VI.- CONDUCCIÓN DE CALOR TRANSITORIA EN SÓLIDOS SEMIINFINITOS

pfernandezdiez.es

VI.2.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN SÓLIDO SEMIINFINITO

A continuación vamos a desarrollar las ecuaciones correspondientes a sistemas en los que resulte despreciable la variación espacial de las temperaturas, de modo que la ecuación que rija el proceso se reduzca a una ecuación diferencial ordinaria.

Un sólido semiinfinito se puede considerar como un cuerpo de gran extensión con una superficie plana, $0 \le x \le \infty$, en el que su temperatura resulta ser función de la distancia x y del tiempo t, es decir:

$T = T(x, t)$

La ecuación de la conducción simplificada, para conducción transitoria en un sólido semiinfinito, suponiendo que E = 0, es de la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial t}\ ,\ para: 0 < x < \infty$$

en la que x se considera a partir de la superficie del sólido; antes de resolver la ecuación diferencial, hay que especificar una única condición inicial y dos condiciones de contorno.

La condición inicial viene determinada para t = 0, por: $T(x, 0) = T_0$ ó $T(x, 0) = f(x)$, como caso más general, siendo $T(x,0)$ la temperatura inicial del sólido semiinfinito, que en principio no tiene por qué ser uniforme.

Una de las condiciones de contorno exige que el material, para cualquier tiempo t, mantenga su temperatura inicial a una distancia grande de la superficie, por lo que:

$T(\infty, t) = f(x)$ ó $T(\infty, t) = T_0$

La otra condición de contorno permite obtener soluciones concretas teniendo en cuenta las

consideraciones que se hagan sobre las mismas, lo que conduce a los tipos siguientes:

- *Condición de contorno isotérmica*
- *Condición de contorno de convección*
- *Condición con resistencia térmica interna despreciable*

CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA EN UN SOLIDO SEMIINFINITO.- Esta condición de contorno, que es muy fácil de obtener físicamente, consiste en cambiar brusca y repentinamente la temperatura de la superficie del sólido, x = 0, hasta un valor T_s ó T_F Fig VI.1.

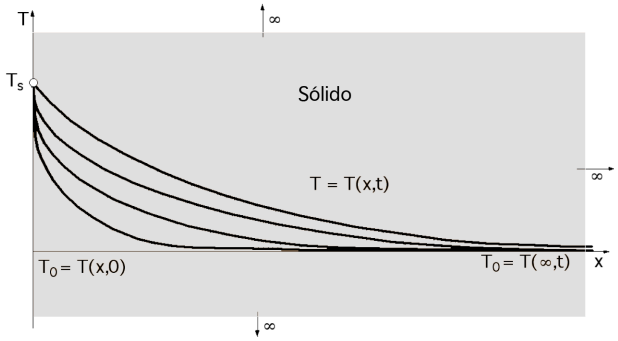


Fig VI.1.- Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito con condición de contorno isotérmica

La condición se puede conseguir cuando la superficie del sólido semiinfinito se pone en contacto con la de otro sólido a T_s y adquiere esta temperatura; si el sólido semiinfinito es un metal, y se pone en contacto con un líquido muy enérgico, (metal líquido) a T_F, que posee un elevado coeficiente de transferencia térmica por convección h_{CF}, también se provoca un cambio instantáneo de la temperatura superficial del sólido que pasa a T_F, la cual se mantendrá constante durante todo el proceso.

La condición de contorno isotérmica es: $T_s = T\,(0,t)$

La solución de la ecuación: $\dfrac{d\Phi}{dt} = \alpha\ \dfrac{d^2\Phi}{dx^2}$ *, en la que:* $\Phi = \dfrac{T - T_0}{T_s - T_0}$*, es:*

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{du}\ \frac{du}{dt} = \left| u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\ t}} \right| = \frac{d\Phi}{du}\ \frac{-x}{2\sqrt{\alpha}}\ \frac{1}{2\ t\sqrt{t}} = \frac{-\ x}{4\ t\sqrt{\alpha\ t}}\ \frac{d\Phi}{du}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{du}\ \frac{du}{dx} = \frac{d\Phi}{du}\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha\ t}} \quad ; \quad \frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\ t}}\ \frac{d^2\Phi}{du^2}\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{4\ \alpha\ t}\ \frac{d^2\Phi}{du^2}$$

$$\frac{-\ x}{4\ t\ \sqrt{\alpha\ t}}\ \frac{d\Phi}{du} = \frac{\alpha}{4\ \alpha\ t}\ \frac{d^2\Phi}{du^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\Phi}{du^2} = -\ \frac{x}{\sqrt{\alpha\ t}}\ \frac{d\Phi}{du} = -\ 2\ u\ \frac{d\Phi}{du}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden, que requiere dos condiciones de contorno.

Haciendo: $\dfrac{d\Phi}{du} = m$ *;* $\dfrac{dm}{du} = -\ 2\ u\ m$ *;* $\dfrac{dm}{m} = -\ 2\ u\ du = -\ du^2$*, resulta:*

$$ln\ m = -\ u^2 + ln\ C_1\ ;\ m = C_1\ e^{-u^2} = \frac{d\Phi}{du} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = C_1\ e^{-u^2}\ du \quad ; \quad \Phi = C_1 \int e^{-u^2}\ du + C_2$$

que sometida a las dos condiciones de contorno se resuelve en la forma:

$$\begin{cases} \Phi = 1 \;;\; x = 0 \;;\; u = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 1 \\ \Phi = 0 \;;\; x \to \infty \;;\; d\Phi = C_1\, e^{-u^2}\, du \;;\; 0 = C_1 \int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du + 1 = C_1 \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} + 1 \;\Rightarrow\; C_1 = \dfrac{-2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_s - T_0} = 1 - G(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2}\, du = ferc\,(u)\,,\ \textit{función de error complementaria}$$

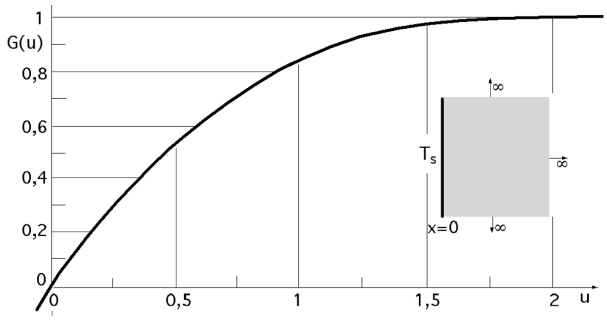


Fig VI.2.- Función de error de Gauss, G(u)

ó también, sumándola y restándola T_s:

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = G(u) = fer\,(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2}\, du$$

función de error de Gauss

y cuyos valores se encuentran en la Tabla VI.1, o en la Fig VI.2.

