VIII.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA DEL CALOR
MÉTODO GRÁFICO

pfernandezdiez.es

VIII.1.- SOLUCIONES NUMÉRICAS A PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN MONODIMENSIONALES EN RÉGIMEN TRANSITORIO

El método numérico aplicado a los problemas de conducción en régimen transitorio es semejante al utilizado para el caso de conducción en régimen estacionario. El sólido se divide en un cierto número de celdillas y en el centro de cada una se sitúa un nodo ficticio en el que se supone están concentradas las propiedades térmicas de las mismas.

Un balance de energía en cada nodo permite hallar una expresión algebraica para determinar su temperatura, función de las temperaturas de los nodos vecinos, y de las características térmicas y geométricas del nodo en cuestión; asimismo hay que tener en cuenta un factor adicional, que es la energía almacenada en cada nodo de la celdilla, en el tiempo considerado, la cual se puede expresar como la variación de la energía interna del mismo.

Nodos interiores.- Vamos a considerar un nodo interno 0, según se muestra en la Fig VIII.1; la ecuación correspondiente a la variación de la energía interna del nodo 0 respecto al tiempo, para un problema monodimensional, viene dada por:

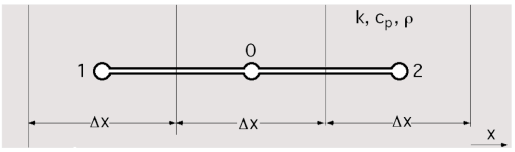


Fig VIII.1.- Nodo interno 0

$$\sum_{i=1}^{2} Q_0 = 0 \quad \text{ó} \quad Q_{1\to 0} + Q_{2\to 0} = \frac{\partial U}{\partial t}\Big\rangle_{nudo\,(0)} = \frac{\partial U_0}{\partial t}$$

Los términos de conducción de la ecuación anterior se pueden aproximar mediante la expresión, en diferencias finitas, de la ecuación de Fourier:

$$Q_{1\to 0} = k\,A\,\frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta x} \quad ; \quad Q_{2\to 0} = k\,A\,\frac{T_2^t - T_0^t}{\Delta x}$$

en las que los superínd*ices t indican que las temperaturas han de calcularse en el instante t, es decir,*

especifican la variación temporal de la temperatura; los subíndices se refieren a la posición de los nodos y especifican la variación espacial a lo largo del eje x.

La variación de la energía interna del nodo 0 en el tiempo Δt, suponiendo constantes la densidad ρ, y el calor específico c_p del material, se puede expresar en la forma:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = m\ c_p\ \frac{\Delta T_0}{\Delta t} = \rho\ A\ \Delta x\ c_p\ \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t}$$

luego:

$$Q_{1\to 0} + Q_{2\to 0} = \frac{\partial U_0}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad k\ A\ \frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta x} + k\ A\ \frac{T_2^t - T_0^t}{\Delta x} = \rho\ A\ \Delta x\ c_p\ \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t}$$

Despejando $T_0^{t+\Delta t}$ se obtiene:

$$T_0^{t+\Delta t} = T_0^t + \frac{k\ \Delta t}{\rho\ c_p\ \Delta x^2}\ (T_1^t + T_2^t - 2\ T_0^t) = \left| Fo = \frac{\alpha\ \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{k\ \Delta t}{\rho\ c_p\ \Delta x^2} \right| =$$

$$= T_0^t + Fo\ (T_1^t + T_2^t - 2\ T_0^t) = Fo\ (T_1^t + T_2^t) + T_0^t\ (1 - 2\ Fo)$$

Teniendo en cuenta la construcción geométrica de la Fig VIII.2 en la que:

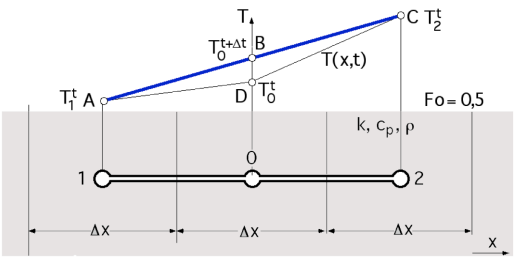


Fig VIII.2.- Método de Binder-Schmidt

$$\overline{OB} = \frac{T_1^t + T_2^t}{2} = T_0^{t+\Delta t} = Fo\ (T_1^t + T_2^t) + T_0^t\ (1 - 2\ Fo)$$

se obtiene:

$$\frac{T_1^t + T_2^t - 2\ T_0^t}{2} = Fo\ (T_1^t + T_2^t - 2\ T_0^t)\ T_0^{t+\Delta t} \quad \Rightarrow \quad Fo = \frac{1}{2}$$

por lo que si en esta ecuación se selecciona el número de Fourier igual a $F = 0{,}5$, se obtiene una solución gráfica sencilla para los problemas de conducción transitoria, ya que para el caso de un nodo interior 0, la ecuación anterior se simplifica en la forma:

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{T_1^t + T_2^t}{2}$$

que establece el que la temperatura futura de un nodo interior sea la media aritmética de la temperatura de los dos nodos vecinos en el momento actual.

