IV.- CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN EN SÓLIDOS INFINITOS

pfernandezdiez.es

IV.1.- INTRODUCCIÓN

En la mayor parte de los problemas de tipo térmico que se plantean a nivel técnico intervienen variaciones de la temperatura con respecto al tiempo; a continuación consideraremos las técnicas que permitan obtener, en los sistemas en los que aparezcan condiciones no estacionarias, tanto las distribuciones de temperatura, como las transferencias de calor.

Un proceso de transferencia térmica es transitorio siempre que la temperatura correspondiente al interior del sistema varíe a lo largo del tiempo; existen muchos ejemplos prácticos en los que intervienen fenómenos de transferencia de calor transitorios, como, los procesos de fabricación en los que el producto que se está manufacturando se tiene que calentar o enfriar para transformarlo en un producto adecuado para ser utilizable, o los hornos industriales que se encienden y apagan de modo cíclico y periódico, en los que se realizan procesos que originan variaciones de temperaturas, tanto en su interior como en sus paredes; los aceros y algunas aleaciones, suelen calentarse y enfriarse para modificar sus propiedades físicas de interés industrial, mediante tratamientos térmicos; los motores térmicos funcionan en régimen transitorio tanto durante el arranque, como en otros momentos, relativamente cortos, etc.

Si las variaciones de la temperatura en el sólido a estudiar se consiguen poniéndole en contacto con un medio exterior (líquido o gas), se origina un fenómeno de convección; según sea el valor del coeficiente de convección del fluido y la conductividad térmica del sólido, se pueden dar los tres casos siguientes:

a) Condición de contorno de convección.- Este caso general se obtiene cuando las resistencias a la conducción en el sólido y a la convección tienen magnitudes comparables, dando un nº de Bi del orden de la unidad y $Bi > 0,1$; en esta situación el sólido va modificando paulatinamente su temperatura, al mismo tiempo que su superficie va tomando con más o menos rapidez la temperatura del fluido; el nº de $Fo > 1$.

b) Condición de resistencia térmica interna despreciable.- Este caso particular se obtiene cuando la temperatura del sistema sujeto a una respuesta térmica transitoria es casi uniforme, por lo que se pueden ignorar las pequeñas diferencias de temperatura dentro del mismo; *las variaciones en la energía interna del sistema se pueden expresar en función de las variaciones de la temperatura uniforme, aproximación que se conoce también como modelo de la capacidad térmica global*. La suposición de que la temperatura es uniforme se justifica, puesto que la resistencia térmica a la conducción dentro del sólido es pequeña comparada con la resistencia exterior convectiva. Se cumple para un valor de Bi < 0,1 lo que garantiza el que la temperatura en el interior del sólido, (placa, cilindro, esfera), no diferirá de la de la superficie en más de un 5%, lo que equivale a suponer que el fluido debe tener un bajo coeficiente de convección (gases), por lo que el sólido tiende a la temperatura del fluido en un tiempo relativamente grande, permaneciendo uniforme en cada instante la temperatura del sólido, incluida su superficie.

c) Condición de contorno isotérmica.- Esta condición de contorno particular, también conocida como de *resistencia superficial despreciable*, se consigue cuando el sólido (placa, cilindro, esfera), se sumerge rápidamente en un líquido para el cual el coeficiente de transferencia de calor por convección es muy elevado, es decir, en condiciones en que la resistencia a la transferencia de calor por convección es despreciable; se cumple que la relación h_C/k es muy grande, Bi >> 1, lo que indica que el fluido a T_F tiene la facultad de eliminar o aplicar calor a la superficie del sólido en forma instantánea, por lo que ésta se pondrá a T_F y permanecerá a esta temperatura en todo el proceso. Si el sólido es un buen conductor térmico, el fluido tiene que ser un líquido con un elevado coeficiente de convección, (fluido muy enérgico, como un metal líquido o sales fundidas).

Los tiempos de permanencia son relativamente cortos para que en una estrecha zona periférica sea siempre Fo < 1.

También se consigue una condición de contorno isotérmica, cuando el sólido a estudiar se pone en contacto con otro sólido a distinta temperatura, y se produce un cambio instantáneo de su temperatura superficial de forma que adquiere la del segundo sólido.

En el presente estudio vamos a obtener las soluciones analíticas de la expresión general de la ecuación de la conducción en régimen transitorio, en sistemas en los que se produzcan variaciones de sus temperaturas, tanto espaciales como temporales, para algunas geometrías simples, que suelen encontrarse en determinadas aplicaciones prácticas, como:

- *Una placa infinita de espesor L, para la cual T = T(x,t)*
- *Un cilindro macizo infinitamente largo de radio R, para el que T = T(r,t)*
- *Una esfera maciza de radio R, para la cual T = T(r,t)*

Las condiciones de contorno para estas geometrías, comunes a las tres, son:

a) La primera condición de contorno especifica que el plano medio de la placa equivale a un aislamiento o plano adiabático, al igual que el eje del cilindro o el centro de la esfera.

b) La segunda condición de contorno dice que el calor se transfiere desde la superficie exterior del sólido a un fluido a la temperatura T_F, con un coeficiente de transferencia de calor h_C.

Esta condición de contorno se expresa en la forma: $h_C\ (T_{pF} - T_F\ ) = -\ k\ (\frac{\partial T}{\partial x})_{x_{sup}}$

La condición inicial en los tres casos es la misma; se puede partir de un sólido isotermo, temperatura T_0 para t = 0, o no, temperatura f(x) ó f(r) para t = 0, y a partir de este instante se introduce el sólido en el fluido que se encuentra a una temperatura T_F iniciándose el proceso transitorio de transferencia de calor. Las soluciones correspondientes a la distribución de temperaturas y a la transferencia térmica, suelen presentarse en forma analítica o en forma gráfica, viniendo expresadas las variables en forma adimensional.

Los problemas de conducción en régimen transitorio en los que intervienen condiciones de contorno de convección, vienen regidos por los números de Biot y Fourier; las temperaturas locales son función de la posición adimensional dentro del sólido, del número de Biot y del número de Fourier. En un problema de convección, cada una de las gráficas que se obtienen, se compone de dos familias de curvas; la primera representa la temperatura adimensional del centro, eje, o plano central, en la forma:

$$\frac{\Phi_{Centro}}{\Phi_0} = \frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F}$$

Para determinar una temperatura local que se corresponda con una posición distinta de la de simetría mencionada, hay que utilizar la segunda familia de curvas propuestas, que representa la temperatura adimensional local en función de la temperatura de la línea, plano central, o centro, según el caso que, para placa infinita, cilindro, o esfera, es de la forma:

$$\frac{\Phi}{\Phi_C} = \frac{T - T_F}{T_C - T_F}$$

Para determinar el valor correspondiente a una temperatura local se puede utilizar el producto de las dos ecuaciones anteriores, obteniéndose:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{T - T_F}{T_0 - T_F}$$

Una vez conocida la distribución de temperaturas Φ, se calcula el calor transferido desde la superficie, utilizando la ecuación de Fourier evaluada en la intercara {sólido-fluido}.

Cada valor Q(t) de transferencia térmica, es la cantidad total de calor que se transfiere desde la superficie hacia el fluido, en el intervalo (0 ÷ t).

El valor de Q_0 es la energía inicial almacenada que existe en el sólido en (t = 0) siendo T_F la temperatura de referencia.

La energía almacenada en el sólido en el intervalo de tiempo (0 ÷ t) es la diferencia: $Q_0 - Q(t)$

IV.2.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN PLACA INFINITA CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Una situación general que tiene una gran importancia práctica es el enfriamiento o el calentamiento de una placa rodeada por un fluido convector a T_F; la placa se introduce instantáneamente en el fluido en condiciones en las que la resistencia a la transferencia de calor es muy pequeña, es decir, Bi es grande; la superficie del sólido va tomando paulatinamente la temperatura del medio exterior, a medida que el efecto térmico se transmite al interior.

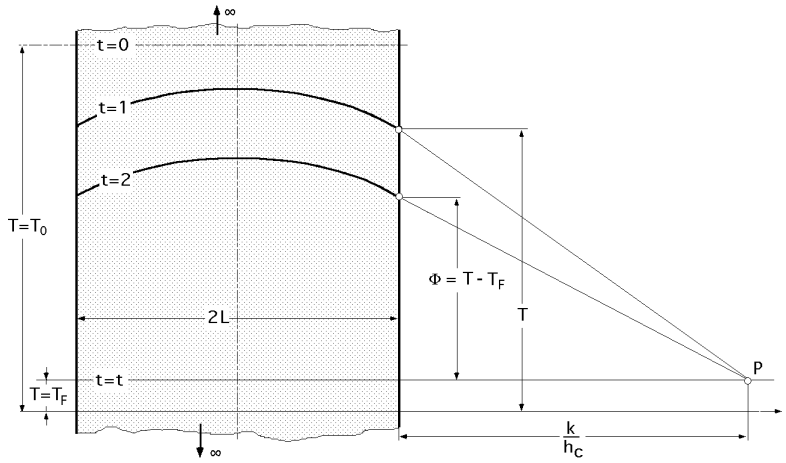


Fig IV.1.- Interpretación geométrica de la condición de contorno de convección

Si se considera una placa infinita de espesor $e = 2\,L$, Fig IV.1, para la que en el tiempo $t = 0$ existe una distribución de temperaturas conocida, y en la que no existen efectos de borde, se aplica la ecuación diferencial:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}\ ,\ con:\ T = T(x, t)$$

Haciendo el cambio de variable $\Phi = T - T_F$, con $T_F \neq 0$, la ecuación diferencial queda en la forma:

$$\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \xrightarrow{Solución\ general} \quad \Phi = e^{-\lambda^2 \alpha t}\{B_1\, sen(\lambda x) + B_2\, cos(\lambda x)\}$$

y las condiciones de contorno:

1) Para: $t = 0\ ,\ -L \le x \le L\ ;\ \Phi = f(x)$ ó T_0

2) Para: $t > 0$, *se cumple que en:*
$$\begin{cases} x = 0 \ ;\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \\ x = \pm L \ ;\ -k\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=\pm L} = h_C\,\Phi \ ;\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=\pm L} = -\frac{h_C}{k}\,\Phi = a_1\,\Phi \end{cases}$$

3) Si el fluido a ambos lados de la placa es el mismo, resulta que h_C *también será el mismo entre ambas semiplacas, por lo que existirá una condición de simetría de temperaturas, de forma que:*

$\Phi_{-x} = \Phi_{+x}$.

