac{R\ \lambda_n}{\frac{R\ h_C}{k}} = \frac{R\ \lambda_n}{Bi}$$

$$Para: f(r) = \Phi_0 \quad ; \quad \Phi(r,z) = \frac{2\,\Phi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n\ J_1(\lambda_n r)\, J_1(\lambda_n R)}{(\lambda_n^2 + a_1^2)\, J_0^2(\lambda_n R)}\ e^{-(\lambda_n z)}$$

.....

e) Cilindro finito con distribución de temperaturas en la base inferior, convección en la base superior y convección lateral



$$\begin{cases} z = 0 \ ; \ 0 < r < R \ ; \ T = f(r) \\ r = R \ ; \ 0 < z < L \ ; \ \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right\rangle_{r=R} = a_1\, T = -\ \frac{h_C}{k}\ T \\ z = L \ ; \ 0 < r < R \ ; \ \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right\rangle_{z=L} = a_1\, T = -\ \frac{h_C}{k}\ T \end{cases}$$

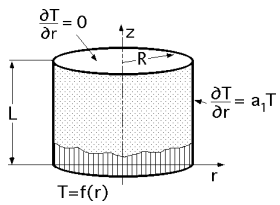
$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2\ J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 + a_1^2)\, J_0^2(\lambda_n R)} \frac{\lambda_n\ Ch\{(\lambda_n (L - z)\} + a_1\ Sh\{(\lambda_n (L - z)\}}{\lambda_n\ Ch(\lambda_n L) + a_1\ Sh(\lambda_n L)} \int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\ dr$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raíces de: } a_1 J_0(\lambda_n R) = \lambda_n J_1(\lambda_n R) \;\; ; \;\; \frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \frac{\lambda_n}{a_1} = \frac{R\ \lambda_n}{\frac{R\ h_C}{k}} = \frac{R\ \lambda_n}{Bi}$$

$$\text{Para: } f(r) = \Phi_0 \;\; ; \;\; \Phi(r,z) = \frac{2\ a_1\ \Phi_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 + a_1^2)\, J_0(\lambda_n R)} \frac{\lambda_n\, Ch\,\{(\lambda_n (L-z)\} + a_1\, Sh\,\{\lambda_n (L-z)\}}{\lambda_n\, Ch(L-z) + a_1\, Sh(L-z)}$$

.....

f) Cilindro finito con distribución de temperaturas en la base inferior, la base superior aislada térmicamente y convección lateral



$$\begin{cases} z = 0 \;;\; 0 < r < R \;;\; T = f(r) \\ r = R \;;\; 0 < z < L \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial r}\rangle_{r=R} = a_1 T = -\dfrac{h_C}{k} T \\ z = L \;;\; 0 < r < R \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial z}\rangle_{z=L} = 0 \end{cases}$$

$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2\, J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 + a_1^2)\, J_0^2(\lambda_n R)} \frac{Ch\ \{(\lambda_n (L-z)\}}{Ch\ (\lambda_n L)} \int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr$$

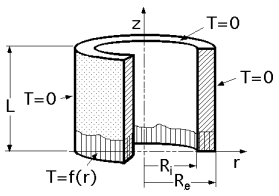
$$\text{con } \lambda_n \text{ raíces de: } a_1 J_0(\lambda_n R) = \lambda_n J_1(\lambda_n R) \;\; ; \;\; \frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \frac{\lambda_n}{a_1} = \frac{R\ \lambda_n}{\frac{R\ h_C}{k}} = \frac{R\ \lambda_n}{Bi}$$

$$\text{Para: } f(r) = \Phi_0 \;\; ; \;\; \Phi(r,z) = \frac{2\ a_1\ \Phi_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n\, J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 + a_1^2)\, J_0(\lambda_n R)} \frac{Ch\ \{(\lambda_n (L-z)\}}{Ch\ (\lambda_n L)}$$

.....

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN TUBOS

a) Tubo finito con distribución de temperatura inicial en la base y cero en el resto



$$\begin{cases} r = R_e \;;\; 0 < z < L \;;\; T = 0 \\ r = R_i \;;\; 0 < z < L \;;\; T = 0 \\ z = 0 \;;\; R_i < r < R_e \;;\; T = f(r) \\ z = L \;;\; R_i < r < R_e \;;\; T = 0 \end{cases}$$

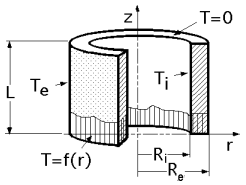
$$T(r,z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2\, J_0^2(\lambda_n R_e)\, C_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_i) - J_0^2(\lambda_n R_e)} \frac{Sh\ \{(\lambda_n (L-z)\}}{Sh\ (\lambda_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r\, f(r)\, C_0(\lambda_n r)\ dr$$

$$C_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\, Y_0(\lambda_n R_i) - J_0(\lambda_n R_i)\, Y_0(\lambda_n r)$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raíces de: } J_0(\lambda_n R_e)\, Y_0(\lambda_n R_i) - J_0(\lambda_n R_i)\, Y_0(\lambda_n R_e) = 0$$

.....

b) Tubo finito con distribución de temperaturas en su base inferior, 0 en la superior, y T_e y T_i en las laterales, exterior e interior, respectivamente.