La construcción gráfica para la determinación de temperaturas que acabamos de exponer, mediante técnicas de métodos numéricos, se denomina método de Binder-Schmidt; tiene el inconveniente de que da el mismo valor para la temperatura de los nodos correspondientes a dos intervalos de tiempos consecutivos, consecuencia de la necesidad de seleccionar el valor del número de $Fo = 0{,}5$

El intervalo de tiempos Δt se fija en la forma:

$$Fo = 0{,}5 = \frac{\alpha\ \Delta t}{\Delta x^2} \quad ; \quad \Delta t = \frac{\Delta x^2}{2\ \alpha}$$

Este método tiene limitadas sus aplicaciones a geometrías y procesos térmicos monodimensionales.

Su aplicación es sencilla, pero presenta el inconveniente de que el tamaño de los pasos temporales viene limitado por condiciones de estabilidad; para evitar que aparezcan oscilaciones divergentes en la solución, el coeficiente del término en T_0^t no debe ser negativo.

La restricción del valor del número de Fourier se denomina *límite de estabilidad*.

El criterio de estabilidad exige que el coeficiente del término en T_0^t que aparece en la ecuación:

$$\frac{T_1^t + T_2^t - 2\ T_0^t}{2} = T_0^{t+\Delta t} = Fo\ (T_1^t + T_2^t\ ) + T_0^t\ (1 - 2\ Fo)$$

sea positivo.

Si $Fo > 0{,}5$ se dice que la solución correspondiente a las temperaturas es inestable.

La temperatura en el nodo 0 en el instante $(t + \Delta t)$ se obtiene dibujando una línea recta entre los puntos T_1^t y T_2^t

En la Fig VIII.3 se desarrolla esta construcción en un caso general, observándose que:

La isócrona inicial en t es: $T_1^0\ ,\ T_2^0\ ,\ T_3^0\ ,\ T_4^0\ ,\ T_5^0\ ,\ T_6^0\ ,\ T_7^0\ ,\ ....$

La isócrona inicial en $t + \Delta t$ *es:* $T_2^1\ ,\ T_3^1\ ,\ T_4^1\ ,\ T_5^1\ ,\ T_6^1\ ,\ ....$

La isócrona inicial en $t + 2\ \Delta t$ *es:* $T_3^2\ ,\ T_4^2\ ,\ T_5^2\ ,\ ....$

La isócrona inicial en $t + 3\ \Delta t$ *es:* $T_4^3\ ,\ ....$

El número de puntos de la isócrona disminuye por cuanto no se conocen las condiciones en los límites.

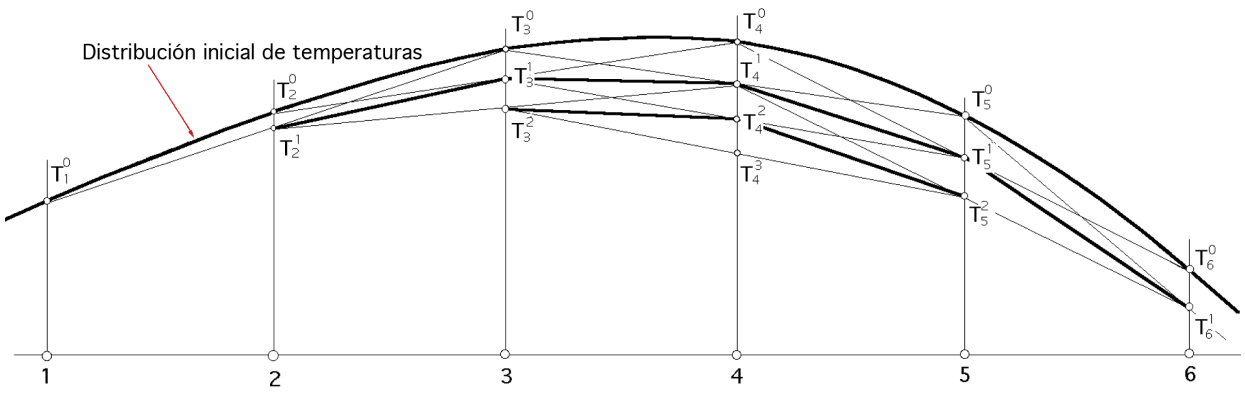


Fig VIII.3.- Cálculo de temperaturas por el método de Binder-Schmidt

Nodos periféricos.- Si se sitúa un nodo en el contorno o frontera de un cuerpo, el balance de energía depende de la condición de contorno en la superficie. Una condición muy interesante es la convección desde la superficie a un fluido exterior.