La segunda de estas condiciones se puede interpretar geométricamente, ya que $\frac{h_C}{k} = Cte = -a_1$, y la igualdad se cumple para cualquier valor de Φ, luego el punto P, en la Fig IV.1, es un punto fijo que una vez determinado, permite calcular el gradiente de temperatura en cualquier punto de la superficie de la placa. Esta construcción se aplicará posteriormente al cálculo gráfico de temperaturas para un sólido con convección en su superficie.

Teniendo en cuenta la condición de contorno en $x = 0$:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 = e^{-\lambda^2 \alpha t}\ \lambda\{B_1\, cos(\lambda x) - B_2\, sen(\lambda x)\}_{x=0} \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0$$

la solución se reduce a: $\Phi = B\, e^{-\lambda^2 \alpha\, t}\, cos\, (\lambda\, x)$

La condición de contorno en $x = \pm L$ permite obtener los valores de λ:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=\pm L} = -\frac{h_C}{k}\,\Phi \quad \Rightarrow \quad B\, e^{-\lambda^2 \alpha\, t}\;\lambda\,\{-\,sen\,(\lambda\, x)\}_{x=L} = -\frac{h_C}{k}\,\{B\, e^{-\lambda^2 \alpha\, t} cos\,(\lambda\, x)\}_{x=L}$$

$$sen\,(\lambda\, L) = \frac{h_C}{k\,\lambda}\, cos\,(\lambda\, L) \quad ; \quad cotg\,(\lambda\, L) = \frac{\lambda\, L}{Bi}$$

cuya representación gráfica se presenta en la Fig IV.2. Dicha ecuación se satisface para un número infinito de valores del parámetro $(\lambda\, L)$ por lo que para un valor de L dado, sus soluciones se encuentran para diversos valores de λ, como intersección de las curvas:

$$y = cotg\,(\lambda\, L)\;;\; y = \frac{\lambda\, L}{Bi}$$

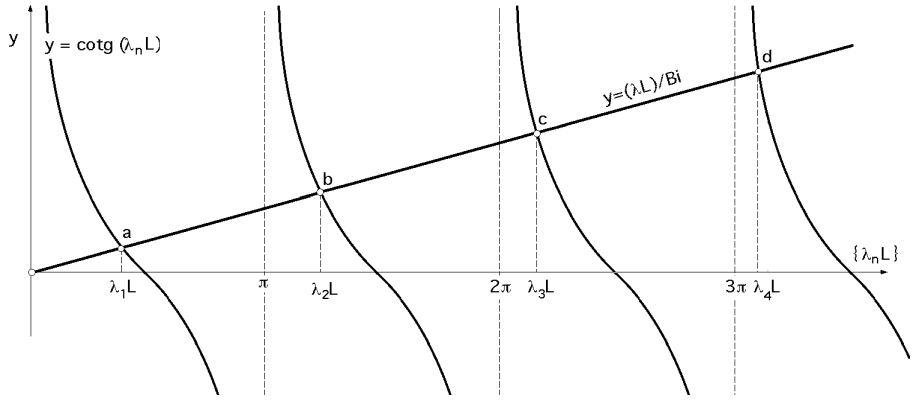


Fig IV.2.- Soluciones gráficas de la condición de contorno de convección en placa infinita

Existen n valores de $(\lambda_n\, L)$ que satisfacen la ecuación, Fig IV.2, por lo que la distribución de temperaturas es una serie de la forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\lambda_n^2 \alpha\, t}\, cos(\lambda_n x)$$

en la que λ_n es la raíz enésima de la ecuación:

$$(\lambda_n L)\, tg(\lambda_n L) - Bi = 0 \quad ; \quad \frac{\lambda_n L}{Bi} = cotg\,(\lambda_n L)$$

La condición inicial, Φ = f(x), para (t = 0) es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, cos\,(\lambda_n L)$$

a partir de la cual se calcula B_n teniendo en cuenta la Teoría de funciones ortogonales:

$$\int_0^L f(x)\;\; cos\;\; (\lambda_n x)\, dx \;=\; B_1 \int_0^L cos\;\; (\lambda_1 x)\;\; cos\;\; (\lambda_n x)\, dx \;\; + \ldots + B_n \int_0^L cos^2(\lambda_n x)\, dx \;=\; B_n \int_0^L cos^2(\lambda_n x)\, dx$$

$$B_n = \frac{\int_0^L f(x)\;\; cos\;\; (\lambda_n x)\, dx}{\int_0^L cos^2(\lambda_n x)\, dx} = \frac{\int_0^L f(x)\;\; cos\;\; (\lambda_n x)\, dx}{\frac{L}{2} + \frac{sen\;(\lambda_n L)\;\; cos\;\; (\lambda_n L)}{2\;\lambda_n}}$$

Raices de la ecuación: $tg\,(\lambda_n L) = \frac{Bi}{\lambda_n L}$

Bi	$\lambda_1 L$	$\lambda_2 L$	$\lambda_3 L$	$\lambda_4 L$	$\lambda_5 L$	$\lambda_6 L$
0	0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,1835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	17,9519
60	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	13,9644	17,0686
100	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	2788

La expresión de la distribución de temperaturas en la placa infinita, función de la posición y del tiempo, es:

$$\Phi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{cos\ (\lambda_n x)}{\lambda_n L + sen\ (\lambda_n L)\ cos\ (\lambda_n L)} \int_0^L f(x)\ cos\ (\lambda_n x)\, dx$$

Para el caso particular en que la primera condición de contorno fuese de la forma:

$\Phi = f(x) = \Phi_0 = Cte$

la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{sen\ (\lambda_n L)\ cos\ (\lambda_n x)}{\lambda_n L + sen\ (\lambda_n L)\ cos\ (\lambda_n L)}$$

que viene representad gráficamente (Heysler) en la Fig IV.3.

La temperatura, $\Phi_C = T_C - T_F$, en el plano de simetría, $x = 0$, de la placa de espesor $2\,L$ es:

$$\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{sen\,(\lambda_n L)}{\lambda_n L + sen\,(\lambda_n L)\,cos\,(\lambda_n L)}$$

que viene representada en las Fig IV.4a.b.

El *calor disipado* por la placa en el intervalo (0 ÷ t) es:

$$Q = 2\,A \int_0^t q\,dt = -2\,A\,k \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=L} dt = -4\,k\,A\,T_0 \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\, sen^2(\lambda_n L)\, \lambda_n}{\lambda_n L + sen\,(\lambda_n L)\,cos\,(\lambda_n L)}\, dt =$$

$$= \frac{4\,k\,A\,(T_0 - T_F)}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^2(\lambda_n L)}{\lambda_n L + sen\,(\lambda_n L)\,cos\,(\lambda_n L)} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n}$$

La expresión del flujo de calor adimensional Q/Q_0 se conoce como *fracción de energía perdida*, y es la pérdida real de energía en el tiempo t dividida entre la pérdida total necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente.

Pérdida total de calor necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente:

$$Q_0 = 2\,L\,A\,\rho\,c_p(T_0 - T_F) = 2\,L\,A\,\frac{k}{\alpha}\,\Phi_0$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^2(\lambda_n L)}{\lambda_n L + sen\,(\lambda_n L)\,cos\,(\lambda_n L)} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n L}$$

Considerando que el calor almacenado en la pared en el intervalo $0 \le t \le t$ viene dado por:

$Q = 2\,L\,A\,\rho\,c_p\,(T_0 - \hat{T}_{final})$, *siendo* $\hat{T}_{final}$ *la temperatura media final*

en la que: $\hat{\Phi}_{Final}\,L = \int_0^L \Phi\,dx \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}_{Final} = \frac{1}{L} \int_0^L \Phi\,dx$

$$\frac{\hat{\Phi}_{Final}}{\Phi_0} = \frac{\hat{T}_{Final} - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{2}{L} \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{sen\,(\lambda_n L)\,cos\,(\lambda_n x)}{\lambda_n L + sen\,(\lambda_n L)\,cos\,(\lambda_n L)}\, dx =$$

$$= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{sen^2(\lambda_n L)}{\lambda_n \{\lambda_n L + sen\,(\lambda_n L)\,cos\,(\lambda_n L)\}}$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{2\,A \int_0^t q\,dt}{2\,L\,A\,\rho\,c_p(T_F - T_0)} = \frac{2\,L\,A\,\rho\,c_p(T_0 - \langle T \rangle_{Final})}{2\,L\,A\,\rho\,c_p(T_0 - T_F)} = \frac{T_0 - \langle T \rangle_{Final} \pm T_F}{T_0 - T_T} = 1 - \frac{\langle F \rangle_{Final} - T_F}{T_0 - T_T} =$$

$$= 1 - \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{sen^2(\lambda_n L)}{\lambda_n \{\lambda_n L + sen\,(\lambda_n L)\,cos\,(\lambda_n L)\}}$$

Haciendo uso de las gráficas de Heysler se determinan la temperatura en el centro de la placa T_C y la temperatura T(x,t) de cualquier punto, en el mismo instante y con el mismo número de Biot. Mediante la gráfica de Gröber, Fig IV.5, se puede hallar el flujo calorífico adimensional. Estas gráficas se pueden utilizar siempre que se mantenga la hipótesis de conducción monodimensional, y se desprecien los efectos de borde, para valores de Fo>1.