Tabla VI.1.- Función de error de Gauss

u	G(u)	u	G(u)	u	G(u)	u	G(u)	u	G(u)
0,00	0,00000	0,46	0,48466	0,92	0,80677	1,38	0,94902	1,84	0,99074
0,02	0,02256	0,48	0,50275	0,94	0,81627	1,40	0,95228	1,86	0,99147
0,04	0,45110	0,50	0,52050	0,96	0,82542	1,42	0,95538	1,88	0,99216
0,06	0,06762	0,52	0,53790	0,98	0,83423	1,44	0,95830	1,90	0,99279
0,08	0,09008	0,54	0,55494	1,00	0,84270	1,46	0,96105	1,92	0,99338
0,10	0,11246	0,56	0,57162	1,02	0,85084	1,48	0,96365	1,94	0,99392
0,12	0,13476	0,58	0,58792	1,04	0,85865	1,50	0,96610	1,96	0,99443
0,14	0,15695	0,60	0,60386	1,06	0,86614	1,52	0,96841	1,98	0,99489
0,16	0,17901	0,62	0,61941	1,08	0,87333	1,54	0,97059	2,00	0,995322
0,18	0,20094	0,64	0,63459	1,10	0,88020	1,56	0,97263	2,10	0,997020
0,20	0,22270	0,66	0,64938	1,12	0,88079	1,58	0,97455	2,20	0,998137
0,22	0,24430	0,68	0,66278	1,14	0,89308	1,60	0,97635	2,30	0,998857
0,24	0,25670	0,70	0,67780	1,16	0,89910	1,62	0,97804	2,40	0,999311
0,26	0,28690	0,72	0,69143	1,18	0,90484	1,64	0,97962	2,50	0,999593
0,28	0,30788	0,74	0,70468	1,20	0,91031	1,66	0,98110	2,60	0,999764
0,30	0,32863	0,76	0,71754	1,22	0,91553	1,68	0,98249	2,70	0,999866
0,32	0,34913	0,78	0,73001	1,24	0,92050	1,70	0,98370	2,80	0,999925
0,34	0,36936	0,80	0,74210	1,26	0,92524	1,72	0,98500	2,90	0,999959
0,36	0,38933	0,82	0,75381	1,28	0,92978	1,74	0,98613	3,00	0,999978
0,38	0,40901	0,84	0,76514	1,30	0,93401	1,76	0,98719	3,20	0,999994
0,40	0,42839	0,86	0,77610	1,32	0,93806	1,78	0,98817	3,40	0,999998
0,42	0,44749	0,88	0,78669	1,34	0,94191	1,80	0,98909	3,60	1,000000
0,44	0,46622	0,90	0,79691	1,36	0,94556	1,82	0,98994		

El flujo térmico conducido por el interior del sólido semiinfinito es igual al flujo térmico que penetra o abandona la pared; se determina a partir de la ley de Fourier calculada en la superficie:

$$q(t) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial T}{\partial u}\right)_{x=0} = (T_0 - T_s)\left(\dfrac{2\, e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}\right)_{x=0} = \dfrac{2\,(T_0 - T_s)}{\sqrt{\alpha}} \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha\, t}} \end{array} \right| = \frac{-k\,(T_0 - T_s)}{\sqrt{\pi\,\alpha\, t}}$$

en la que se ha definido una *propiedad de penetración de la temperatura* x_t como la posición en que

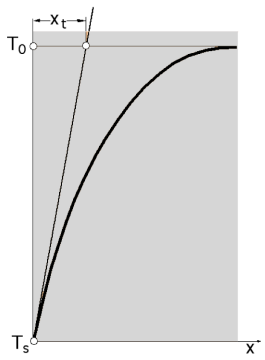


Fig VI.3.- Profundidad de penetración

la tangente al perfil de temperatura en *(x = 0)* corta a la recta de temperatura inicial T_0, Fig VI.3, en la forma:

$$x_t = \sqrt{\pi\,\alpha\,t} = \frac{T_s - T_0}{-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}} = k\,\frac{T_s - T_0}{q_s}$$

El calor conducido por el interior del sólido y que, por lo tanto, ha ingresado en el intervalo de tiempo comprendido entre, 0 y t, es:

$$Q(t) = \int_{t=0}^{t} q(t)\;dt = 2\,k\,(T_s - T_0)\,\sqrt{\frac{t}{\pi\;a}} = \frac{2\,k\,(T_s - T_0)\,t}{x_t}$$

Si la difusividad térmica α es pequeña (gran inercia térmica), x_t es pequeña, por lo que el campo de temperaturas en el material variará muy lentamente; sin embargo, la cantidad de calor que liberan al enfriarse o almacenan al calentarse, es grande; por este motivo se escoge un material con $\begin{cases} \alpha \text{ pequeño (del orden de } 10^{-7}\ m^2/seg) \text{ y } \rho \text{ grande para la pared de un horno (ladrillos refractarios)} \\ \alpha \text{ más grande (del orden de } 10^{-5}\ m^2/seg) \text{ y } \rho \text{ pequeño para un cortafuegos, (aire)} \end{cases}$

En definitiva, cuanto mayor sea ρ, más pequeño será el espacio necesario para el campo de temperaturas.