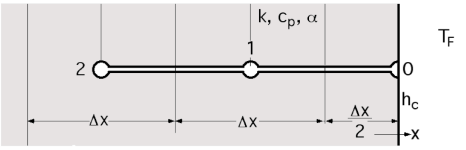


Fig VIII.4.- Nodo periférico en contacto con un fluido

Para su estudio consideraremos de nuevo un problema monodimensional en el que el nodo 0 está situado sobre la superficie como se muestra en la Fig VIII.4; el balance de energía para este nodo 0 es:

$$Q_{1\to 0} + Q_{F\to 0} = \frac{\partial U}{\partial t}\rangle_{nudo(0)} = \frac{\partial U_0}{\partial t}$$

$$k\ A\ \frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta x} + h_C\ A\ (T_F - T_0^t) = \frac{\rho\ A\ \Delta x\ c_p}{2}\ \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t}$$

ya que el intervalo del nodo en la superficie es $\frac{\Delta x}{2}$ debido a que el nodo 0 tiene sólo la mitad de la anchura que un nodo interior; los nodos interiores tienen una anchura igual a Δx; los nodos en la frontera tienen una anchura $\frac{\Delta x}{2}$.

Despejando la temperatura futura del nodo superficial, se tiene:

$$T_0^{t+Dt} = 2\ Fo\ \{T_1^t + Bi\ T_F\} + \{1 - 2\ Fo - 2\ Fo\ Bi\}\ T_0^t\ ,\ siendo:\ \begin{cases} Fo = \dfrac{a\ \Delta t}{\Delta x^2} \\ Bi = \dfrac{h_C\ \Delta x}{k} \end{cases}$$

Si los nodos están situados bastante próximos, la masa que el nodo 0 superficial representa es pequeña y es posible despreciar la energía almacenada en el mismo, es decir, se puede despreciar la capacidad térmica del nodo; en esta situación se cumple que $T_0^{t+\Delta t} = T_0^t$ y la ecuación anterior se reduce a:

$$T_0^t = \frac{T_1^t + Bi\ T_F}{1 + Bi}$$

siendo suficientes los valores de T_1 y T_F en el instante actual para determinar el valor, también actual, de la temperatura superficial T_0

Si la capacidad térmica del nodo de la superficie no se desprecia y se utiliza la ecuación:

$$T_0^{t+\Delta t} = 2\ Fo\ \{T_1^t + Bi\ T_F\} + \{1 - 2\ Fo - 2\ Fo\ Bi\}\ T_0^t$$

el conocimiento de las temperaturas, en un instante dado, en la superficie del cuerpo y la temperatura de otro nodo que no esté en la superficie, determina la temperatura en el nodo superficial en el instante posterior $T_0^{t+\Delta t}$.

Si deseamos encontrar el límite de estabilidad para un nodo de la superficie en el que se

transfiere calor a un fluido por convección, el coeficiente del término en T_0^t de la ecuación anterior tiene que ser positivo, por lo que:

$$1 - 2\,Fo - 2\,Fo\,Bi \geq 0 \quad ; \quad Fo \leq \frac{1}{2\,(1 + Bi)}$$

En el caso de un problema de conducción particular, las ecuaciones de los nodos interiores y del contorno o frontera, deben ser estables; si por ejemplo se selecciona el valor $Fo = 0{,}25$, para hacer que las temperaturas correspondientes a los nodos interiores sean estables, el requisito de estabilidad es Bi<1 para el nodo de la frontera.

Si se hubiese hecho el número de $Fo = 0{,}5$, habría sido imposible ajustar la condición de estabilidad para los nodos del contorno debido a que ahora, $Fo\,(1 + Bi) \leq 0{,}5$, habría exigido que el número de Biot fuese negativo.

El criterio de estabilidad hace que Δt no pueda ser mayor que $\frac{\Delta x^2}{2\alpha}$ y menor, si el nº de Bi de la red no es pequeño, por lo que si se desea aumentar la precisión, reduciendo a la mitad el tamaño Δx de la red, el paso temporal Δt se tiene que dividir por cuatro.

Antes de proceder a resolver un problema de conducción en régimen transitorio mediante técnicas numéricas es necesario el conocimiento de la distribución de temperaturas inicial.