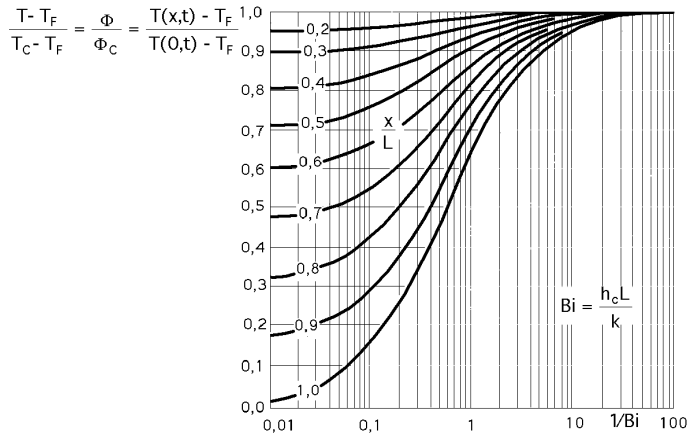


Fig IV.3.- Temperatura local adimensional en el caso de una placa infinita de espesor 2 L, en función de la temperatura del plano medio

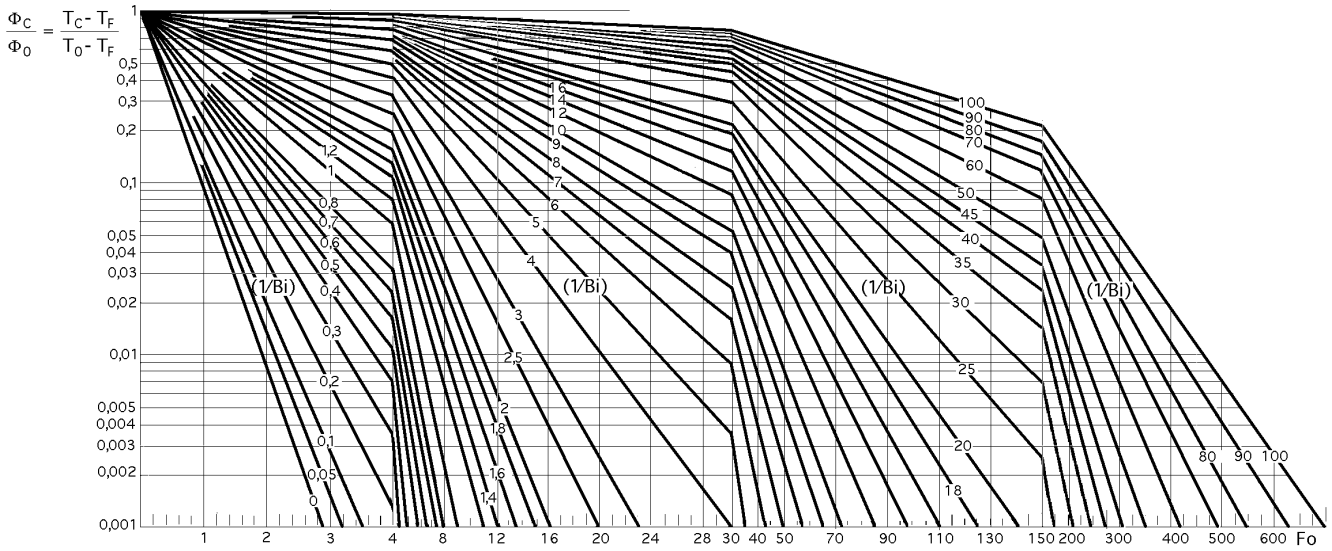


Fig IV.4a.- Temperatura adimensional del plano medio de una placa infinita de espesor 2 L

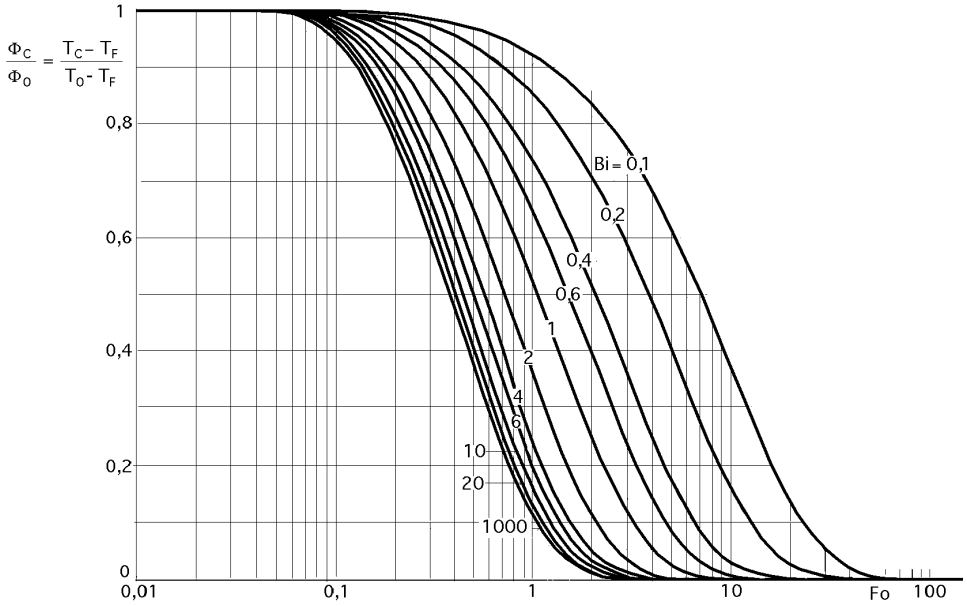


Fig IV.4b.- Temperatura adimensional del plano medio de una placa infinita de espesor 2 L

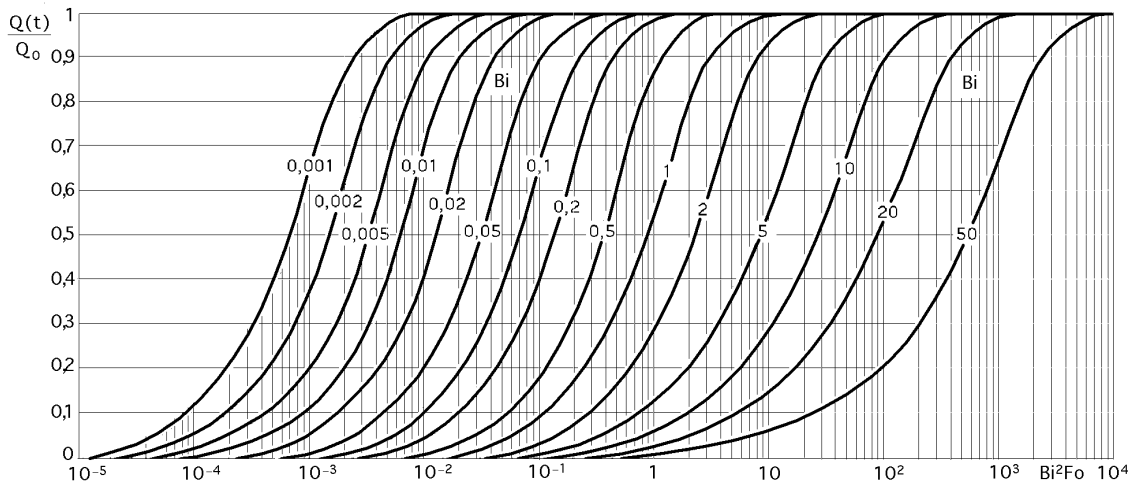


Fig IV.6.- Transferencia térmica adimensional desde la superficie de una placa infinita de espesor 2 L

No se recomiendan para valores de Fo < 1, utilizándose en este caso la condición de contorno isotérmica, que se desarrolla en el siguiente capítulo, y que matemáticamente es más simple.

IV.3.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UN CILINDRO INFINITO CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Este problema se resuelve en forma similar al anterior. Si llamamos R al radio exterior del cilindro que se calienta, (o enfría), y que inicialmente (t = 0) en el intervalo $(0 \le r \le R)$ tiene una distribución de temperaturas conocida, de la forma, $\Phi = f(r)$ ó $(T_0 - T_F)$, la ecuación diferencial a resolver, en *coordenadas cilíndricas*, es:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\ , \quad con:\ \Phi = T - T_F$$

Si representamos Φ en la forma, $\Phi = R(r)\,\theta(t)$, resulta:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r}\theta \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{dr^2} = \frac{\partial^2 R}{dr^2}\theta \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}R$$

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 R}{dr^2}\theta + \frac{\theta}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}R \quad ; \quad \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha\,\theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\lambda^2$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes y sus soluciones son:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} = -\lambda^2 R \xrightarrow{\text{Solución general}} R = B_1 J_0(\lambda r) + B_2 Y_0(\lambda r)$$

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\lambda^2\,\alpha\,dt \xrightarrow{\text{Solución general}} \theta = B_3\, e^{-\lambda^2 \alpha t}$$

Como el cilindro no puede admitir en su eje $(r = 0)$ una solución infinita, por cuanto $Y_0(0) = \infty$, resulta que B_2 tiene que ser cero, y se obtiene una ecuación de la forma: $R = B_1 J_0(\lambda r)$

La solución general que proporciona la distribución de temperaturas es:

$$\Phi = B_3\, e^{-\lambda^2 \alpha t}\, B_1 J_0(\lambda r) = B\, e^{-\lambda^2 \alpha t} J_0(\lambda r)$$

en la que B y λ son constantes, que se determinan mediante las condiciones de contorno y $J_0(\lambda r)$ es la

función de Bessel de primera especie y orden cero.