$$\begin{cases} r = R_e \ ; \ 0 < z < L \ ; \ T = T_e \\ r = R_i \ ; \ 0 < z < L \ ; \ T = T_i \\ z = 0 \ ; \ R_i < r < R_e \ ; \ T = f(r) \\ z = L \ ; \ R_i < r < R_e \ ; \ T = 0 \end{cases}$$

$$T(r,z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \, J_0^2(\lambda_n R_e) \, C_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_i) - J_0^2(\lambda_n R_e)} \, \frac{Sh\ \{(\lambda_n (L-z)\}}{Sh\ (\lambda_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r \, f(r) \, C_0(\lambda_n r) \, dr +$$

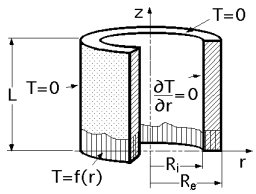
$$+ \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \, J_0^2(\lambda_n R_e) \, C_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_i) - J_0^2(\lambda_n R_e)} \left[\frac{Sh\ (\lambda_n z)}{\lambda_n^2 \, Sh\ (\lambda_n L)} \, \frac{2\, T_e \, \{Ch\ (\lambda_n L) - 1\} \, J_0(\lambda_n R_i)}{\pi \ J_0(\lambda_n R_e)} - \frac{2\ T_i}{\pi} \right]$$

$C_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) \ Y_0(\lambda_n R_i) - J_0(\lambda_n R_i) \ Y_0(\lambda_n r)$

con λ_n *raíces de:* $J_0(\lambda_n R_e) \ Y_0(\lambda_n R_i) - J_0(\lambda_n R_i) \ Y_0(\lambda_n R_e) = 0$

.....

c) Tubo finito con distribución de temperaturas en la base inferior, cero en la base superior y superficie lateral exterior y aislada térmicamente en la superficie lateral interior



$$\begin{cases} r = R_e \ ; \ 0 < z < L \ ; \ T = 0 \\ r = R_i \ ; \ 0 < z < L \ ; \ \dfrac{\partial T}{\partial r}\rangle_{r=R_i} = 0 \\ z = 0 \ ; \ R_i < r < R_e \ ; \ T = f(r) \\ z = L \ ; \ R_i < r < R_e \ ; \ T = 0 \end{cases}$$

$$T(r,z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \, J_0^2(\lambda_n R_e) \ C_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_i) - J_0^2(\lambda_n R_e)} \, \frac{Sh\ \{(\lambda_n (L-z)\}}{Sh\ (\lambda_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r \, f(r) \, N_0(\lambda_n r) \, dr$$

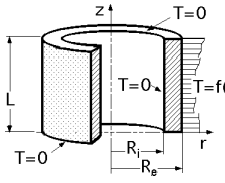
$C_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) \ Y_0(\lambda_n R_i) - J_0(\lambda_n R_i) \ Y_0(\lambda_n r)$

$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) \ Y_0'(\lambda_n R_i) - J_0'(\lambda_n R_i) \ Y_0(\lambda_n r)$

con λ_n *raíces de:* $J_0(\lambda_n R_e) \ Y_0'(\lambda_n R_i) - J_0'(\lambda_n R_i) \ Y_0(\lambda_n R_e) = 0$

.....

d) Tubo finito con temperatura cero en las bases superior, inferior y superficie lateral interior y distribución de temperaturas en la superficie lateral interior



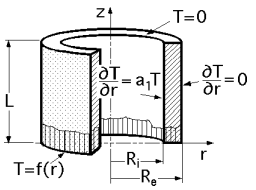
$$\begin{cases} r = R_e \ ; \ 0 < z < L \ ; \ T = f(x) \\ r = R_i \ ; \ 0 < z < L \ ; \ T = 0 \\ z = 0 \ ; \ R_i < r < R_e \ ; \ T = 0 \\ z = L \ ; \ R_i < r < R_e \ ; \ T = 0 \end{cases}$$

$$T(r,z) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_0(\lambda_n r) \, I_0(\lambda_n R_i) - K_0(\lambda_n R_i) \, I_0(\lambda_n r)}{K_0(\lambda_n R_e) \, I_0(\lambda_n R_i) - K_0(\lambda_n R_i) \, I_0(\lambda_n R_e)} \ sen(\lambda_n z) \int_0^L f(z) \, sen(\lambda_n z) \, dz$$

con λ_n *raíces de:* $\lambda_n = \dfrac{\pi \, n}{L}$

.....

e) Tubo finito con distribución de temperatura en la base inferior, temperatura cero en la base superior, convección en la superficie lateral interior y aislamiento térmico en la superficie lateral exterior.



$$\begin{cases} r = R_i \;;\; 0 < z < L \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial r}\rangle_{r=R_i} = a_1\, T \\ r = R_e \;;\; 0 < z < L \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial r}\rangle_{r=R_e} = 0 \\ z = 0 \;;\; R_i < r < R_e \;;\; T = f(r) \\ z = L \;;\; R_i < r < R_e \;;\; T = 0 \end{cases}$$

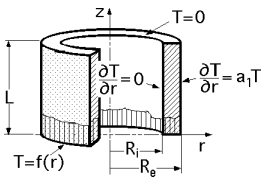
$$T(r,z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i)\}^2 N_0(\lambda_n r)}{\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i)\}^2 - (\lambda_n^2 + a_1^2) J_0'(\lambda_n Re)} \frac{Sh\{\lambda_n (L-z)\}}{Sh(\lambda_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r\, f(r)\, N_0(\lambda_n r)\, dr$$

$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_i) - J_0'(\lambda_n R_i)\, Y_0(\lambda_n r)$$

con λ_n *raíces de:* $\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_i) + a_1\, Y_0(\lambda_n R_i)\} J_0'(\lambda_n R_e) - \{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) + a_1\, J_0(\lambda_n R_i)\} Y_0'(\lambda_n R_e) = 0$