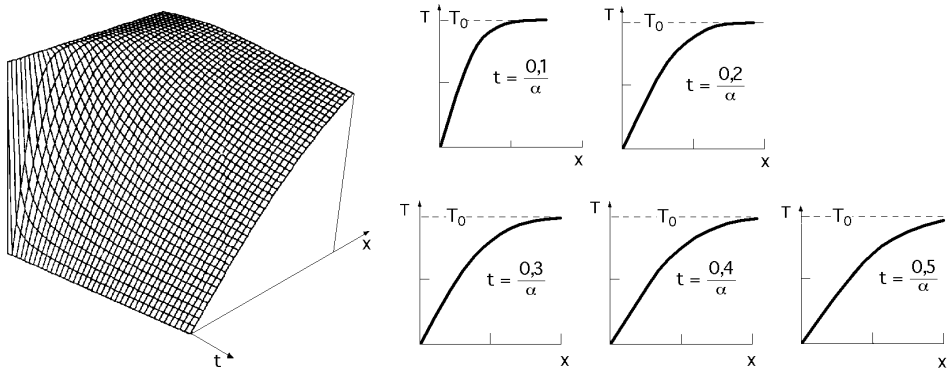


Fig VI.4.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en un cuerpo semiinfinito, con temperatura inicial T_0 y condición de contorno isotérmica

Para comprobar si la suposición de sólido semiinfinito es correcta, se calcula la profundidad de penetración x_t que se ha definido en la forma:

$$x_t = \frac{T_s - T_0}{-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}} = k\,\frac{T_s - T_0}{q_s}$$

en la que q_s es el flujo de calor superficial; si x_t es menor que el espesor, es sólido semiinfinito.

CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN EN UN SOLIDO SEMIINFINITO.-

Si en lugar de cambiar instantáneamente la temperatura superficial del sólido semiinfinito, se pone su superficie en contacto con un fluido (agua, aceite, etc) que se encuentra a la temperatura T_F, el calor transferido al sólido debe pasar en el fluido por convección y hacia el interior del sólido por conducción, en forma más o menos lenta, por lo que la temperatura de la superficie variará hasta alcanzar la del fluido, situación de equilibrio, pero no instantáneamente.

La condición de contorno de convección es:

$$h_C \{T_F - T(0, t)\} = \pm k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$$

según sea calentamiento del sólido (-) o enfriamiento del sólido (+).

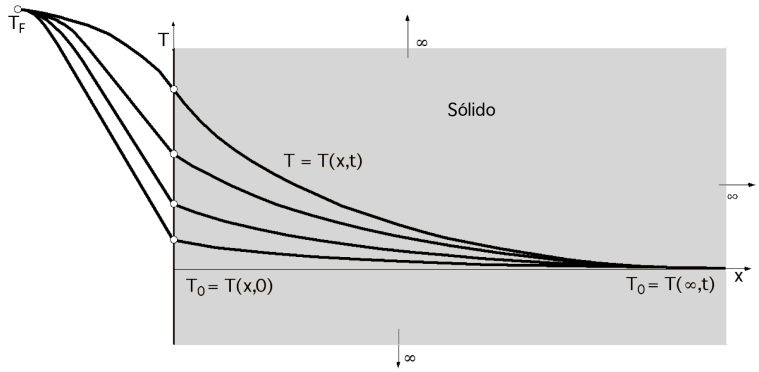


Fig VI.5.- Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito con condición de contorno de convección

La solución de la ecuación $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$, sometida a la condición inicial $T(x, 0) = T_0$ y a las condiciones de contorno dadas por la ecuación anterior y por $T(\infty, t) = T_0$, es de la forma:

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_F - T_0} = 1 - G(u) - \{1 - G(u + \sqrt{\eta})\} e^{-Bi_x + \eta}$$

en la que: $Fo_x = \frac{\alpha\, t}{x^2}$; $Bi_x = \frac{h_C\, x}{k}$; $u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\, t}}$; $\eta = \frac{h_C^2\ \alpha\, t}{k^2} = Bi^2 Fo$

que se reduce a la condición de contorno isotérmica, cuando la relación $\frac{h_C}{k}$ sea muy elevada.

En esta situación: $G(u + \sqrt{\eta}) = 1$, y la función de error complementaria: $1 - G(u + \sqrt{\eta}) = 0$

En la gráfica de la Fig VI.6, se presenta la distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito sometido a convección; la condición de contorno isotérmica viene representada por la curva superior que se corresponde con:

$$\frac{h_s \sqrt{\alpha\, t}}{k} = \infty \Rightarrow \frac{h_s}{k} = \infty$$

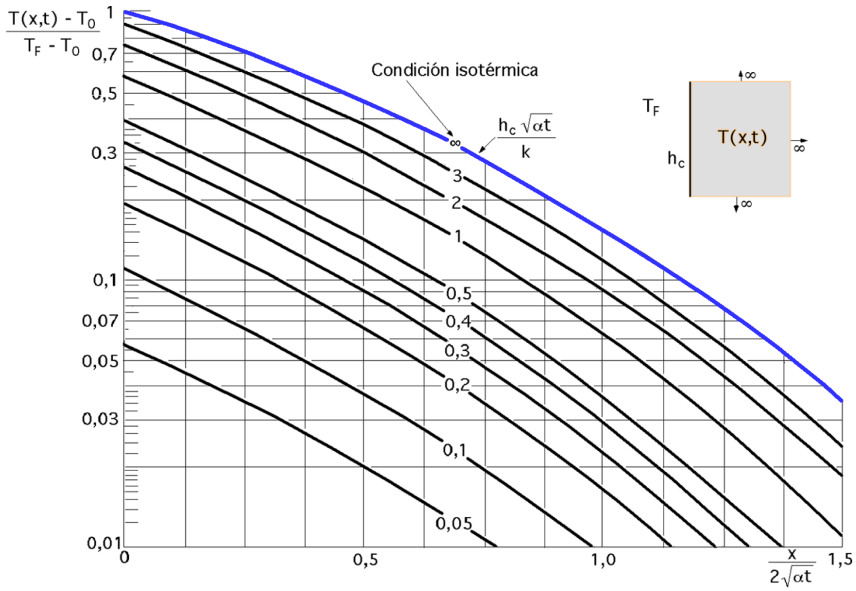


Fig VI.6.- Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito sometido a convección

La distribución de temperaturas adimensional en un sólido semiinfinito, con temperatura inicial uniforme, y sometido al contacto con un fluido a temperatura T_F en el instante (t = 0) es sólo función de los números de Biot y de Fourier.

Las ecuaciones del flujo térmico y de la distribución de temperaturas así obtenidas, son válidas para una geometría semiinfinita.