La condición inicial es: $t = 0 \;;\; 0 \le r \le R \;;\; \Phi = f(r)$ *ó* Φ_0

La condición de contorno *para un cambio de la temperatura en la superficie lateral del cilindro infinito a:* $\Phi = T - T_F$*, es:*

$$t > 0 \;\;;\;\; \Phi_{r=R} = 0 = B\, e^{-\lambda^2 \alpha t} J_0(\lambda R) \;\;;\;\; J_0(\lambda R) = 0 \;\Rightarrow\; J_0(\lambda_n R) = 0$$

por lo que:

$$\Phi = B\, e^{-\lambda^2 \alpha t}\, J_0(\lambda r)$$

que se tiene que cumplir para cualquier valor de t con las condiciones:

$$\begin{cases} Para:\ t = 0 \;;\; 0 \le r \le R \;;\; \Phi = f(r) \;\; ó \;\; \Phi = T_0 \\ Para:\ t \ge 0 \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R} = \dfrac{-\,h_C}{k}\, T \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la segunda condición de contorno y que:

$$\frac{\partial}{\partial r}\, J_0(\lambda r) \;=\; -\,\lambda J_1(\lambda r)$$

resulta:

$$B\, e^{-\lambda^2 \alpha t}\, \{-\,\lambda J_1(\lambda r)\}_{r=R} = -\,\frac{h_C}{k}\, \{B\, e^{-\lambda^2 \alpha t}\, J_0(\lambda r)\}_{r=R} \;\Rightarrow\; \lambda R = \frac{J_0(\lambda R)}{J_1(\lambda R)}\, Bi \;\;;\;\; \frac{J_0(\lambda R)}{J_1(\lambda R)} = \frac{\lambda R}{Bi} = y$$

que se satisface para infinitos valores de λ como se observa en la solución gráfica que se muestra en la Fig IV.6, como intersección de las curvas:

$$y = \frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} \;\;;\; y = \frac{\lambda_n R}{Bi}$$

siendo los valores de λ_n raíces de la ecuación: $\dfrac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \dfrac{\lambda_n R}{Bi}$, obteniéndose una sucesión de valores que conforman un desarrollo en serie para la distribución de temperaturas, de la forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\lambda_n^2\, \alpha t}\, J_0(\lambda_n r)$$

La primera condición de contorno: $\{\Phi = f(r)\,,\, t = 0\}$*, implica que:*

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, J_0(\lambda_n r) = B_1\, J_0(\lambda_1 r) \;+\; B_2\, J_0(\lambda_2 r) \;+\; \ldots \;+\; B_n\, J_0(\lambda_n r)$$

obteniéndose a partir de ella el valor de B_n teniendo en cuenta la Teoría de funciones ortogonales, en la forma:

$$\int_0^R r\, f(r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr =$$

$$= B_1 \int_0^R r\, J_0(\lambda_1 r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr \;+\; B_2 \int_0^R r\, J_0(\lambda_2 r)\, J_0(\lambda_n r)\, dr \;+\; \ldots \;+\; B_n \int_0^R r\, J_0^2(\lambda_n r)\, dr \;+\; \ldots$$

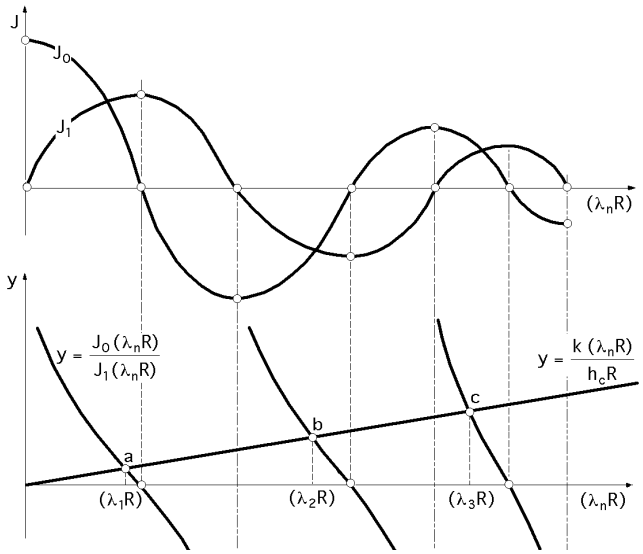


Fig IV.6.- Solución gráfica de la segunda condición de contorno de un cilindro infinito

Raices de la ecuación: $\frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \frac{\lambda_n R}{Bi}$

Bi	$\lambda_1 R$	$\lambda_2 R$	$\lambda_3 R$	$\lambda_4 R$	$\lambda_5 R$	$\lambda_6 R$
0,00	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,2960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,2	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,3	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,4	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,5	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,6	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,7	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,8	1,1490	4,0325	7,1282	10,2516	13,3835	16,5191
0,9	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	13,4353	16,5612
2	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Por definición de ortogonalidad:

$$\int_0^R r\, J_0(\lambda_i r)\, J_0(\lambda_j r)\, dr = 0$$

con $i \neq j$, por lo que todas las integrales del segundo miembro, a excepción de la última, son cero, es decir:

$$\int_0^R r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr = B_n \int_0^R r J_0^2(\lambda_n r)\, dr = B_n \frac{R^2}{2} \{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)\}$$

$$B_n = \frac{\int_0^R r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr}{\int_0^R r J_0^2(\lambda_n r)\, dr} = \frac{\int_0^R r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr}{\frac{R^2}{2} \{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)\}}$$

La distribución de temperaturas es:

$$\Phi = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} J_0(\lambda_n r) \frac{\int_0^R r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr}{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int_0^R r\, J_0(\lambda_i\, r)\, J_0(\lambda_j\, r)\, dr = 0$$

la distribución de temperaturas para una barra cilíndrica calentada inicialmente a una temperatura uniforme, $\Phi_0 = T_0 - T_F$, es:

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n} \frac{J_1(\lambda_n R) J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)} = \frac{2\, h_{cF}}{R\, k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t} J_0(\lambda_n r)}{\{\lambda_n^2 + (\frac{h_{cF}}{k})^2\} J_0(\lambda_n R)}$$

Para $r = 0$, eje del cilindro, la temperatura es: $\begin{cases} \Phi_C = T_C - T_0 \\ J_0(0) = 1 \end{cases}$, por lo que:

$$\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n} \frac{J_1(\lambda_n R)}{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)} = \frac{2\, h_{cF}}{R\, k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\{\lambda_n^2 + (\frac{h_{cF}}{k})^2\} J_0(\lambda_n R)}$$

La disipación de calor adimensional es: $\frac{Q}{Q_0} = \frac{-k\, 2\, \pi R \int_0^t (\frac{\partial \Phi}{\partial r})_{r=R} dt}{\pi R^2 k \frac{\Phi_0}{\alpha}} = -\frac{2\, \alpha}{R\, T_0} \int_0^t (\frac{\partial T}{\partial r})_{r=R} dt =$

$$= -\frac{2\, \alpha}{R\, T_0} \int_0^t \frac{2\, \Phi_0}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{J_1(\lambda_n R) \{-\lambda_n J_1(\lambda_n R)\}}{\lambda_n \{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)\}} dt = -\frac{4\, \alpha}{R^2} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{J_1^2(\lambda_n R)}{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)} dt =$$

$$= \frac{4\, \alpha}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2 \alpha} \frac{J_1^2(\lambda_n R)}{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)} = \frac{4}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2} \frac{1}{\frac{J_0^2(\lambda_n R)}{J_1^2(\lambda_n R)} + 1} =$$

$$= \left| \frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \frac{\lambda_n R}{Bi} \right| = \frac{4}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2} \frac{1}{(\frac{\lambda_n R}{Bi})^2 + 1} = \frac{4}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2} \frac{1}{(\frac{\lambda_n k}{h_{cF}})^2 + 1}$$

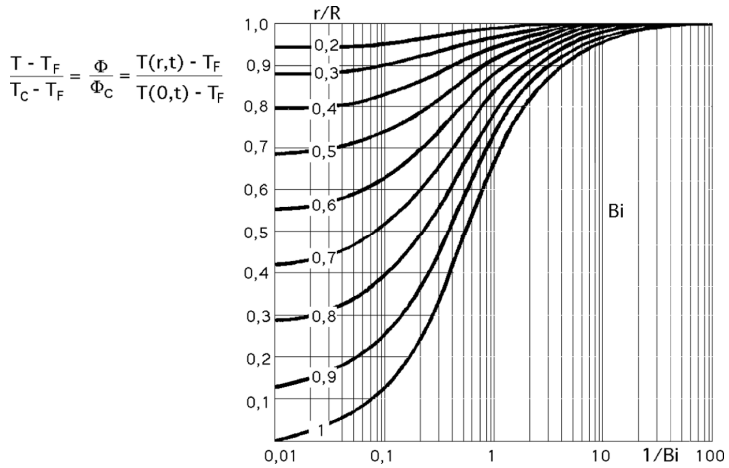


Fig IV.7.- Temperatura local adimensional para un cilindro infinito de radio R en función de la temperatura del eje