.....

f) Tubo finito con distribución de temperatura en la base inferior, temperatura cero en la base superior, convección en la superficie lateral exterior y aislamiento térmico en la superficie lateral interior.



$$\begin{cases} r = R_i \;;\; 0 < z < L \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial r}\rangle_{r=R_i} = 0 \\ r = R_e \;;\; 0 < z < L \;;\; \dfrac{\partial T}{\partial r}\rangle_{r=R_e} = a_1 T \\ z = 0 \;;\; R_i < r < R_e \;;\; T = f(r) \\ z = L \;;\; R_i < r < R_e \;;\; T = 0 \end{cases}$$

$$T(r,z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + a_1 J_0(\lambda_n R_e)\}^2 N_0(\lambda_n r)}{\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + a_1 J_0(\lambda_n R_e)\}^2 - (\lambda_n^2 + a_1^2) J_0'^2(R_i)} \frac{Sh\{\lambda_n (L-z)\}}{Sh(\lambda_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r\, f(r)\, N_0(\lambda_n r)\, dr$$

$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_i) - J_0'(\lambda_n R_i)\, Y_0(\lambda_n r)$$

con λ_n *raíces de:* $Y_0'(\lambda_n R_i)\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + a_1 J_0'(\lambda_n R_e)\} - J_0'(\lambda_n R_i)\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_e) + a_1 Y_0(\lambda_n R_e)\} = 0$

III.2.- MÉTODO GRÁFICO

El método gráfico se basa en una serie de condicionamientos geométricos de la fórmula vectorial de la ley de Fourier, que especifica que las isotermas y las líneas de flujo térmico constante (fronteras adiabáticas), son siempre perpendiculares en los puntos en que se cortan; las líneas de simetría son también fronteras adiabáticas. Por lo tanto, se puede hacer un diagrama esquemático de las isotermas y de las líneas equipotenciales del flujo térmico, y perfeccionar el sistema hasta conseguir se satisfaga la condición de perpendicularidad entre ellas. La exactitud de la distribución de temperaturas va a depender del cuidado que se ponga en la construcción de las citadas líneas; en cada punto de intersección, las tangentes a las líneas correspondien-

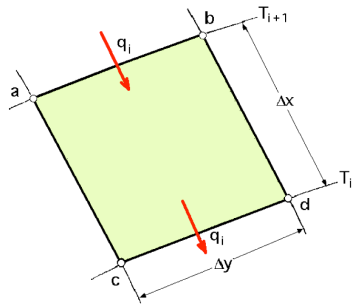


Fig III.10- Cuadrado curvilíneo de isotermas y adiabáticas, Δx = Δy

tes han de ser perpendiculares; los cuadriláteros curvilíneos hay que construirlos de forma que la suma de los lados opuestos sean iguales, Fig III.10, es decir:

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ac} + \overline{bd}$$

Si suponemos un cuadrado curvilíneo típico, Δx = Δy, por el que fluye una cierta cantidad de calor q_i, aplicando la ley de Fourier (por unidad de longitud) se obtiene:

$$q_i = k\,\Delta y\,\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} = \left| \begin{array}{c} T_{i+1} - T_i = \dfrac{\Delta T_{total}}{M} = \dfrac{T_1 - T_2}{M} \\ \Delta x = \Delta y \end{array} \right| = k\,\frac{T_1 - T_2}{M}$$

en donde se ha considerado que en todos los cuadrados curvilíneos se cumple que las subdivisiones de temperatura son iguales. Entonces se puede expresar la diferencia de temperaturas entre dos isotermas adyacentes, en función de la diferencia de temperaturas total a través de la superficie completa y del número de subdivisiones de temperaturas iguales M, siendo T_1 y T_2 las temperaturas extremas, $T_1 > T_2$.

Si el número de líneas de flujo térmico es N, la transferencia de calor a través de cada canal entre dos líneas térmicas equipotenciales adyacentes, será la misma para todas ellas, siendo el calor transferido total de la forma:

$$Q_{total} = N\,q_i = k\,\frac{N}{M}\,(T_1 - T_2) = k\,F\,(T_1 - T_2),\ \ con:\ \Delta x = \Delta y$$

en la que $F = \dfrac{N}{M}$ se denomina Factor de forma de la conducción y es la relación entre el número de líneas de flujo térmico y el número de líneas isotermas.

Se conocen algunas expresiones matemáticas del factor de forma F para geometrías sencillas; así, por ejemplo, para la conducción en una pared plana:

$$Q = k\,\frac{A}{L}\,\Delta T = \left| F = \frac{A}{L} \right| = k\,F\,\Delta T$$

Para un cilindro hueco de longitud L y radios r_0 y r_i el factor de forma es:

$$F = \frac{2\,\pi\,L}{ln\,(r_0 / r_i)}$$

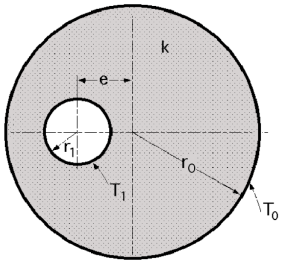
El concepto de factor de forma F se puede ampliar a geometrías más complicadas, obteniendo sus valores con técnicas de variable compleja y teoría de residuos, considerando

$$Q = k\,F\,(T_1 - T_0)$$

A continuación presentamos algunos valores de F así deducidos.