Por lo tanto, es muy importante establecer cuándo una placa de gran tamaño y longitud característica L se puede considerar semiinfinita a efectos térmicos; Kreith propone que Fo < 1, condición necesaria, pero no suficiente, ya que se tiene que cumplir también que a una *gran distancia de la superficie* la temperatura inicial no se haya modificado, (condición de contorno del sólido semiinfinito).

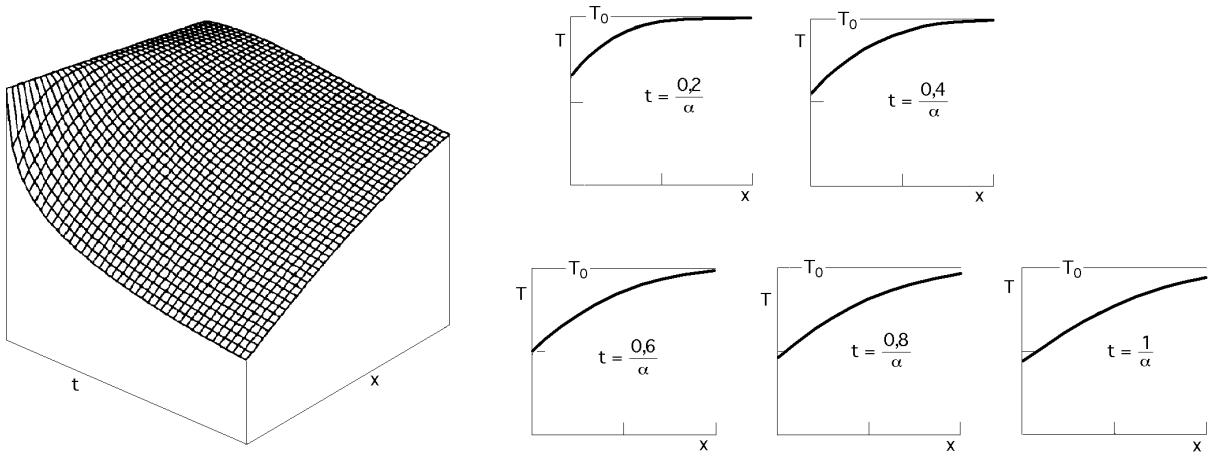


Fig VI.7.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito, con temperatura inicial T_0 y condición de contorno de convección

Sólido semiinfinito sometido a un flujo térmico uniforme en su superficie.- Si el sólido semiinfinito está inicialmente (t = 0) a la temperatura T_0 y para (t > 0) la superficie (x = 0) se somete repentinamente a un flujo de calor q_0 constante por unidad de superficie, (por ejemplo la radiación de una fuente a elevada temperatura), la respuesta de la temperaturas viene dada por la ecuación:

$$T(x,t) = T_0 + \frac{2\,q_0}{k}\sqrt{\alpha\,t}\,\left[\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} - u\,\{1 - G(u)\}\right], \quad con:\ u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\,t}}\ ,\ y\ en\ la\ que:\ \begin{cases} T_0 = T(x,0) \\ q_0 = -\,k\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} \end{cases}$$

Si el flujo de calor q_0 procede de la radiación de una fuente a elevada temperatura T_{rad}, se puede suponer es de la forma:

$q_0 = \alpha^* \sigma\ (T_{rad}^4 - T_0^4\ )$, siendo α^* la absortividad de la superficie.

La temperatura evaluada en $x = 0$ en el tiempo t es:

$$T(0,t) = T_s = T_0 + \frac{2\,q_0}{k}\sqrt{\frac{\alpha\,t}{\pi}}$$

La profundidad de penetración que se ha definido en la forma:

$$x_t = \frac{T_s - T_0}{-\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}} = k\,\frac{T_s - T_0}{q_0}$$

y en la que q_0 es el flujo de calor superficial ($x = 0$), nos dirá que el sólido es semiinfinito cuando sea menor que el espesor.

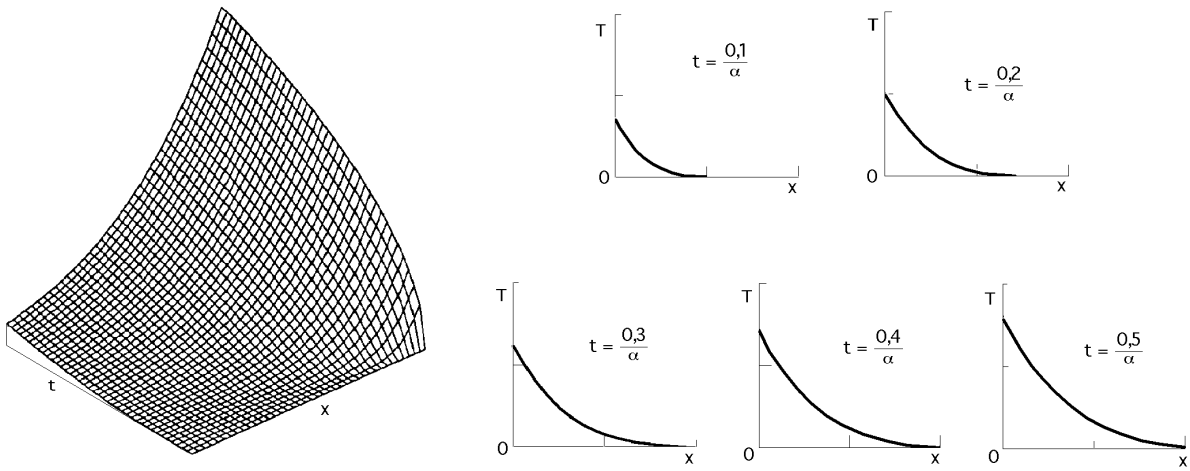


Fig VI.8.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en un cuerpo semiinfinito con temperatura inicial 0 sometido a un flujo de calor constante q_0 en la superficie

Contacto entre dos sólidos semiinfinitos.- Si dos sólidos semiinfinitos a temperaturas distintas T_A y T_B se ponen en contacto en el instante t = 0, la solución del problema muestra que la temperatura de la superficie de contacto T_{cont} viene dada por:

$$\frac{T_A - T_{cont}}{T_{cont} - T_B} = \frac{k_B}{k_A}\sqrt{\frac{\alpha_A}{\alpha_B}} = \sqrt{\frac{(k\ \rho\ c_p)_B}{(k\ \rho\ c_p)_A}} = \frac{B_B}{B_A}$$

con las distribuciones de temperatura dadas por las funciones de error correspondientes a cada sólido.