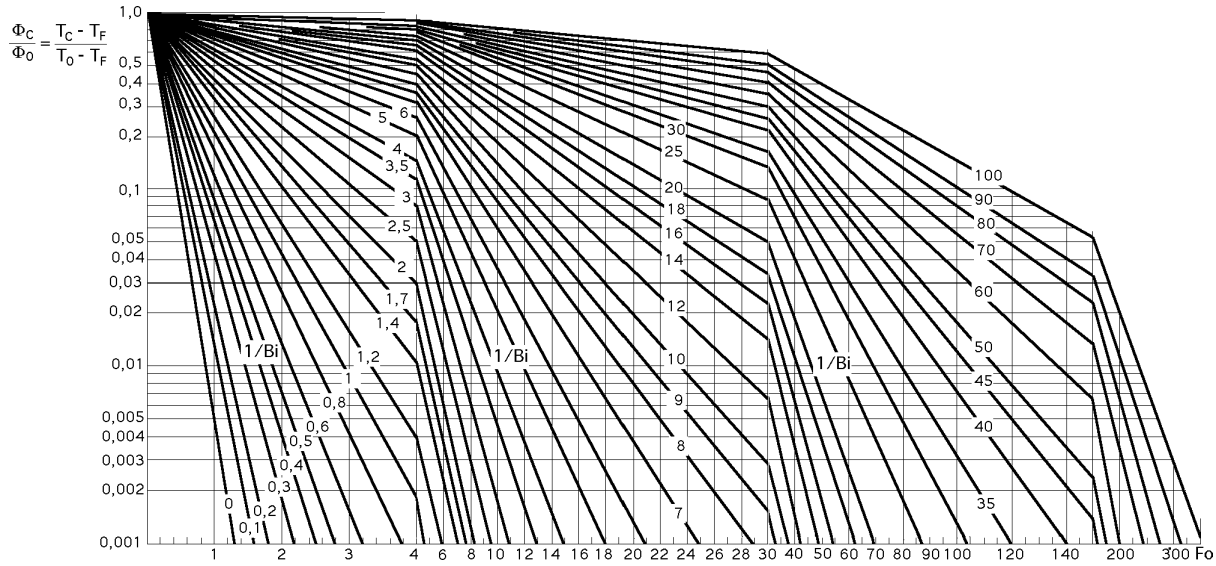


Fig IV.8a.- Temperatura adimensional en el eje de un cilindro infinito de radio R

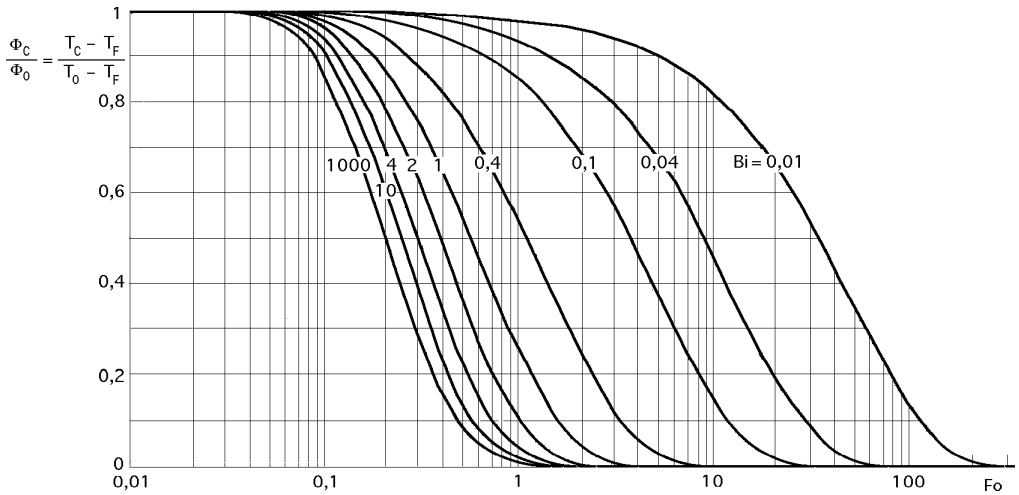


Fig IV.8b.- Temperatura adimensional en el eje de un cilindro infinito de radio R

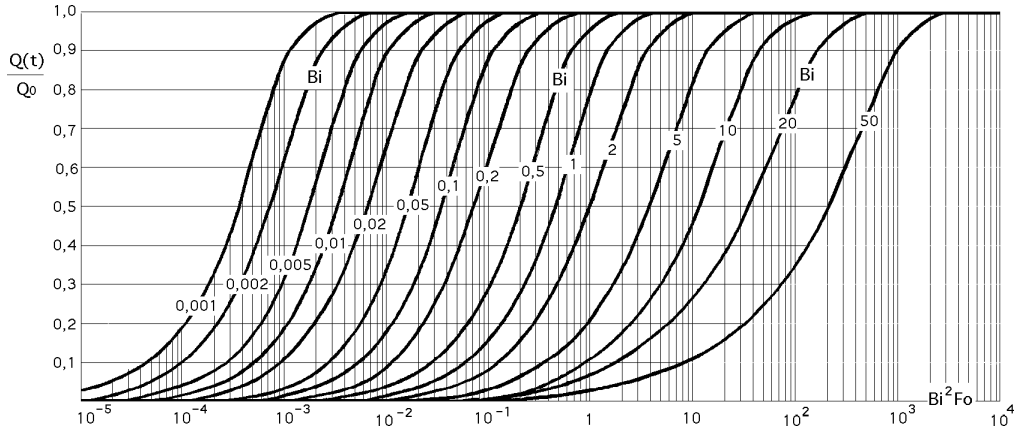


Fig IV.9.- Transferencia térmica adimensional desde un cilindro infinito de radio R

El cálculo de las temperaturas y el flujo térmico, se puede hacer con ayuda de los ábacos de Gröber y Heysler, Fig IV.7, 8 y 9.

IV.4.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UNA ESFERA CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Para estudiar la distribución de temperaturas en una esfera que se calienta o enfría en un fluido, se parte de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Solución general}} \quad \Phi = B\ e^{-\lambda^2 \alpha t}\ \frac{sen\,(\lambda r)}{\lambda r}$$

con las siguientes condiciones de contorno: $\begin{cases} Para: t = 0\ ;\ \Phi = f(r)\text{, ó } T_0 - T_F \\ Para: t > 0\ ;\ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right\rangle_{r=R} = -\frac{h_C}{k}\left. T\right\rangle_{r=R} \end{cases}$

Aplicando la segunda condición se obtiene la relación que define las λ en la forma:

$$B\,e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \left.\frac{\lambda \cos(\lambda r)(\lambda r) - \lambda\, sen(\lambda r)}{(\lambda r)^2}\right\rangle_{r=R} = -\frac{h_C}{k} B\,e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \left.\frac{sen(\lambda r)}{(\lambda r)}\right\rangle_{r=R}$$

$$(\lambda R)\cos(\lambda R) - sen(\lambda R) = -\frac{R\,h_C}{k} sen(\lambda R) = -Bi\, sen(\lambda R)$$

$$cotg(\lambda R) = \frac{1 - Bi}{\lambda R} \quad ; \quad y = cotg(\lambda R) \quad ; \quad y = \frac{1 - Bi}{\lambda R}$$

La ecuación, y = cotg (λR), es una función trigonométrica

La ecuación $y = \frac{1 - Bi}{\lambda R}$ *es una hipérbola equilátera; su intersección con la anterior permite obtener los infinitos valores de (λR)*

La solución general de la distribución de temperaturas es de la forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}\ \frac{sen(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \quad , \quad con:\ cot\, g(\lambda_n R) = \frac{1 - Bi}{\lambda_n R}$$

Para hallar el valor de B_n aplicamos la primera condición de contorno, *t = 0, Φ = f(r)*

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} = B_1 \frac{sen\,(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + B_2 \frac{sen\,(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + \ldots + B_n \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r}$$

y haciendo uso de la teoría de funciones ortogonales se obtiene:

$$\int_0^R sen\,(\lambda_i\, r)\, sen\,(\lambda_j\, r)\, dr \;=\; 0, \;\; con:\; i \neq j$$

$$\int_0^R \; f(r)\,(\lambda_n r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr \;=\; B_1 \int_0^R \; \frac{\lambda_n r}{\lambda_1 r} \; sen\,(\lambda_1 r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr \;+$$

$$+\, B_2 \int_0^R \; \frac{\lambda_n r}{\lambda_2 r} \; sen\,(\lambda_2 r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr \;+\; \ldots \;+\; B_n \int_0^R \; sen^2(\lambda_n r)\, dr \;=\; B_n \int_0^R \; sen^2(\lambda_n r)\, dr$$

$$B_n \;=\; \frac{\int_0^R \; f(r)\,(\lambda_n r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr}{\int_0^R \; sen^2(\lambda_n r)\, dr} \;=\; \frac{\int_0^R \; f(r)\,(\lambda_n r)\, sen\,(\lambda_n r)\, dr}{\frac{R}{2} \;-\; \frac{sen\,(\lambda_n R)\; cos\;(\lambda_n R)}{2\;\lambda_n}}$$

Los valores de B_n son distintos para cada superficie equipotencial, o lo que es lo mismo, para cada valor de *r*.

Raices de la ecuación: $cotg\,(\lambda_n L) = \frac{1 - Bi}{\lambda_n L}$

Bi	$\lambda_1 L$	$\lambda_2 L$	$\lambda_3 L$	$\lambda_4 L$	$\lambda_5 L$
0	0	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662
0,005	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669
0,02	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676
0,03	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683
0,04	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690
0,05	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697
0,06	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705
0,07	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712
0,08	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719
0,09	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726
0,1	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733
0,2	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804
0,3	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875
0,4	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946
0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017
0,6	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088
0,7	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159
0,8	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230
0,9	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301
1	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372
1,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724
2	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075
3	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764
4	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434
5	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080
6	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699
7	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288
8	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847
9	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374
10	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870
11	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335
16	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251
21	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625
31	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380
41	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417
51	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090
101	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537

La ecuación general que proporciona la distribución de temperaturas a lo largo del tiempo, y de las superficies isotermas de radio r, es de la forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \; \frac{\int_0^R f(r)\,(\lambda_n r)\,sen\,(\lambda_n r)\,dr}{\frac{R}{2} - \frac{sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)}{2\,\lambda_n}}$$

Para: f(r) = Φ_0, resulta: $\frac{\Phi}{\Phi_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \; \frac{\int_0^R (\lambda_n r)\,sen\,(\lambda_n r)\,dr}{R - \frac{sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)}{\lambda_n}} =$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \left[\frac{sen\,(\lambda_n r) - (\lambda_n r)\,cos\,(\lambda_n r)}{\lambda_n \{ R - \frac{sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)}{\lambda_n} \}} \right]_0^R = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \; \frac{sen\,(\lambda_n R) - (\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)}{\lambda_n R - sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)\}} =$$

$$= \left| \; cot\,g\,(\lambda_n R) = \frac{1 - Bi}{\lambda_n R} \; \right| = 2\,R\,Bi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{sen\,(\lambda_n r)}{r} \; \frac{sen\,(\lambda_n R)}{(\lambda_n R)^2 + (Bi - 1)\,sen^2(\lambda_n R)\}}$$