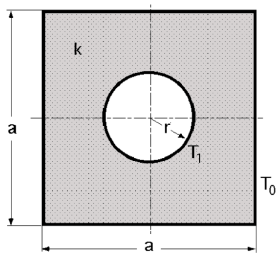
FACTORES DE FORMA PARA LA CONDUCCIÓN TERMICA

1) Cilindros circulares excéntricos, de radios r_0 y r_1, y longitud L



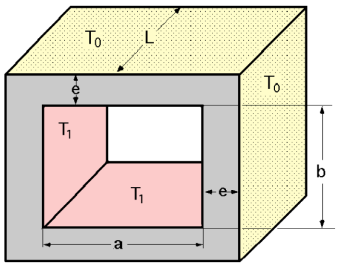
$$F = \frac{2\,\pi\,L}{Arg\,Ch\,\dfrac{r_0^2 + r_1^2 - e^2}{2\,r_0\,r_1}}$$

2) Cilindro circular dentro de un cuadrado de lado a y longitud L



$$F = \frac{2\,\pi\,L}{ln\,\dfrac{0{,}54\,a}{r}}$$

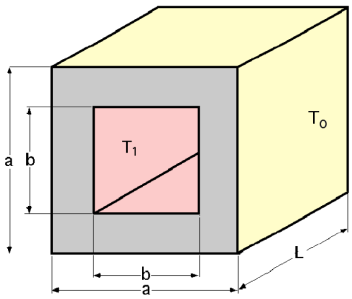
3) Caja paralelepipédica, con espesor de pared constante e; Área de la superficie interna A_1; Área de la superficie externa A_2



$$F = \frac{0{,}79\,\sqrt{A_1\,A_2}}{e}\ ,\ para:\ (a,\ b,\ L) < \frac{e}{5}$$

$$F = \frac{A_1}{2} + 2{,}16\,(a + b + L) + 1{,}2\,e\ ,\ para:\ (a,\ b,\ L) > \frac{e}{5}$$

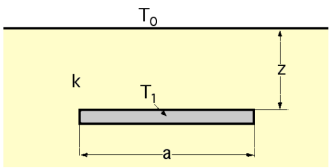
4) Caja paralelepipédica, con bases cuadradas



$$F = \frac{2\,\pi\,L}{0{,}93\,ln\,\dfrac{a}{b} - 0{,}0502}\ ,\ para:\ \frac{a}{b} > 1{,}4\ ;\ L >> a$$

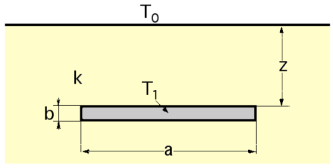
$$F = \frac{2\,\pi\,L}{0{,}785\,ln\,\dfrac{a}{b}}\ ,\ para:\ \frac{a}{b} < 1{,}4\ ;\ L >> a$$

5) Placa rectangular delgada enterrada, de longitud L



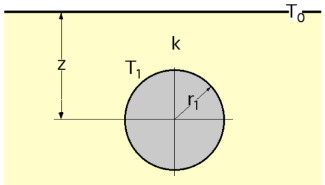
$$F_{z\,=\,0} = \frac{\pi\,a}{ln\,\dfrac{4\,a}{L}}\ ;\quad F_{z\,>>\,a} = \frac{2\,\pi\,a}{ln\,\dfrac{4\,a}{L}}$$

6) Viga rectangular enterrada; longitud L >> a, b, z



$$F = 2{,}756\,L\,\{ln\,(1 + \frac{z}{a})\}^{-\,0{,}59}\,(\frac{z}{a})^{-\,0{,}078}$$

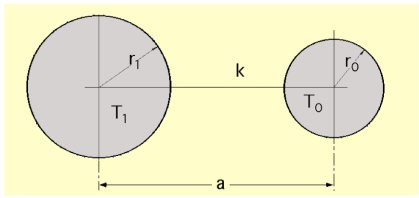
7) Cilindro horizontal enterrado de radio r_1, y longitud L, o también esfera enterrada de radio r_1



Cilindro: $F = \dfrac{2\,\pi\,L}{Arg\,Ch\,\dfrac{z}{r_1}}\ ,\ para:\ z < 3\,r_1\ ;\quad F = \dfrac{2\,\pi\,L}{ln\,\dfrac{2\,z}{r_1}}\ ,\ para:\ z > 3\,r_1$

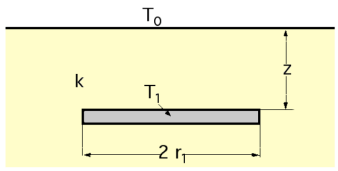
Esfera: $F_{z\,>>\,r_1} = \dfrac{4\,\pi\,r_1}{1 - \dfrac{r_1}{2\,z}}\ ;\quad F_{z\,\to\,\infty} = 4\,\pi\,r_1$

8) Dos cilindros paralelos de longitud L en un medio infinito



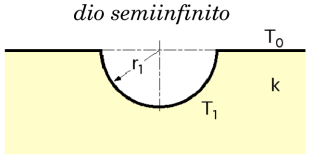
$$F = \frac{2\,\pi\,L}{Arg\,Ch\,\dfrac{a^2 - r_1^2 - r_0^2}{2\,r_0\,r_1}}$$

9) Disco horizontal delgado enterrado



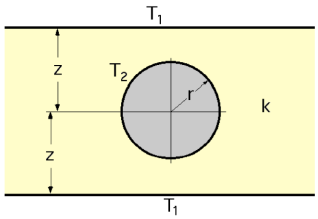
$$F_{z\,=\,0} = 4\,r_1 \;\; ; \;\; F_{z>>2r_1} = 8\,r_1$$