Con frecuencia el cuerpo está originalmente a la misma temperatura, es decir, es isotermo, y de este modo basta con hacer que todas las temperaturas de los nodos sean iguales a la temperatura inicial conocida. Se continúa entonces la resolución numérica mediante el cálculo de las temperaturas en el instante t posterior para todos los nodos interiores y para el nodo superficial, si en el contorno se transfiere calor a un fluido a temperatura T_F. Conociendo las temperaturas en Δt se repite el proceso para calcular la distribución de temperaturas completa en el instante $2\Delta t$, y así sucesivamente.

Un método alternativo al anterior, es el *método implícito,* que permite evaluar el flujo de calor transferido por conducción por unidad de área en el tiempo $(t + \Delta t)$, en lugar del tiempo t.

$$Q_{1\to 0} + Q_{2\to 0} = \frac{\partial U_0}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad k\,\frac{T_1^{t+\Delta t} - T_0^{t+\Delta t}}{\Delta x} + k\,\frac{T_2^{t+\Delta t} - T_0^{t+\Delta t}}{\Delta x} = \rho\;\Delta x\,c_p\,\frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{Fo\,(T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 2\,Fo}$$

en la que hay tres temperaturas desconocidas en cada ecuación nodal.

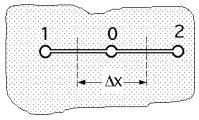
El sistema de ecuaciones algebraicas se puede expresar en forma matricial, observándose que todos los elementos de la matriz son nulos excepto los que están sobre la diagonal principal.

El método implícito siempre es estable, y la elección del tamaño del intervalo Dt obedece a criterios de precisión y no de estabilidad.

ECUACIONES TÉRMICAS DE LOS NODOS Y CONDICIONES DE ESTABILIDAD

La primera ecuación es explícita, y la segunda es implícita

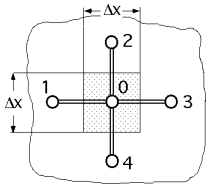
a) Conducción monodimensional; nodo interior.



$$T_0^{t+\Delta t} = Fo\,(T_1^t + T_2^t) + (1 - 2\,Fo)\,T_0^t \quad ; \quad Fo \le \frac{1}{2}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{Fo\,(T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 2\,Fo}$$

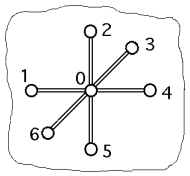
b) Conducción bidimensional; nodo interior; celdilla cuadrada



$$T_0^{t+\Delta t} = Fo\,(T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t) + (1 - 4\,Fo)\,T_0^t \quad ; \quad Fo \le \frac{1}{4}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{Fo\,(T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t} + T_4^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 4\,Fo}$$

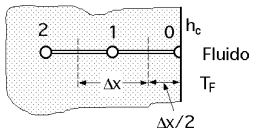
c) Conducción tridimensional; nodo interior; celdilla cúbica



$$T_0^{t+\Delta t} = Fo\,(T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t + T_5^t + T_6^t) + (1 - 6\,Fo)\,T_0^t \quad ; \quad Fo \le \frac{1}{6}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{Fo\,(T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t} + T_4^{t+\Delta t} + T_5^{t+\Delta t} + T_6^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 6\,Fo}$$

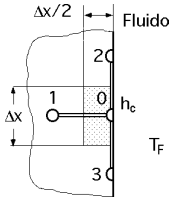
d) Conducción monodimensional; nodo en la superficie; convección con un fluido exterior.



$$T_0^{t+\Delta t} = 2\,Fo\,\{T_1^t + Bi\,T_F\} + \{1 - 2\,Fo - 2\,Fo\,Bi\}\,T_0^t \quad ; \quad Fo \le \frac{1}{2\,(1 + Bi)}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2\,Fo\,(T_1^{t+\Delta t} + Bi\,T_F^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 2\,Fo + 2\,Bi\,Fo}$$

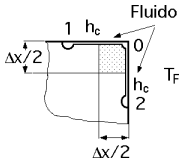
e) Conducción bidimensional; nodo en la superficie; convección con un fluido exterior.



$$T_0^{t+\Delta t} = 2\,Fo\,\{T_1^t + \frac{T_2^t + T_3^t}{2} + Bi\,T_F\} + \{1 - 4\,Fo - 2\,Fo\,Bi\}\,T_0^t \quad ; \quad Fo \le \frac{1}{2\,(2 + Bi)}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2\,Fo\,(T_1^{t+\Delta t} + \frac{T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t}}{2} + Bi\,T_F^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 2\,Fo\,(2 + Bi)}$$

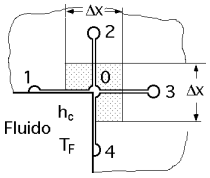
f) Conducción bidimensional; nodo en la superficie esquina exterior; convección con un fluido exterior.