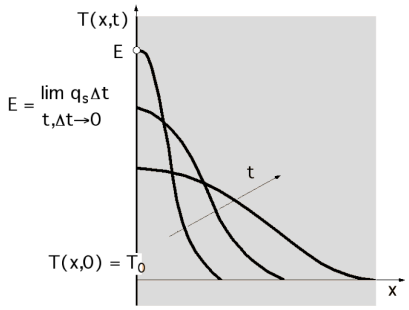


Fig VI.9.- Respuesta de la temperatura de un sólido semiinfinito sobre cuya superficie se descarga instantáneamente una cierta cantidad de energía E

Sólido semiinfinito sometido a un pulso de energía en su superficie.- Si se descarga una determinada cantidad de energía E por unidad de área sobre la superficie en el instante $t = 0$ y esta energía se absorbe totalmente por la superficie, Fig VI.9, la distribución de temperaturas viene dada por la ecuación:

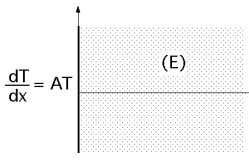
$$T(x,t) = T_0 + \frac{E\ e^{-u^2}}{\rho\ c_p \sqrt{\pi\ \alpha\ t}}$$

Sólido semiinfinito con generación de calor E y condición de contorno isotérmica



$$\left.\begin{array}{l} t = 0\ ;\ T = 0\ ;\ 0 \le x \le \infty \\ t > 0\ ;\ E = Cte \end{array}\right\} \Rightarrow F(x,t) = \frac{E}{k}\,[\alpha - 2\,\{1 - G(u)\}]$$

Sólido semiinfinito con generación de calor E y condición de contorno de convección



$$\begin{cases} t = 0\ ;\ \Phi = \Phi_0 = T_0 - T_F\ \ ;\ \ 0 \le x \le \infty \\ t > 0\ ;\ E = Cte\ \ ;\ \ x = 0\ \ \Rightarrow\ \ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right\rangle_{x=0} = -A\,\Phi = \frac{h_C}{k}\,\Phi \end{cases}$$

$$F(x,t) = \Phi_0 + \frac{E\,\alpha\,t}{k} + [\,\frac{\Phi_0}{\alpha\sqrt{\pi\ t}}\,(\sqrt{\alpha} - \frac{u}{\sqrt{t}}) - \frac{2\,E}{h_c}\sqrt{\frac{\alpha\ t}{\pi}}\,\}\,e^{-\frac{x^2}{4\,\alpha\,t}} +$$

$$+ \{\frac{E}{h_C}\,(\frac{k}{h_C} - 1) - \Phi_0\,(1 + \frac{h_C}{k})\}\,e^{\frac{h_C x}{k} + x\,\alpha\,(\frac{h_C}{k})^2}\,\{1 - G(u + \frac{h_C}{k}\sqrt{\alpha\ t})\} + \frac{E}{k}\,(1 + \frac{k}{h_C})\,\{1 - G(u)\}]$$

Sólido semiinfinito sometido a una variación periódica de su temperatura superficial de la forma:

$$\beta_0 = \frac{\Phi_0}{\Phi_{máx}} = \frac{T_s - T_m}{T_{máx} - T_m} = cos\ wt$$

siendo la temperatura media $T_m = \frac{T_{máx} + T_{mín}}{2}$, y $T_s = T_x = 0$, viniendo dada la distribución de temperaturas, Fig VI.10, por la ecuación:

$$\beta = \frac{\Phi}{\Phi_{máx}} = \frac{T(x,\,t) - T_m}{T_{máx} - T_m} = exp\,(-\,x\,\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}})\;\; cos\,(x\,\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}} - w\,t) = f\,(Fo,\;\frac{1}{T^*})$$

$$que\ consta\ de:\begin{cases} Función\ de\ amortiguación:\ exp\,(-\,x\,\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}}) = exp\,(-\,x\,\sqrt{\frac{p}{\alpha\;T^*}}) \\ Función\ periódica:\ cos\,(x\,\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}} - w\,t) \end{cases}$$

siendo $T^* = \frac{2\,\pi}{w}$ el periodo de la onda térmica y w la frecuencia

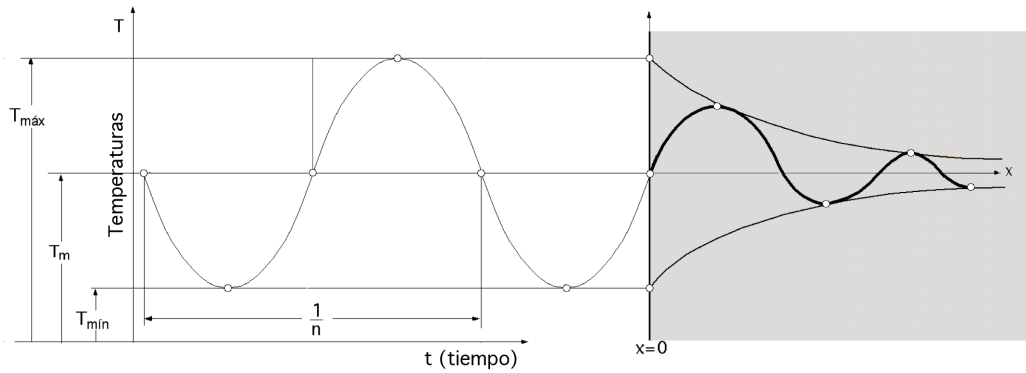


Fig VI.10.- Pared gruesa sometida a cambios periódicos de temperatura

La amplitud de la variación de la temperatura disminuye exponencialmente a medida que penetra en el sólido y se desarrolla con un desfase igual a: $x\,\sqrt{\frac{w}{2\,\alpha}}$.