10) Semiesfera enterrada en un medio semiinfinito



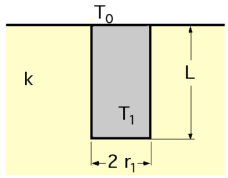
$$F = 2\,\pi\,r_1$$

11) Cilindro horizontal de longitud L enterrado entre dos planos a T_1



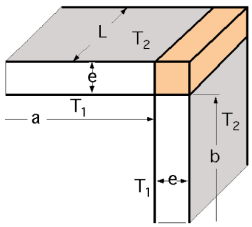
$$F = \frac{2\,\pi\,L}{ln\,\dfrac{4\,z}{r}}$$

12) Cilindro vertical de longitud L en un sólido semiinfinito



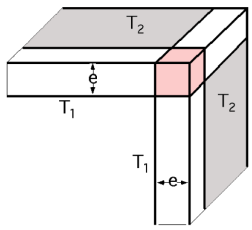
$$F = \frac{2\,\pi\,L}{ln\,\dfrac{2\,L}{r_1}}$$

13) Arista intersección de dos paredes planas de espesor e y anchura L, con temperatura interior T_1 y exterior T_2



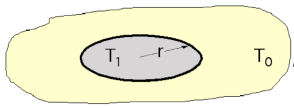
$$F = 0{,}54\,L \;\; ; \;\; a > \frac{e}{5} \;\; ; \;\; b > \frac{e}{5}$$

14) Esquina intersección de tres paredes planas de espesor e, con temperatura interior T_1 y exterior T_2



$$F = 0{,}15\,e \;\; ; \;\; dimensiones > \frac{e}{5}$$

15) Región en forma de disco en la superficie de un sólido semiinfinito



$$F = 4\,r$$

III.3.- MÉTODOS NUMÉRICOS

Los métodos numéricos se pueden aplicar a problemas de conducción en régimen estacionario y a problemas en que aparezcan condiciones de contorno radiativas o que exista una generación de calor interna E.

El método numérico de diferencias finitas divide al modelo sólido en una serie de nudos; haciendo en cada uno de ellos un balance de energía, se obtiene una ecuación para el cálculo de la temperatura de cada nudo; también se obtiene una ecuación separada para cada nudo situado en el

contorno o periferia del sólido.

El resultado final de la aplicación del método es la obtención de un sistema de *n* ecuaciones correspondientes a los *n* nudos del sistema, que sustituyen a las ecuaciones en derivadas parciales y a las condiciones de contorno a aplicar.

Si el número *n* de nudos es pequeño, se pueden utilizar técnicas normales de resolución de ecuaciones; si el número de nudos aumenta, puede ser ventajoso el utilizar soluciones aproximadas por métodos iterativos, y si el número de nudos es muy grande hay que recurrir al ordenador.

Para un problema de conducción bidimensional, la técnica de diferencias finitas se aplica como se especifica a continuación:

a) Se divide el sólido en un cierto número de cuadrados de igual tamaño

b) Se supondrá que las características de cada cuadrado se concentran en el centro del mismo, como la masa, temperatura, etc

c) Cada uno de los cuadrados tiene una longitud $\begin{cases} \Delta x \text{ en la dirección } x \\ \Delta y \text{ en la dirección } y \end{cases}$

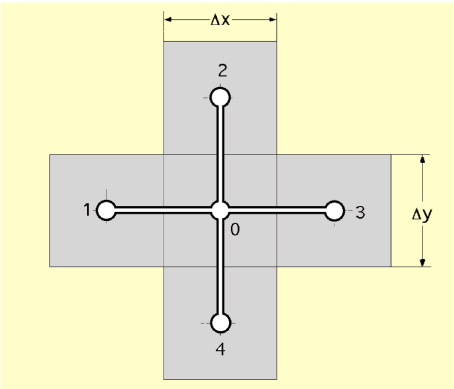


Fig III.11.- Nudo interior conductivo

d) El nudo al que se ha asignado el subíndice 0 se puede encontrar rodeado por cuatro nudos adyacentes, Fig III.11, de forma que cada nudo esté conectado a los contiguos mediante una línea conductora a través de la cual se pueda conducir el calor de un cuadrado a otro.
El balance energético, en régimen estacionario, en el nudo 0, sin generación de energía térmica es:

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_{i \to 0} = 0$$

Nudos interiores.- Aplicando la ecuación de Fourier al nudo interior 0 correspondiente a un cuadrado de espesor *d*, Fig III.11, se obtiene el siguiente balance energético:

$$\left.\begin{aligned} Q_{1\to 0} &= k\,(\Delta y\, d)\,\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = k\,d\,(T_1 - T_0) \\ Q_{2\to 0} &= k\,d\,(T_2 - T_0) \\ Q_{3\to 0} &= k\,d\,(T_3 - T_0) \\ Q_{4\to 0} &= k\,d\,(T_4 - T_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=4} Q_{i\to 0} = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4\,T_0 = 0$$

La exactitud que se consigue al sustituir el gradiente de temperaturas $\frac{dT}{dx}$ por la diferencia finita de dos temperaturas $(T_1 - T_0)$, depende del tamaño de cada cuadrado; a menores dimensiones de los cuadrados, mayor exactitud en el gradiente de temperatura. A todos los nudos que se encuentren situados sobre la periferia del sólido, hay que hacerles un balance de energía por separado.