Si se supone que la temperatura en el centro de la esfera (r = 0) es: $\Phi_C = T_C - T_F$, se obtiene:

$$\frac{\Phi_C}{\Phi_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \; \frac{sen\,(\lambda_n R) - (\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)}{\lambda_n R - sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)\}} \Big|_{r=0} = \left| \begin{array}{l} \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \Big|_{r=0} = \frac{0}{0} \;\; \Rightarrow \\ L'Hôpital: \; \frac{sen\,(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \Big|_{r=0} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{sen\,(\lambda_n R) - (\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)}{\lambda_n R - sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)\}} = 2\,R\,Bi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{\lambda_n\,sen\,(\lambda_n R)}{(\lambda_n R)^2 + (Bi - 1)\,sen^2(\lambda_n R)}$$

La disipación de calor adimensional viene determinada por la expresión:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{-4\,\pi R^2 k \int_0^t (\frac{\partial \Phi}{\partial r})_{r=R} dt}{\frac{4\,\pi R^3}{3}\,\rho\,c_p\,(T_0 - T_F)} = -\frac{3\,k}{R\,\rho\,c_p\,(T_0 - T_F)} \int_0^t (\frac{\partial \Phi}{\partial r})_{r=R} dt =$$

$$= -\frac{6\,k}{R\,\rho\,c_p} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \; \frac{sen\,(\lambda_n R) - (\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)}{\lambda_n R - sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)} \; \frac{(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R) - sen\,(\lambda_n R)}{\lambda_n R^2}\,dt =$$

$$= -\frac{6\,\alpha}{R} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n R^2} \; \frac{\{(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R) - sen\,(\lambda_n R)\}^2}{\lambda_n R - sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)}\,dt =$$

$$= 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{(\lambda_n R)^3} \; \frac{\{(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R) - sen\,(\lambda_n R)\}^2}{\lambda_n R - sen\,(\lambda_n R)\,cos\,(\lambda_n R)} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{(\lambda_n R)^3} \; \frac{\{(\lambda_n R) - tg\,(\lambda_n R)\}^2}{\frac{\lambda_n R}{cos^2(\lambda_n R)} - tg\,(\lambda_n R)} =$$

$$= 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{(\lambda_n R)^3} \; \frac{(\lambda_n R) - tg\,(\lambda_n R)}{1 + \frac{(\lambda_n R)\,tg^2(\lambda_n R)}{(\lambda_n R) - tg\,(\lambda_n R)}} = \left| \; tg\,(\lambda_n R) = \frac{\lambda_n R}{1 - Bi} \; \right| =$$

$$= 6\,\frac{Bi^2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2} \; \frac{1}{Bi\,(Bi - 1) + (\lambda_n R)^2} = 6\,(\frac{h_{cF}}{k})^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{\lambda_n^2} \; \frac{1}{Bi\,(Bi - 1) + (\lambda_n R)^2}$$

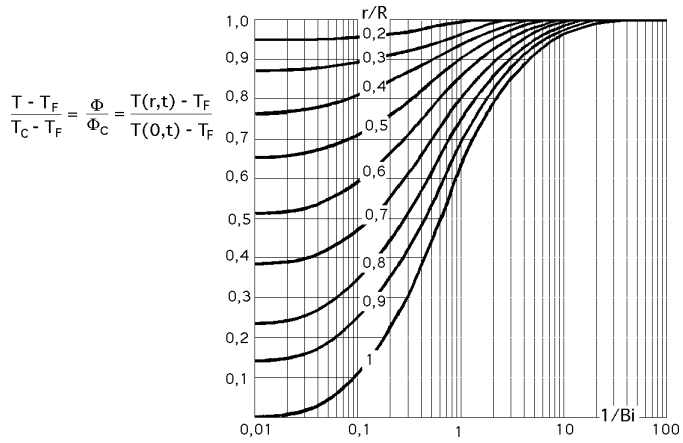


Fig IV.10.- Temperatura local adimensional en el caso de una esfera de radio R, a partir de la temperatura en el centro

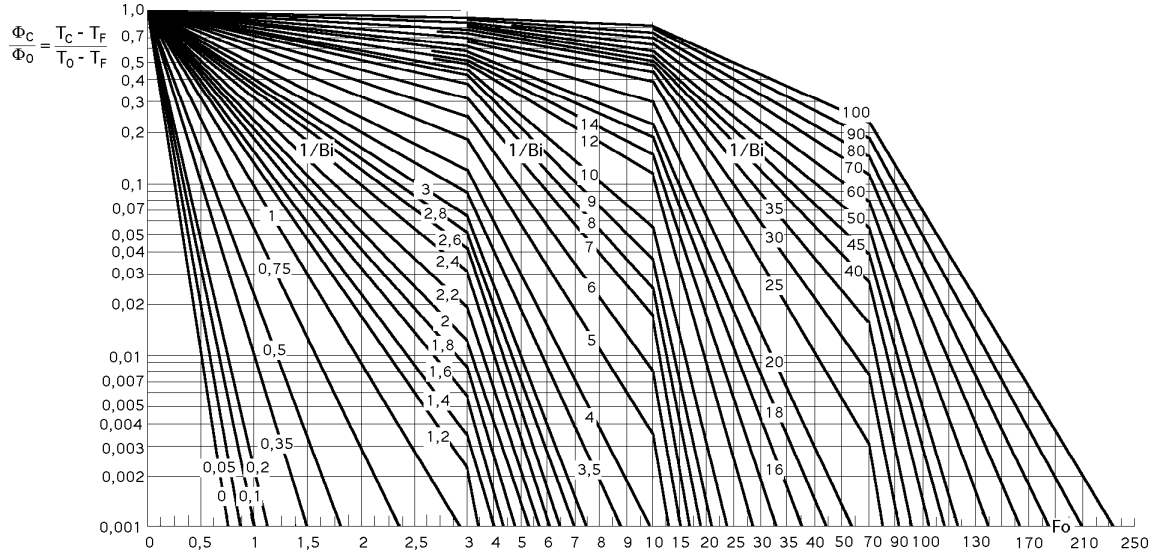


Fig IV.11a.- Temperatura adimensional en el centro de una esfera de radio R

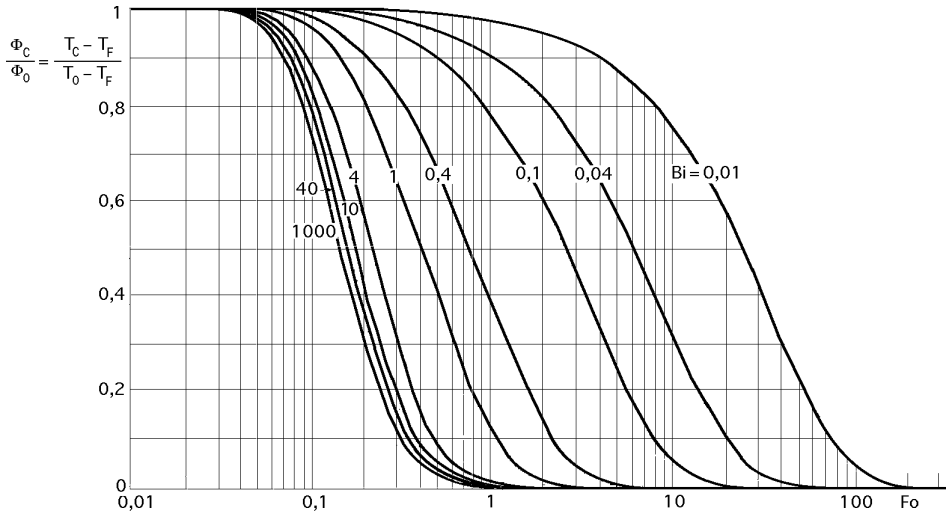


Fig IV.11b.- Temperatura adimensional en el centro de una esfera de radio R

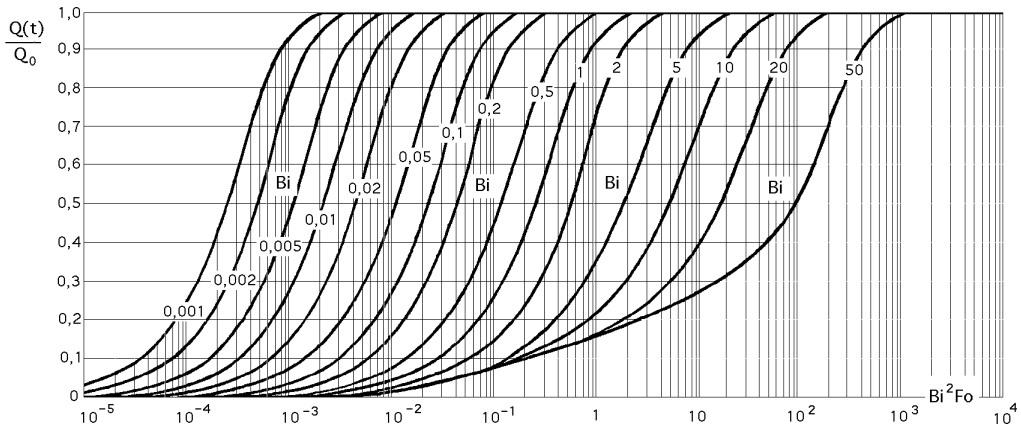
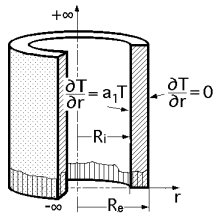


Fig IV.12.- Transferencia térmica adimensional desde una esfera de radio R

IV.5.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN DOS Y TRES DIMENSIONES, CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

a) Tubo infinito con convección en la superficie lateral interior y aislamiento térmico en la superficie lateral exterior.