El espesor de la pared es tan grande que la variación de la relación $\frac{temperatura}{tiempo}$ dentro de la misma va a depender solamente de las condiciones impuestas en la superficie $x = 0$ por lo que se puede tratar como un sólido semiinfinito. Al ser cíclica la variación de la temperatura en la superficie, hay que suponer que su efecto ha proseguido hacia el interior del sólido, durante un cierto tiempo t, llegándose a un estado térmico vibratorio amortiguado.

Como el fenómeno se amortigua con la profundidad de la pared, la ley de variación de β en un punto determinado sigue una ley de tipo cosenoidal, pero desfasada respecto a β_s debido a la profundidad; volverá a estar en fase cuando se cumpla que:

$$(x + \lambda)\,\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\;T^*}} = x\,\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\;T^*}} + 2\,\pi \quad ; \quad \lambda = 2\,\sqrt{\pi\,\alpha\,T^*}$$

en la que λ es la longitud de onda térmica.

La variación de β en dos puntos separados una distancia igual a la longitud de onda λ se pro-

duce en fase, aunque la amortiguación sea distinta en los mismos.

El valor de λ es característico del material que conforma el sólido, e independiente del tiempo; si llamamos:

$$x^* = \frac{x}{\lambda} = \frac{x}{2\sqrt{\pi\,\alpha\,T^*}}$$

el valor de β queda en la forma:

$$\beta = e^{-2\pi x^*} \cos 2\pi\,(x^* - \tau)\,,\ \ con:\ \ \tau = \frac{t}{T^*}$$

En la representación de β en función de x^* para distintos valores de τ, Fig VI.11, se han tomado sobre el eje de las x^* fracciones de longitud de onda λ y valores de τ iguales a:

$$\tau = 0\,,\ \frac{T^*}{8}\,,\ \frac{T^*}{4}\,,\ \frac{3\,T^*}{8}\,,\ \frac{T^*}{2}\,,\ \ldots$$

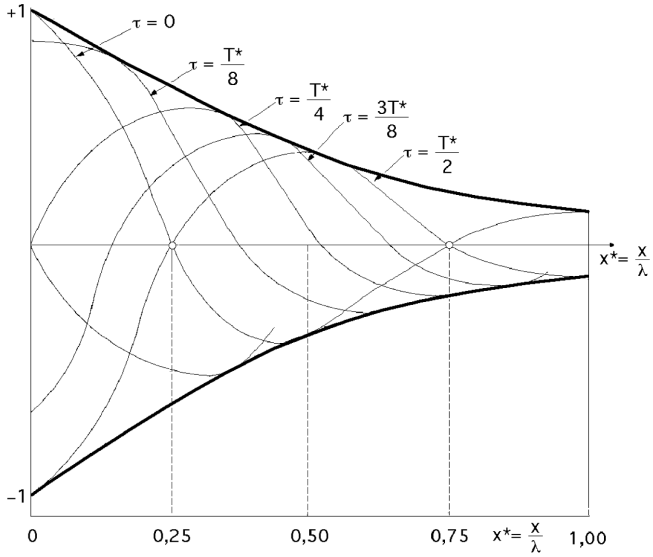


Fig VI.11.- Representación gráfica de la función β

La atenuación se hace n veces menor para:

$$exp\,(-x\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,T^*}}) = \frac{1}{n}\ ;\ \ x = \sqrt{\frac{\alpha\,T^*}{\pi}}\ ln\,n = \frac{\lambda}{2\,\pi}\ ln\,n$$

Haciendo por ejemplo: $n = 100 \Rightarrow x_{(1/100)} = l\,\frac{ln\,100}{2\,\pi} = 0{,}7329 \Rightarrow x^*_{(1/100)} = 0{,}7329$ *, que indica que la temperatura a partir de una cierta profundidad es* T_m.

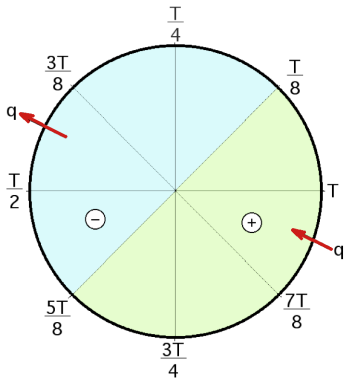


Fig VI.12.- Zonas de entrada y salida de calor

La cantidad de calor que penetra y sale del muro, lo hace a través de la superficie del mismo que es, a su vez, una superficie equipotencial, Fig VI.12.

La entrada de calor es de la forma:

$$q_0 = -\,k\,(\frac{\partial T}{\partial x})_{x=0}\ ,\ \ con:\ T = T(x,t)$$

en la que la derivada parcial puede tomar valores positivos, negativos y nulos.

Si q_0 es positivo entra calor, y si q_0 es negativo se disipa calor al medio exterior:

- *Desde* $\frac{5\,T^*}{8}$ *hasta* $\frac{T^*}{8}$ *habrá entrada de calor*
- *A partir de* $\frac{T^*}{8}$ *hasta* $\frac{5\,T^*}{8}$ *existirá salida de calor*

según que la temperatura superficial sea menor o mayor que la de los puntos interiores inmediatos próximos.

Cuando se tenga: $t = \frac{T^*}{8}$ *ó* $\Phi_0 = T_0 - T_F$ *no habrá intercambio de calor*

La expresión del calor intercambiado con el medio exterior es:

$$q_0 = - k\,(T_{máx} - T_m)\,\{- sen\,(-2\,\pi\,\tau)\,\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,T^*}} + cos\,(2\,\pi\,\tau)\,(-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,T^*}})\} =$$

$$= - k\,(T_{máx} - T_m)\,\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,T^*}}\,\{sen\,(2\,\pi\,\tau) - cos\,(2\,\pi\,\tau)\}$$

Saldrá calor del muro cuando se cumpla: $T(\frac{8\,n+1}{8}) < t < T(\frac{8\,n+5}{8})$ *, pasando por* $T(\frac{2\,n+1}{2})$

Entrará calor al muro cuando se cumpla: $T(\frac{8\,n+1}{8}) < t < T(\frac{8\,n+5}{8})$ *, pasando por (T n)*

No existirá intercambio de calor cuando se cumpla: $t = T(\frac{8\,n+1}{8})$ *ó* $t = T(\frac{8\,n+5}{8})$

En la Fig VI.13 se observa el desfase existente entre la variación de la temperatura en la superficie y la variación de calor intercambiado.