$$T_0^{t+\Delta t} = 2\,Fo\,\{T_1^t + T_2^t + 2\,Bi\,T_F\} + \{1 - 4\,Fo - 4\,Fo\,Bi\}\,T_0^t \quad ; \quad Fo \le \frac{1}{4\,(1 + Bi)}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2\,Fo\,(T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t} + 2\,Bi\,T_F^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 4\,Fo\,(1 + Bi)}$$

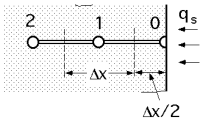
g) Conducción bidimensional; nodo en la superficie esquina interior; convección con un fluido exterior.



$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{4}{3} Fo \{ \frac{T_1^t + T_4^t}{2} + T_2^t + T_3^t + Bi\, T_F \} + \{1 - 4\, Fo - \frac{4}{3} Fo\, Bi\} T_0^t \quad ; \; Fo \le \frac{3}{4\,(3 + Bi)}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{\frac{4}{3} Fo \, (\frac{T_1^{t+\Delta t} + T_4^{t+\Delta t}}{2} + T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t} + Bi\, T_F^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 4\, Fo \, (1 + \frac{Bi}{3})}$$

h) Conducción monodimensional; nodo en la superficie; flujo de calor por unidad de superficie conocido

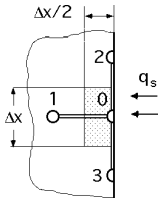


$$T_0^{t+\Delta t} = 2\, Fo \{ T_1^t + \frac{q_s^t\, Dx}{k} \} + \{1 - 2\, Fo\} T_0^t \quad ; \; Fo \le \frac{1}{2}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2\, Fo \, (T_1^{t+\Delta t} + \frac{q_s^{t+\Delta t} \Delta x}{k}) + T_0^t}{1 + 2\, Fo}$$

Para superficies adiabáticas o planos de simetría se considera $q_s = 0$

i) Conducción bidimensional; nodo en la superficie; flujo de calor por unidad de superficie conocido



$$T_0^{t+\Delta t} = 2\, Fo \{ T_1^t + \frac{T_2^t + T_3^t}{2} + \frac{q_s^t\, \Delta x}{k} \} + \{1 - 4\, Fo\} T_0^t \quad ; \quad Fo \le \frac{1}{4}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2\, Fo \, (T_1^{t+\Delta t} + \frac{T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t}}{2} + \frac{q_s^{t+\Delta t} \Delta x}{k}) + T_0^t}{1 + 4\, Fo}$$

Para superficies adiabáticas o planos de simetría se considera $q_s = 0$

VIII.2.- APLICACIÓN DEL MÉTODO GRÁFICO A PAREDES COMPUESTAS

Para el caso en que las paredes sean compuestas, Fig VIII.5, el problema de la construcción gráfica de las isócronas radica en calcular las sucesivas temperaturas que se alcanzan en la interfase de contacto; así se puede poner:

$$Q_{1\to 0} + Q_{2\to 0} = \frac{\partial U_0}{\partial t}$$

en la que cada sumando es de la forma:

$$Q_{1\to 0} = k_1\, A\, \frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta x_1} \quad ; \quad Q_{2\to 0} = k_2\, A\, \frac{T_2^t - T_0^t}{\Delta x_2}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = \rho_1\, A\, \Delta x_1\, c_{p_1} \frac{T_0^{t+Dt} - T_0^t}{2\, \Delta t} + \rho_2\, A\, \Delta x_2\, c_{p_2} \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{2\, \Delta t} = (\rho_1\, A\, \Delta x_1\, c_{p_1} + \rho_2\, A\, \Delta x_2\, c_{p_2}) \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{2\, \Delta t}$$

por lo que, sustituyendo:

$$k_1\, A\, \frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta x_1} + k_2\, A\, \frac{T_2^t - T_0^t}{\Delta x_2} = (\rho_1\, A\, \Delta x_1\, c_{p_1} + \rho_2\, A\, \Delta x_2\, c_{p_2}) \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{2\, \Delta t}$$

$$\frac{k_1\, T_1^t}{\Delta x_1} + \frac{k_2\, T_2^t}{\Delta x_2} - (\frac{k_1}{\Delta x_1} + \frac{k_2}{\Delta x_2}) T_0^t = (\rho_1\, \Delta x_1\, c_{p_1} + \rho_2\, \Delta x_2\, c_{p_2}) \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{2\, \Delta t}$$