Nudos en contacto con un fluido.- Si el sólido está en contacto con un fluido a T_F, Fig

III.12, con un coeficiente de transmisión de calor por convección h_C, se asigna a cada nudo de este tipo la mitad de la superficie que a cualquier otro nudo interior. El nudo 0 puede intercambiar calor por conducción con tres nudos contiguos, y transferir calor por convección al fluido.

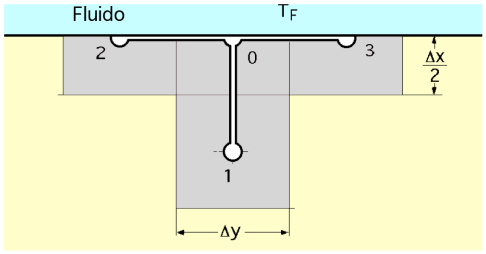


Fig III.12.- Nudo periférico en contacto con un fluido

El balance de energía en el nudo 0 es:

$$Q_{1\to 0} + Q_{2\to 0} + Q_{3\to 0} + Q_{F\to 0} = 0$$

Sustituyendo las aproximaciones de las diferencias finitas para la ley de Fourier correspondiente a los tres primeros términos, y para la ley de Newton en el último, se obtiene, para un espesor unidad:

$$k\,\Delta y\,\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_2 - T_0}{\Delta y} + k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_3 - T_0}{\Delta y} + h_C\;\Delta y\,(T_F - T_0) = 0$$

que para $\Delta x = \Delta y$ se simplifica, quedando en la forma:

$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + \frac{h_C\,\Delta x}{k}\,T_F - \left(2 + h_C\,\frac{\Delta x}{k}\right) T_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + (Bi)\,T_F - \{2 + (Bi)\}\,T_0 = 0$$

A título de ejemplo, para la placa representada en la Fig III.13, en la que la superficie A está en contacto con un fluido a T_F, la B está a una temperatura T_B, la C es una superficie aislada y la D está a T_D se puede indicar, para los diversos nudos que se han considerado, que las temperaturas T_1, T_2 y T_3 son conocidas e iguales a T_B, así como las temperaturas T_7, T_8 y T_9 son también conocidas e iguales a T_D.

Sin embargo, T_4, T_5 y T_6 son desconocidas y habrá que calcularlas mediante los correspondientes balances de energía por unidad de espesor, en las paredes A, B, C, y D.

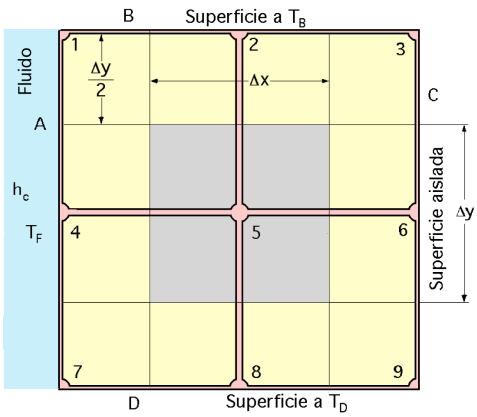


Fig III.13- Placa metálica con sus superficies en diversas situaciones térmicas

$$Q_A = Q_{F\to 1} + Q_{F\to 4} + Q_{F\to 7} = h_C\ \Delta y\ \{ \frac{T_F - T_1}{2} + (T_F - T_4) + \frac{T_F - T_7}{2} \}$$

$$Q_B = Q_{1\to 4} + Q_{2\to 5} + Q_{3\to 6} + Q_{1\to F} = k\ \Delta x\ (\frac{T_1 - T_4}{2\ \Delta y} + \frac{T_2 - T_5}{\Delta y} + \frac{T_3 - T_6}{2\ \Delta y}) + h_C \frac{\Delta y}{2} (T_1 - T_F)$$

$Q_C = 0$, *por estar la superficie C aislada*

$$Q_D = k\ \Delta x\ (\frac{T_9 - T_6}{2\ \Delta y} + \frac{T_8 - T_5}{\Delta y} + \frac{T_7 - T_4}{2\ \Delta y}) + h_C \frac{\Delta y}{2} (T_7 - T_F)$$

Como comprobación global de los resultados obtenidos para las diferentes transferencias térmicas, la transferencia neta de calor en el sólido tiene que ser nula.

Generación de energía en la placa.- Si en el nudo 0 de la placa, Fig III.11, existe un foco térmico generador de energía E por unidad de volumen, el balance energético en el nudo citado, en un sistema bidimensional con 4 nudos vecinos es:

$$Q_{1\to 0} + Q_{2\to 0} + Q_{3\to 0} + Q_{4\to 0} + E\ V = 0$$

y sustituyendo cada término del flujo térmico por la forma en diferencias finitas de la ley de Fourier se tiene:

$$k\ \Delta y\ d\ \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + k\ \Delta x\ d\ \frac{T_2 - T_0}{\Delta y} + k\ \Delta y\ d\ \frac{T_3 - T_0}{\Delta x} + k\ \Delta x\ d\ \frac{T_4 - T_0}{\Delta y} + E\ \Delta x\ \Delta y\ d = 0$$

y si la malla es cuadrada $\Delta x = \Delta y$, por lo que:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4\ T_0 + E\ \frac{\Delta x^2}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + E\ \frac{\Delta x^2}{k}}{4}$$

III.4.- MÉTODO DE RELAJACIÓN

Si se desea incrementar la exactitud de la solución disminuyendo el espaciado de la red, aparecen más nudos con temperaturas desconocidas y, por lo tanto, con ecuaciones adicionales a resolver. El fundamento del método de relajación es el de estimar inicialmente las temperaturas de cada nudo de forma que se satisfagan, aproximadamente, las ecuaciones de balance de energía; así, en vez de intentar hacer que todas las ecuaciones de balance energético sean iguales a cero, como en el caso anterior, lo que se hace es igualarlas a un término R_0 llamado residuo.