El calor almacenado en la pared para el semiperiodo $t = \frac{T^*}{2}$ es de la forma:

$$Q_{(T^*/2)} = \int_{5T^*/8}^{T^*/8} q_0\ dt = -\int_{5T^*/8}^{T^*/8} k\,(T_{máx} - T_m)\,\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,T^*}}\,\{sen\,(2\,\pi\,t) - cos\,(2\,\pi\,t)\}\,dt =$$

$$= -\int_{5T^*/8}^{T^*/8} k\,(T_{máx} - T_m)\,\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,T^*}}\,\{sen\,(2\,\pi\,\frac{t}{T^*}) - cos\,(2\,\pi\,\frac{t}{T^*})\}\,dt =$$

$$= - k\,(T_{máx} - T_m)\,\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\,T^*}}\,\{-\frac{T^*}{2\,\pi}\,cos\,(2\,\pi\,t) - \frac{T^*}{2\,p}\,sen\,(2\,\pi\,t)\}_{5T^*/8}^{T^*/8} =$$

$$= - k\,(T_{máx} - T_m)\,\sqrt{\frac{\pi\ \rho\ c_p}{k\,T^*}}\,\frac{T^*}{2\,\pi}\,\{cos\,(2\,\pi\,t) + sen\,(2\,\pi\,t)\}_{5T^*/8}^{T^*/8} =$$

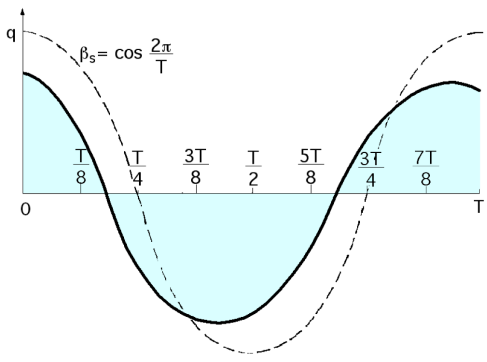


Fig VI.13.- Desfase entre la variación de temperatura y el calor intercambiado

$$= \sqrt{k\ \rho\ c_p}\ \sqrt{\frac{T^*}{4\,\pi}}\ \Phi_{máx}\ 2\ \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\,k\ \rho\ c_p\ T^*}{\pi}}\ \Phi_{máx}$$

y que, en el siguiente semiperíodo, será devuelto.

Si lo que varía senoidalmente es la temperatura del medio exterior, en la superficie de la placa aparecerá una variación de temperaturas también senoidal, pero atenuada y desfasada, como si entre el medio exterior y la superficie existiera otro espesor de placa que atenuase el proceso externo, Fig VI.13.

Los cálculos anteriores están basados en el supuesto de placas muy gruesas; existen muchas aplicaciones industriales importantes sometidas a variaciones periódicas de la temperatura (como las registradas en las paredes de los cilindros de los motores de combustión interna), en las que las

paredes que intervienen son de espesor finito; sin embargo, las propiedades térmicas de las mismas pueden ser tales que amortigüen la onda de temperatura hasta que, después de haber recorrido ésta una distancia relativamente pequeña desde la superficie hasta un punto situado en el interior de la pared, su amplitud de temperaturas sea tan pequeña que se pueda despreciar.

A título de ejemplo se puede comprobar que en un motor de cuatro tiempos, funcionando a 3000 rpm, la onda debida a la variación de la temperatura del cilindro se amortigua hasta un valor del orden del 1% del registrado en la superficie, para una profundidad de 1,75 mm, por lo que en muchas aplicaciones se puede considerar que la pared del cilindro de un motor es infinitamente gruesa (sólido semi ∞).

VI.3.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UN SÓLIDO CON RESISTENCIA TÉRMICA DESPRECIABLE

Si se supone un sólido en el que la energía transferida desde el mismo se elimina por convección a un fluido, y si se considera que la temperatura del solido varía de modo uniforme, se puede asegurar que *la resistencia a la conducción en el sólido es mucho menor que la resistencia a la convección desde la superficie*; esta situación se consigue cuando el fluido exterior tiene un bajo coeficiente de convección, de forma que la relación h_C/k sea muy pequeña; dicha condición equivale a suponer que:

$$Bi = \frac{h_C\ L}{k} << 0{,}1$$

Lo primero que hay que hacer, en cualquier problema de este tipo, es calcular el número de Biot; para Bi < 0,1, el error cometido en la determinación de la temperatura es menor que el 5% de la obtenida por el método exacto, (c. contorno de convección), y si el número de Biot es aún menor, se incrementa la exactitud. Si se hace un balance de la energía del sistema que se encuentra a T = T(t) en el instante *t*, Fig VI.14, la variación de su energía interna en ese instante es igual a la energía que es transferida al fluido que le rodea en dicho instante, es decir:

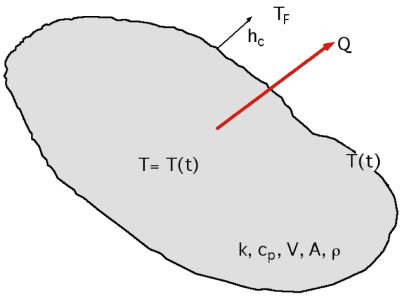


Fig VI.14.- Sólido con (r. t. i. d.)

$$Q = -\ \rho\ V\ c_p\ \frac{\partial T}{\partial t} = h_C\ A\ \{T(t) - T_F\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\ \frac{h_C\ A\ \{T(t - T_F\}}{\rho\ V\ c_p}$$

que es la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas, cuya única variable independiente es el tiempo, siendo V el volumen del sólido y A la superficie de contacto con el fluido.

La solución para la temperatura instantánea *T(t)* es la que corresponde a todos los puntos del interior del sistema, incluyendo la superficie A, por cuanto se ha supuesto que en todo él la resis-

tencia térmica es despreciable.

Si se define una función $\Phi = T(t) - T_F$ y suponiendo se conoce la temperatura T_0 del sistema en el instante, t = 0, la condición inicial para la ecuación anterior es $\Phi_0 = T_0 - T_F$.