$$t = 0 \;;\; \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F \;;\; R_e \le r \le R_i$$

$$t > 0 \;;\; \begin{cases} r = R_i \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_i} = a_1 \Phi = \dfrac{h_C}{k}\,\Phi \\ r = R_e \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_e} = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(r,t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i)\}^2 \; N_0(\lambda_n r)}{\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i)\}^2 - (\lambda_n^2 + a_1^2)\; J_0^2(\lambda_n R_e)}\, M\, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}$$

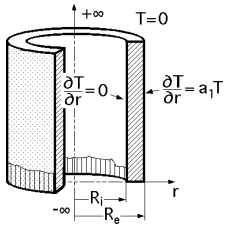
$$M = \int_{R_i}^{R_e} r\,\Phi_0 \{J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\, Y_0(\lambda_n r)\}\, dr = \int_{R_i}^{R_e} r\,\Phi_0\, N_0(\lambda_n r)\, dr$$

$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\, Y_0(\lambda_n r)$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raices de: } \frac{\{\lambda_n Y_0(\lambda_n R_i) + a_1 Y_0(\lambda_n R_i)\}\, J_0'(\lambda_n R_e)}{\{\lambda_n J_0(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i)\}\, Y_0'(\lambda_n R_e)} = 1$$

.....

b) Tubo infinito con convección en la superficie lateral exterior y aislamiento térmico en la superficie lateral interior.



$$t = 0 \;;\; \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F \;;\; R_e \le r \le R_i$$

$$t > 0 \;;\; \begin{cases} r = R_e \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_e} = a_1\, \Phi = \dfrac{h_C}{k}\,\Phi \\ r = R_i \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_i} = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(r,t) = \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + a_1 J_0(\lambda_n R_e)\}^2 \; N_0(\lambda_n r)}{\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + a_1 J_0(\lambda_n R_e)\}^2 - (\lambda_n^2 + a_1^2)\; J_0^2(\lambda_n R_e)}\, M\, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}$$

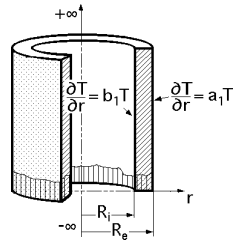
$$M = \int_{R_i}^{R_e} r\,\Phi_0 \{J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\, Y_0(\lambda_n r)\}\, dr = \int_{R_i}^{R_e} r\,\Phi_0\, N_0(\lambda_n r)\, dr$$

$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\, Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e)\, Y_0(\lambda_n r)$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raices de: } \frac{\{\lambda_n Y_0(\lambda_n R_i) + a_1 Y_0(\lambda_n R_i)\}\, J_0'(\lambda_n R_e)}{\{\lambda_n J_0(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i)\}\, Y_0'(\lambda_n R_e)} = 1$$

.....

c) Tubo infinito con convección en las superficies lateral exterior e interior.



$$t = 0 \;;\; \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F \;;\; R_e \le r \le R_i$$

$$t > 0 \;;\; \begin{cases} r = R_e \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_e} = a_1 \Phi = \dfrac{h_{Ce}}{k}\,\Phi \\ r = R_i \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\Big\rangle_{r=R_i} = b_1 \Phi = \dfrac{h_{Ci}}{k}\,\Phi \end{cases}$$

$$\Phi(r,t) = \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + b_1 J_0(\lambda_n R_e)\}^2\, N_0(\lambda_n r)\, M\, e^{-\lambda_n^2 \alpha t}}{(\lambda_n^2 + b_1^2)\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) + b_1 J_0(\lambda_n R_i)\}^2 - (\lambda_n^2 + a_1^2)\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + a_1 J_0(\lambda_n R_e)\}^2}$$

$$M = \int_{R_i}^{R_e} r\,\Phi_0[J_0(\lambda_n r)\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_i) - b_1 Y_0(\lambda_n R_i)\} - Y_0(\lambda_n r)\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) - b_1 J_0(\lambda_n R_i)\}]\,dr$$

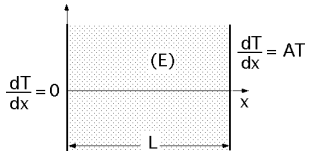
$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_i) - b_1 Y_0(\lambda_n R_i)\} - Y_0(\lambda_n r)\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) - b_1 J_0(\lambda_n R_i)\}$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raices de: } \frac{\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_i) - b_1 Y_0(\lambda_n R_i)\}\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_e) + b_1 Y_0(\lambda_n R_e)\}}{\{\lambda_n Y_0'(\lambda_n R_e) + a_1 Y_0(\lambda_n R_e)\}\{\lambda_n J_0'(\lambda_n R_i) - b_1 J_0(\lambda_n R_i)\}} = 1$$

.....

IV.6.- TRANSMISIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO CON GENERACIÓN DE CALOR E.

a) Pared plana infinita con generación de calor E; condición de contorno de convección.



$$t = 0 \;;\; \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F \;;\; 0 \le x \le L$$

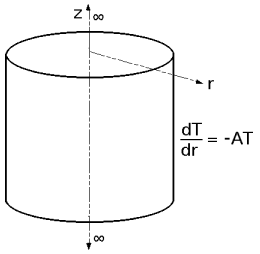
$$t > 0 \;;\; E = Cte \;;\; \begin{cases} x = 0 \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\Big\rangle_{x=0} = 0 \\ x = L \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\Big\rangle_{x=L} = -\dfrac{h}{} \end{cases}$$

$$\Phi(x,t) = \frac{2\,E\,h_C}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n x)}{\lambda_n^2\{L(\lambda_n^2 + \frac{h_C^2}{k^2}) + \frac{h_C}{k}\}\cos(\lambda_n L)}(1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t})$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raices de: } tg(\lambda_n L) = \frac{Bi}{\lambda_n L}$$

.....

b) Cilindro infinito con generación de calor E; condición de contorno de convección



$$t = 0 \;;\; \Phi = 0 \;;\; 0 \le r \le R$$

$$t > 0 \;;\; \begin{cases} E = Cte \\ r = R \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = -\dfrac{h_C}{k}\,\Phi = -A\,\Phi \end{cases}$$

$$\Phi(r,t) = \frac{4\,E\,h_C}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2(\lambda_n^2 + \frac{h_C^2}{k^2})J_0(\lambda_n R)}(1 - e^{-\lambda_n^2 \alpha t})$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raices de: } \lambda_n J_1(\lambda_n R) = \frac{h_C}{k} J_0(\lambda_n R)$$

.....

c) Esfera con generación de calor E; condición de contorno de convección.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{E}{k} \;,\; con: \begin{cases} t = 0 \;;\; \Phi = 0 \;;\; 0 \le r \le R \\ t > 0 \;;\; \begin{cases} E = Cte \\ r = R \;;\; \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = -\dfrac{h_C}{k}\,\Phi = -A\,\Phi \end{cases} \end{cases}$$

$$\Phi(r,t) = \frac{2E}{kR} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\lambda_n^2 R^2 + (Bi - 1)^2\} \, sen(\lambda_n r) \, (1 - e^{-\sigma^2 \alpha t})}{\{\lambda_n^2 R^2 + Bi(Bi - 1)^2\} \, r \, \lambda_n^2} [sen(\lambda_n R) + \{1 - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)\}]$$

con λ_n *raices de:* $(\lambda_n R) \, cotg(\lambda_n R) = 1 - Bi$

.....

TABLAS DE FUNCIONES DE BESSEL

Raices de la función de Bessel: $J_n(x) = 0$

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715	9,9361
5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386	13,5893
8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002	17,0038
11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801	20,3208
14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178	23,5861
18,0711	19,6159	21,1170	22,5827	24,0190	25,4303	26,8202

Raices de la función de Bessel: $J_n'(x) = 0$

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
0	1,8412	3,0542	4,2012	5,3176	6,4156	7,5013
3,8317	5,3314	6,7061	8,0152	9,2824	10,5199	11,7349
7,0156	8,5363	9,9695	11,3459	12,6819	13,9872	15,2682
10,1735	11,706	13,1704	14,5859	15,9641	17,3128	18,6374
13,3237	14,8636	16,3475	17,7888	19,196	20,5755	21,9317
16,4706	18,0155	19,5129	20,9725	22,4048	23,8036	25,1839

Raices de la función de Bessel: $Y_n(x) = 0$

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
0,8936	2,1971	3,3842	4,527	5,6452	6,7472	7,8377
3,9577	5,4297	6,7938	8,0976	9,3616	10,5972	11,811
7,0861	8,596	10,0225	11,3965	12,7301	14,0338	15,3136
10,2223	11,7492	13,21	14,6231	15,9996	17,3471	18,6707
13,3611	14,8974	16,379	17,8185	19,2244	20,6029	21,9583
16,5009	18,0434	19,539	20,9978	22,4248	23,8265	25,2062

Raices de la función de Bessel: $Y_n'(x) = 0$

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
2,1971	3,683	5,0026	6,2536	7,4649	8,6495	9,8148
5,4297	6,9415	8,3507	9,6988	11,0052	12,2809	13,5328
8,596	10,1234	11,5742	12,9724	14,3317	15,6608	16,9655
11,7492	13,2858	14,7609	16,1905	17,5844	18,9497	20,2913
14,8974	16,4401	17,9313	19,3824	20,8011	22,1928	23,5619
18,0434	19,5902	21,0929	22,5598	23,997	25,4091	26,7995

Raices de la ecuación: $\frac{J_0(\lambda_n L) \; Y_0(a \lambda_n L)}{Y_0(\lambda_n L) \; J_0(a \lambda_n L)} = 1$

a	$\lambda_1 L$	$\lambda_2 L$	$\lambda_3 L$	$\lambda_4 L$	$\lambda_5 L$
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040
2,5	2,0732	4,1773	6,2754	8,3717	10,4672
3,0	1,5485	3,1291	4,7038	6,2767	7,8487
3,5	1,2339	2,5002	3,7608	5,0196	6,2716
4,0	1,0244	2,0809	3,1322	4,1816	5,2301