A continuación se varían sistemáticamente las temperaturas hasta que se reduce el residuo a un valor muy pequeño, indicándonos este valor la exactitud conque se han estimado las temperaturas iniciales de todos y de cada uno de los nudos. Si todos los residuos se redujesen a cero, las temperaturas obtenidas a partir de ellos serían las soluciones exactas de las ecuaciones del balance de energía.

Para su aplicación se puede descomponer en las siguientes etapas:

a) Hay que fijar de antemano unos valores de todas las temperaturas incógnitas de los nudos que, por intuición, sean todo lo próximas a las verdaderas como se pueda presuponer. Los límites de estas temperaturas vienen especificados por las condiciones de contorno extremas.

b) Se sustituyen las temperaturas iniciales supuestas en cada una de las ecuaciones de los residuos y se procede al cálculo de éstos.

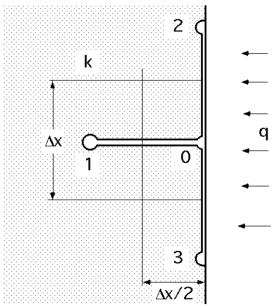
c) Para reducir los residuos hay que modificar la temperatura que corresponda al residuo cuyo valor absoluto sea el mayor de todos, hasta que este residuo se reduzca a cero. La convergencia hacia la solución correcta de temperaturas se favorece si la temperatura del nudo afectado se modifica en el sentido de que su residuo no se reduzca exactamente a cero, sino que pase a tener un valor menor y de signo opuesto que el que poseía antes de hacer el cambio de temperaturas.

d) Finalmente se repite la etapa (c) hasta que se consiga el grado de exactitud deseado.

Siempre que un nodo esté situado en el contorno de un sólido, la ecuación del residuo dependerá del tipo de condición de contorno en la superficie. La ecuación del balance de energía en cada caso concreto, viene referida para el nudo señalado con el subíndice 0.

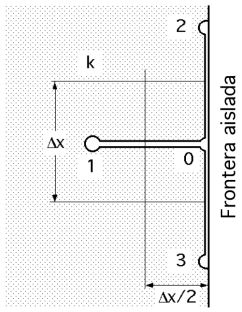
ECUACIONES PARA LOS RESIDUOS EN EL CASO DE NUDOS EN LOS LIMITES. SISTEMAS BIDIMENSIONALES. REDES CUADRADAS $\Delta x = \Delta y$

1) Superficie plana (Frontera isotérmica)



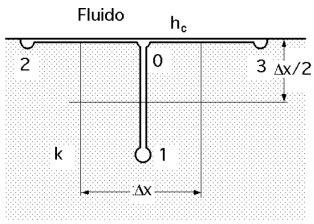
$$q\,\frac{\Delta x}{k} + T_1 + T_0 = R_0$$

2) Superficie plana (Frontera aislada)



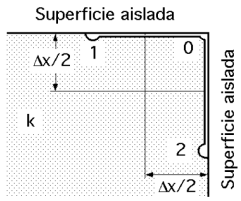
$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 - 2\,T_0 = R_0$$

3) Superficie plana en contacto con un fluido a T_F



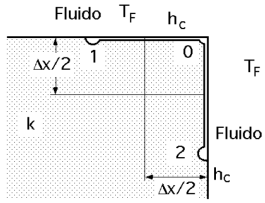
$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 - (2 + Bi)\,T_0 + Bi\,T_F = R_0$$

4) Esquina exterior
(Ambas superficies aisladas)



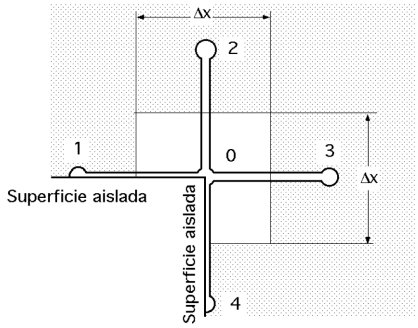
$$\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 = R_0$$

5)Esquina exterior
(Ambas superficies en contacto con un fluido a T_F)



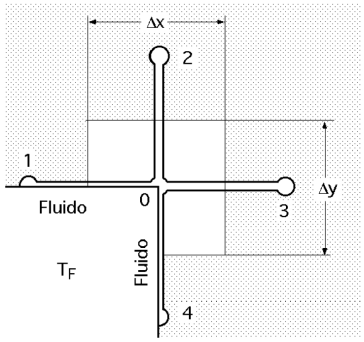
$$\frac{T_1 + T_2}{2} - (1 + Bi)\, T_0 + Bi\, T_F = R_0$$

6) Esquina interior
(Ambas superficies aisladas)



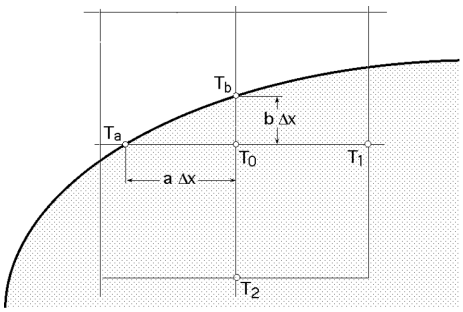
$$\frac{T_1 + T_4}{2} + T_2 + T_3 - 3\, T_0 = R_0$$