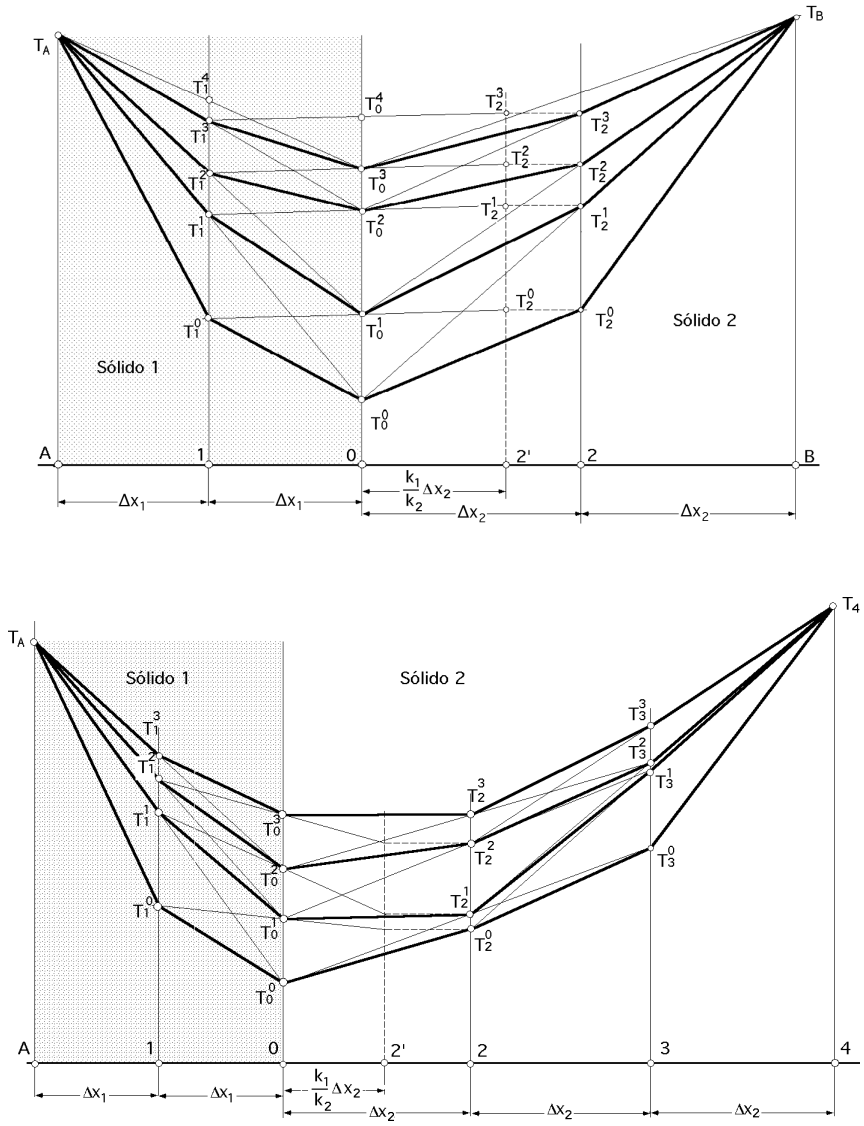


Fig VIII.5 a.b.- Aplicación del método de Binder-Schmidt a pared compuesta

$$T_0^{t+\Delta t}\ \frac{\rho_1\ \Delta x_1\ c_{p_1} + \rho_2\ \Delta x_2\ c_{p_2}}{2\ \Delta t} = \frac{k_1\ T_1^t}{\Delta x_1} + \frac{k_2\ T_2^t}{\Delta x_2} - \left(\frac{k_1}{\Delta x_1} + \frac{k_2}{\Delta x_2} - \frac{\rho_1\ \Delta x_1\ c_{p_1} + \rho_2\ \Delta x_2\ c_{p_2}}{2\ \Delta t}\right) T_0^t$$

Como: $Fo = \frac{1}{2} = \frac{\alpha_1 \Delta t}{\Delta x_1^2} = \frac{\alpha_2 \Delta t}{\Delta x_2^2} = \frac{k_1\ \Delta t}{\Delta x_1^2\ \rho_1\ c_{p1}} = \frac{k_2\ \Delta t}{\Delta x_2^2\ \rho_2\ c_{p2}}$

$$\Delta t = \frac{\Delta x_1^2}{2\ \alpha_1} = \frac{\Delta x_2^2}{2\ \alpha_2} = \frac{\Delta x_1^2\ \rho_1\ c_{p1}}{2\ k_1} = \frac{\Delta x_2^2\ \rho_2\ c_{p2}}{2\ k_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta x_1\ \rho_1\ c_{p1}}{2\ \Delta t} = \dfrac{k_1}{\Delta x_1} \\ \dfrac{\Delta x_2\ \rho_2\ c_{p2}}{2\ \Delta t} = \dfrac{k_2}{\Delta x_2} \end{cases}$$