Raices de la ecuación: $\frac{J_0'(x)\ Y_0'(a\,x)}{J_0'(a\,x)\ Y_0'(x)} = 1$

a	x_1	$(a_1)x_2$	$(a_1)x_3$	$(a_1)x_4$	$(a_1)x_5$	$(a_1)x_6$
1	1	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
1,1	0,953	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
1,2	0,910	3,1509	6,2878	9,4279	12,5687	15,7098
1,3	0,872	3,1609	6,2928	9,4312	12,5712	15,7118
1,4	0,837	3,174	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
1,5	0,805	3,188	6,3064	9,4403	12,578	15,7172
1,6	0,776	3,205	6,3146	9,4457	12,582	15,7205
2	0,677	3,282	6,353	9,4710	12,601	15,736
5	0,341	3,969	6,746	9,7320	12,79	15,89

Raices de la ecuación: $cotg\,(\lambda_n L) = -\frac{C}{\lambda_n L}$

C	$\lambda_1 L$	$\lambda_2 L$	$\lambda_3 L$	$\lambda_4 L$	$\lambda_5 L$	$\lambda_6 L$
-1,0	0,0000	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
-0,995	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
-0,99	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
-0,98	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
-0,97	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
-0,96	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
-0,95	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
-0,94	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
-0,93	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712	17,2248
-0,92	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
-0,91	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726	17,2260
-0,90	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
-0,85	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
-0,8	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
-0,7	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
-0,6	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
-0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
-0,4	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
-0,3	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
-0,2	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
-0,1	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
0,0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8566	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9965	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
2	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
3	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
10	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
15	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9215	17,9742
20	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
30	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
50	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497

Funciones de Bessel de segunda especie, órdenes cero $Y_0(x)$ y uno $Y_1(x)$

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0,0	-∞	-∞	5,2	-0,33125	0,07919
0,2	-1,08110	-3,32380	5,4	-0,34017	0,01013
0,4	-0,60602	-1,78090	5,6	-0,33544	-0,05681
0,6	-0,30851	-1,26040	5,8	-0,31775	-0,11923
0,8	-0,08680	-0,97814	6,0	-0,28819	-0,17501
1,0	0,08825	-0,78121	6,2	-0,24830	-0,22228
1,4	0,33790	-0,47915	6,4	-0,19995	-0,25955
1,6	0,42043	-0,34758	6,6	-0,14523	-0,28575
1,8	0,47743	-0,22366	6,8	-0,08643	-0,30019
2,0	0,51038	-0,10703	7,0	-0,02595	-0,30267
2,2	0,52078	0,00149	7,2	0,03385	-0,29342
2,4	0,51042	0,10049	7,4	0,09068	-0,27315
2,6	0,48133	0,18836	7,6	0,14243	-0,24280
2,8	0,43591	0,26355	7,8	0,18722	-0,20389
3,0	0,37685	0,32467	8,0	0,22352	-0,15806
3,2	0,30705	0,37071	8,2	0,25011	-0,10724
3,4	0,22962	0,40101	8,4	0,26622	-0,05348
3,6	0,14771	0,41539	8,6	0,27146	-0,00108
3,8	0,06450	0,41411	8,8	0,26587	0,05436
4,0	-0,01694	0,39792	9,0	0,24994	0,10431
4,2	-0,09375	0,36801	9,2	0,22449	0,14911
4,4	-0,16333	0,32597	9,4	0,19074	0,18714
4,6	-0,22345	0,27374	9,6	0,15018	0,21706
4,8	-0,27230	0,21357	9,8	0,10453	0,23789
5,0	-0,30851	0,14786	10,0	0,05567	0,24902

ANEXO D.- FUNCIONES DE BESSEL

La ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (a^2 - \frac{n^2}{x^2})\, y = 0$, *se conoce como ecuación diferencial de Bessel de orden n, cuya solución es:*

$$\begin{cases} y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x) & para:\ n \neq 0, 1, 2, \ldots \\ y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) & para:\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

donde C_1 y C_2 son constantes a determinar; $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente y orden n, de la forma:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\ n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2}\ (n+1)!} + \frac{x^{n+4}}{2^{n+4}\ 2!\ (n+2)!} - \ldots + (-1)^k\ \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}\ k!\,(n+k)!} + \ldots$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4\ (2!)^2} - \ldots + (-1)^k\ \frac{x^{2k}}{2^{2k}\ (k!)^2} + \ldots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3\ 2!} + \frac{x^5}{2^5\ 2!\ 3!} - \ldots + (-1)^k\ \frac{x^{1+2k}}{2^{1+2k}\ k!\,(1+k)!} + \ldots$$

$$Y_n(x) = J_n(x)\log x - x^{-n}\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{2^{n-2\mu-1}(n-\mu-1)!\,x^{2\mu}}{\mu!} - \frac{x^n}{2^{n+1}n!}\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu\, k_{n\nu}\,x^{2\nu}}{2.4...2\nu(2n+2)(2n+4)...(2n+2\nu)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\{\ln\frac{x}{2}+\gamma\}J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{n-1}(n-\mu-1)!\,(\frac{x}{2})^{2\mu-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^\mu\,\Phi(k) + \frac{\Phi(n+k)\,(\frac{x}{2})^{2k+n}}{k!\,(n+k)!}$$

siendo: $\begin{cases}\gamma = 0{,}5772156 \quad (\text{Cte de Euler})\\ \Phi(k) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k} \quad ; \quad \Phi(0)=0\end{cases}$

Para: n = 0: $Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln\frac{x}{2}+\gamma\}J_0(x) + \frac{2}{\pi}\{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2.4^2}(1+\frac{1}{2}) + \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+...\}$

Para: $n = 0, 1, 2, ...$ $\quad Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$

$Y_0'(x) = -Y_0(x)$

FUNCIONES DE BESSEL MODIFICADAS

La ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - (a^2 - \frac{n^2}{x^2})\,y = 0$$

se conoce como ecuación diferencial de Bessel modificada de orden n, cuya solución es:

$\begin{cases} y = C_1 I_n(x) + C_2 I_{-n}(x) & para: \quad n \neq 0, 1, 2, ... \\ y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) & para: \quad n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2^2.4^2} + ...$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2.4} + \frac{x^5}{2^2.4^2.6} + ...$$

$I_0'(x) = I_1(x)$

$$K_0(x) = \{\ln\frac{x}{2}+\gamma\}I_0(x) + \{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2.4^2}(1+\frac{1}{2}) + \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+...\}$$

Para: $n = 0, 1, 2, ...$ $\quad K_{-n}(x) = K_n(x)$

FÓRMULAS DE RECURRENCIA DE FUNCIONES DE BESSEL

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}I_n(x) - I_{n-1}(x)$$

$$I_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x}I_n(x) + I_{n-1}(x)$$

$$x\,I_n'(x) + n\,I_n(x) = x\,I_{n-1}(x)$$

$$x\,I_n'(x) - n\,I_n(x) = x\,I_{n+1}(x)$$

$$x\,K_n'(x) + n\,K_n(x) = -x\,K_{n-1}(x)$$

$$x\,K_n'(x) - n\,K_n(x) = -\,x\,K_{n+1}(x)$$

$$x\,J_n'(x) + n\,J_n(x) = x\,J_{n-1}(x)$$

$$x\,J_n'(x) - n\,J_n(x) = -\,x\,J_{n+1}(x)$$

$$x\,Y_n'(x) + n\,Y_n(x) = -\,x\,Y_{n-1}(x)$$

$$x\,Y_n'(x) - n\,Y_n(x) = -\,x\,Y_{n+1}(x)$$

$$J_n(x)\,Y_n'(x) - Y_n(x)\,J_n'(x) = \frac{2}{\pi x}$$

$$I_n(x)\,K_n'(x) - K_n(x)\,I_n'(x) = -\,\frac{1}{x}$$

$$I_n(x)\,K_{n+1}(x) + K_n(x)\,I_{n+1}(x) = \frac{1}{x}$$

$$K_{-n}(x) = K_n(x)$$

$$K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\,x}}\;exp\,(-x)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2\,n\,J_n(x)}{x} \quad ; \quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2\,\frac{d}{dx}J_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{J_n(x)\} = J_{n-1}(x) - \frac{n\,J_n(x)}{x} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\{J_n(x)\} = -\,J_{n+1}(x) + \frac{n\,J_n(x)}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\{J_0(a\,x)\} = -\,a\,J_1(a\,x) \quad ; \quad \frac{d}{dx}\{Y_0(a\,x)\} = a\,Y_1(a\,x) + \frac{n\,J_n(x)}{x}$$

$$x\,J_1(a\,x)\Big\rangle_0^R = \int_0^R a\,x\,J_0(a\,x)\,dx \quad ; \quad R\,J_1(a\,R) = a\int_0^R x\,J_0(a\,x)\,dx$$

$$\frac{d}{dx}\{x^n\,J_n(x)\} = x^n\,J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^{n-1}\,J_n(x)\} = -\,x^{-n}\,J_{n+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^n\,J_n(a\,x)\} = a\,x^n\,J_{n-1}(a\,x) \xrightarrow{Para\ n\,=\,1} \frac{d}{dx}\{x\,J_1(a\,x)\} = a\,x\,J_0(a\,x)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^n\,I_n(x)\} = x^n\,I_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}\,I_n(x)\} = x^{n-1}\,I_{n+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{I_0(a\,x)\} = a\,I_1(a\,x)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^n\,K_n(x)\} = -\,x^n\,K_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^{n-1}\,K_n(x)\} = -\,x^{-n}\,K_{n+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{K_0(a\,x)\} = -\,a\,K_1(a\,x)$$