7) Esquina interior
(Ambas superficies en contacto con un fluido a T_F)



$$\frac{T_1 + T_4}{2} + T_2 + T_3 - (3 + Bi)\, T_0 + Bi\, T_F = R_0$$

8.- Nodo interior cercano a una superficie curva no isotérmica



$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \left(\frac{T_1}{1 + a} + \frac{T_2}{1 + b} + \frac{T_a}{a\,(1 + a)} + \frac{T_b}{b\,(1 + b)} \right) - T_0 = R_0$$

III.5.- MÉTODO MATRICIAL

El método de relajación no se adapta fácilmente para su utilización mediante técnicas con ordenador, porque exige la selección de la ecuación del nudo que posea el residuo de valor absoluto más grande, y aunque ésto no significa un problema insoluble, existen otros métodos, como el matricial, que lo resuelven basándose en la representación de las ecuaciones del balance de energía para cada nudo en forma de una matriz.

Si el sólido se subdivide en *n* nudos, el conjunto de las ecuaciones correspondientes, a cada nudo, se puede expresar en la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ T_1 + a_{12}\ T_2 + a_{13}\ T_3 + ... + a_{1n}\ T_n = b_1 \\ a_{21}\ T_1 + a_{22}\ T_2 + a_{23}\ T_3 + ... + a_{2n}\ T_n = b_2 \\ a_{31}\ T_1 + a_{32}\ T_2 + a_{33}\ T_3 + ... + a_{3n}\ T_n = b_3 \\ ..... \\ a_{n1}\ T_1 + a_{n2}\ T_2 + a_{n3}\ T_3 + ... + a_{nn}\ T_n = b_n \end{array}\right\}$$

en las que los coeficientes a_{ij} y b_i son constantes conocidas, y las magnitudes T_i son las temperaturas incógnitas. Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma: A T = B, en la que A es una matriz de $n.n$ coeficientes mientras que T y B son matrices columna, compuestas cada una de ellas por n elementos. Muchos de los elementos de la matriz A son cero, concentrándose los no nulos en las proximidades de la diagonal. Los elementos de la matriz B son las constantes de los segundos miembros, es decir, los residuos.

Los elementos de la matriz T son la solución del problema.

$$\mathsf{A} = \left\{\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ .... & .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{array}\right\} \quad \mathsf{T} = \left\{\begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ .... \\ T_n \end{array}\right\} \quad \mathsf{B} = \left\{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ .... \\ b_n \end{array}\right\}$$

Para calcular las temperaturas desconocidas, premultiplicamos por A^{-1}, quedando:

$$\mathsf{A}^{-1}\,\mathsf{A}\,\mathsf{T} = \mathsf{A}^{-1}\,\mathsf{B}\ ;\ \mathsf{T} = \mathsf{A}^{-1}\,\mathsf{B}$$

viniendo dados los elementos de la matriz inversa de A por: $\mathsf{C} = \mathsf{A}^{-1} = \left\{\begin{array}{ccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & ... & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & ... & c_{3n} \\ .... & .... & .... & ... & .... \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & ... & c_{nn} \end{array}\right\}$

Las temperaturas incógnitas de los nudos vienen dadas por:

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}\ b_1 + c_{12}\ b_2 + c_{13}\ b_3 + ... + c_{1n}\ b_n = T_1 \\ c_{21}\ b_1 + c_{22}\ b_2 + c_{23}\ b_3 + ... + c_{2n}\ b_n = T_2 \\ c_{31}\ b_1 + c_{32}\ b_2 + c_{33}\ b_3 + ... + c_{3n}\ b_n = T_3 \\ ..... \\ c_{n1}\ b_1 + c_{n2}\ b_2 + c_{n3}\ b_3 + ... + c_{nn}\ b_n = T_n \end{array}\right\}$$

y como se conocen los valores de todos los coeficientes b_i, el problema del cálculo de las temperaturas se reduce a la determinación de la matriz inversa de A.

III.6.- MÉTODO DE ITERACIÓN

El método de iteración está basado en la resolución explícita de cada ecuación de los nudos, para hallar la temperatura de los mismos. A partir de la ecuación del balance de energía de un nudo

interior en un cuerpo bidimensional, se tiene la siguiente ecuación, para el nudo central 0:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4\,T_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4}$$

Para cuando el nudo esté en el contorno, por ejemplo en contacto con un fluido, se tiene:

$$T_0 = \frac{\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + Bi\,T_F}{2 + Bi}$$

y así se puede escribir, para cada nudo, una ecuación para su temperatura en función de la temperatura de los nudos vecinos. Las ecuaciones de partida para cada nudo son las desarrolladas para el caso del método matricial.

Una vez despejada la temperatura correspondiente al nudo a estudiar, se suponen inicialmente una serie de valores para todas las temperaturas de todos los nudos; seguidamente se calculan nuevos valores para las temperaturas utilizando las ecuaciones de partida de los nudos, de forma que las temperaturas a calcular en cada paso, se basen siempre en los resultados de los nudos más inmediatos. El método se repetirá tantas veces como sea necesario, hasta que la diferencia entre los últimos valores de las temperaturas y los anteriores, estén comprendidos dentro del grado de precisión que se haya fijado de antemano.