se obtiene:

$$T_0^{t+\Delta t}\ \left(\frac{k_1}{\Delta x_1} + \frac{k_2}{\Delta x_2}\right) = \frac{k_1}{\Delta x_1}\ T_1^t + \frac{k_2}{\Delta x_2}\ T_2^t$$

$$(T_0^{t+\Delta t} - T_1^t)\ \frac{k_1}{\Delta x_1} = (T_2^t - T_0^{t+\Delta t})\ \frac{k_2}{\Delta x_2}\ ;\ \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_1^t}{\Delta x_1} = \frac{1}{\frac{k_1}{k_2}}\ \frac{T_2^t - T_0^{t+\Delta t}}{\Delta x_2}$$

que permite calcular gráficamente las sucesivas temperaturas de la interfase mediante líneas rectas, reubicando el nodo 2 a una distancia de la unión (nodo 0) igual a un valor $\frac{k_1}{k_2}\ \Delta x_2$ que será diferente al Δx_2 inicial, como se indica en la Fig VIII.5.

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{\frac{k_1}{k_2}\ T_1^t\ \Delta x_2 + T_2^t\ \Delta x_1}{\frac{k_1}{k_2}\ \Delta x_2 + \Delta x_1} = \frac{\frac{k_2}{k_1}\ T_2^t\ \Delta x_1 + T_1^t\ \Delta x_2}{\frac{k_2}{k_1}\ \Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{\frac{k_1}{\Delta x_1}\ T_1^t + \frac{k_2}{\Delta x_2}\ T_2^t}{\frac{k_1}{\Delta x_1} + \frac{k_2}{\Delta x_2}}$$

VIII.3.- RESOLUCIÓN GRÁFICA CON CHOQUE TÉRMICO, C.C. ISOTÉRMICA.

El choque térmico es un cambio repentino de la temperatura en la superficie de la pared del sólido; teniendo en cuenta la Fig VIII.6, podemos suponer que el eje de abscisas se corresponde con la temperatura inicial constante T_0, siendo T_s la temperatura final a la que se lleva bruscamente a la pared.

Si en el primer intervalo de tiempo Δt *la temperatura superficial se toma como* $\frac{T_0 + T_s}{2}$ *, la isócrona vendrá dada por:* $T_s\ ,\ T_1^1\ ,\ T_2^1\ ,\ T_3^1\ ,\ T_4^1\ ,\ ...$

En los intervalos Δt *posteriores las isócronas son, para:*

$$\begin{cases} 2\ \Delta t \ \Rightarrow \ T_s\ ,\ T_1^2\ ,\ T_2^2\ ,\ T_3^2\ ,\ T_4^2\ ,\ T_5^2\ ,\ ... \\ 3\ \Delta t \ \Rightarrow \ T_s\ ,\ T_1^3\ ,\ T_2^3\ ,\ T_3^3\ ,\ T_4^3\ ,\ T_5^3\ ,\ ... \\ 4\ \Delta t \ \Rightarrow \ T_s\ ,\ T_1^4\ ,\ T_2^4\ ,\ T_3^4\ ,\ T_4^4\ ,\ T_5^4\ ,\ ... \end{cases}$$

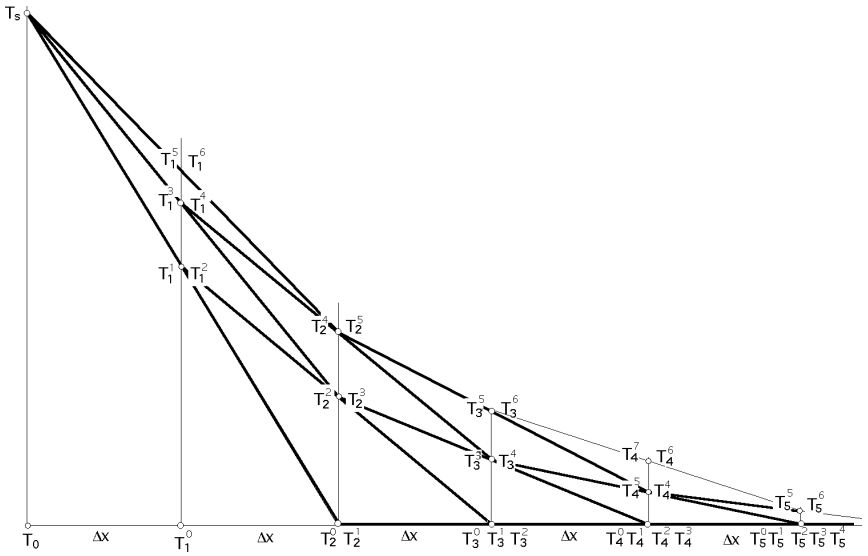


Fig VIII.6.- Aplicación del método de Binder a un sólido con choque térmico en su superficie y temperatura inicial T_s

Se ha comprobado que la construcción con temperatura inicial en la superficie $\frac{T_0 + T_s}{2}$ proporciona una mejor aproximación que la de considerar T_s en el instante inicial, Fig VIII.7.