La distribución de temperaturas queda en la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{h_C\ A\ \{T(t) - T_F\ \}}{\rho\ V\ c_p} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{h_C\ A\ F(t)}{\rho\ V\ c_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{\Phi} = - \frac{h_C\ A}{\rho\ V\ c_p}\ dt$$

$$\Phi(t) = \Phi_0\ e^{- \frac{h_C\ A}{\rho\ V\ c_p}\ t} = \Phi_0\ e^{- Bi\ Fo}$$

que predice la historia de la relación entre el tiempo y la temperatura.

La temperatura de equilibrio se obtiene cuando la variación de energía interna sea cero, régimen estacionario.

La transferencia de calor instantánea, o flujo térmico, es:

$$q(t) = h_C\ A\ \{T(t) - T_F\ \} = h_C\ A\ \Phi(t) = h_C\ A\ \Phi_0\ e^{-Bi\ Fo}$$

La cantidad de calor total transferida desde $t = 0$, hasta $t = t$, es:

$$Q(t) = \int_{t=0}^{t} q(t)\ dt = h_C\ A\ (T_0 - T_F\ ) \int_0^t e^{-Bi\ Fo}\ dt = - h_C\ A\ (T_0 - T_F\ )\ \frac{\rho\ V\ c_p}{h_C\ A}\ (1 - e^{-Bi\ Fo}\ ) =$$

$$= h_C\ A\ (T_0 - T_F\ )\ t\ \frac{1 - e^{-Bi\ Fo}}{Bi\ Fo}$$

Como: $Q_0 = \rho\ V\ c_p\ (T_0 - T_F\ ) \quad \Rightarrow \quad \frac{Q(t)}{Q_0} = 1 - e^{- Bi\ Fo}$ = *Fracción de energía perdida*

La energía almacenada en el sólido en el intervalo (0 ÷ t) es la diferencia entre el calor en $t = 0$ y el que ha salido hasta t, es decir:

$$Q_{alm} = Q_0 - Q(t) = Q_0\ e^{-Bi\ Fo}$$

VI.4.- PARED QUE SE CALIENTA POR UNA CARA Y SE MANTIENE EN CONTACTO CON UN FLUIDO POR LA OTRA

Supongamos una pared que se calienta por una superficie, y se mantiene en contacto con un fluido $Pr \approx 1$, a T_F por la otra, Fig VI.15. Una parte del calor aplicado se almacena en la pared incrementando su temperatura, mientras que el resto se evacua al exterior por convección.

Un balance energético permite obtener:

$$q\ A = \rho\ V\ c_p\ \frac{\partial T}{\partial t} + h_{cF}\ A\ (T - T_F\ ) = \left| \Phi = T - T_F \right| = \rho\ V\ c_p\ \frac{\partial F}{\partial t} + h_{cF}\ A\ \Phi$$

$$q = \rho\ L\ c_p\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + h_{cF}\ \Phi, \quad con:\ L = \frac{V}{A},\ longitud\ característica$$

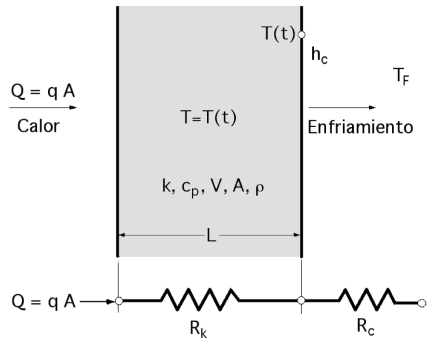


Fig VI.15.- Sólido con (r.t.i.d.) con una superficie en contacto con un foco térmico y el resto con un fluido

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \frac{h_{cF}}{\rho\, L\, c_p}\, \Phi + \frac{q}{\rho\, L\, c_p} = \left| \frac{h_{cF}}{\rho\, L\, c_p} = m \;;\; \frac{q}{\rho\, L\, c_p} = X \right| = - m\, \Phi + X \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{d\Phi}{- m\, \Phi + X}$$

Integrándola se obtiene el tiempo del transitorio:

$$t = \int \frac{d\Phi}{- m\, \Phi + X} = - \frac{1}{m}\, ln\, (- m\, \Phi + \Phi\,) + C = \left| Para\ t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi = \Phi_0 \\ C = \dfrac{1}{m}\, ln\, (- m\, \Phi_0 + X) \end{cases} \right| = \frac{1}{m}\, ln \frac{- m\, \Phi_0 + X}{- m\, \Phi + X}$$

$$e^{mt} = \frac{- m\, \Phi_0 + X}{- m\, \Phi + X}$$

La distribución de temperaturas $\Phi = T - T_F$, se obtiene en la forma:

$$\Phi = \frac{X}{m} + (\Phi_0 - \frac{X}{m})\, e^{-mt} = \frac{q}{h_{cF}} + (\Phi_0 - \frac{q}{h_{cF}})\, e^{- \frac{h_{cF} t}{\rho\, L\, c_p}} = \frac{q}{h_{cF}} + (\Phi_0 - \frac{q}{h_{cF}})\, e^{- Bi\, Fo}$$

Para: $T_0 = T_F \;\Rightarrow\; \Phi_0 = T_0 - T_F = 0$ *, por lo que:*

$$t = \frac{1}{m}\, ln\, \frac{X}{- m\, \Phi + X} = \frac{\rho\, L\, c_p}{h_{CF}}\, ln\, \frac{q}{- h_{cF}\, \Phi + q} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{q}{h_{cF}}\, (1 - e^{-Bi\, Fo}\,)$$

Temperatura de equilibrio.- La temperatura de equilibrio se obtiene cuando todo el calor entrante se disipa por convección al fluido exterior, es decir, a partir de un cierto tiempo, (muy grande), el sólido no puede almacenar más energía y, por lo tanto, no incrementa su temperatura, llegándose al régimen estacionario.

La temperatura de equilibrio se tiene para $t \to \infty$ *, ó haciendo* $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ *, por lo que:*

$$\Phi_\infty = \frac{X}{m} = \frac{q}{h_{cF}} \quad \Rightarrow \quad q = h_{cF}\, (T_{pF} - T_F\,)$$

es decir, todo el calor $q\, A$ que penetra por una cara sale por la otra por convección.