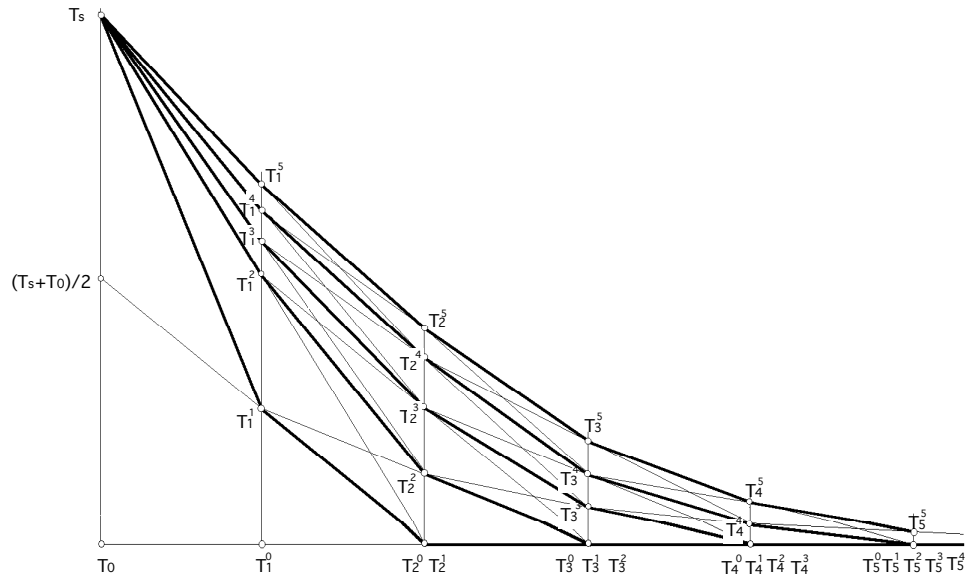


Fig VIII.7.- Sólido con choque térmico en su superficie con temperatura media inicial, $(T_0+T_s)/2$

VIII.4.- RESOLUCIÓN GRÁFICA CON CONVECCIÓN EN LA SUPERFICIE

Sabemos que la tangente a la línea de distribución de temperaturas en la superficie del sólido, Fig VIII.1, pasa por el punto M situado a una distancia de la misma igual a $\frac{k}{h_C}$ y a una altura T_F.

La construcción gráfica de temperaturas por el método de Binder-Schmidt se basa en hallar este punto M de referencia y en la colocación de un nodo ficticio 0 en la zona de fluido, de forma que si el intervalo normal entre los nodos 1, 2, 3, 4..., del sólido es Δx, para la zona del sólido comprendida entre el nodo 1 y la superficie, será $\frac{\Delta x}{2}$ y para la zona de fluido comprendida entre la superficie y el nodo 0 será también $\frac{\Delta x}{2}$.

Se han hecho dos tipos de representación:

- En la Fig VIII.8 se ha considerado una distribución de temperaturas no uniforme en el instante t = 0

- En la Fig VIII.9, se ha considerarado que la temperatura inicial del sólido es constante e igual a T_0

En ambos casos el sólido se introduce en un fluido a menor temperatura T_F; el punto *(m),* correspondiente a la isócrona sobre la superficie del sólido, se une con el punto M, obteniéndose el punto *(a)* que es el punto de partida correspondiente a la isócrona Δt, obteniéndose la distribución de temperaturas siguiente:

Para $\Delta t \Rightarrow n, T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1, T_5^1, \ldots$

Uniendo el punto *(n)* con el M se obtiene el punto *(b)* que es el punto de partida de la isócrona *(2* Δt*)* y así sucesivamente, obteniéndose la distribución de temperaturas:

Para $2\,\Delta t \Rightarrow r, T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2, T_5^2, \ldots$

Para 3 Δt $\Rightarrow$ s, T_1^3 , T_2^3 , T_3^3 , T_4^3 , T_5^3 , ...

Para 4 Δt $\Rightarrow$ u, T_1^4 , T_2^4 , T_3^4 , T_4^4 , T_5^4 , ...

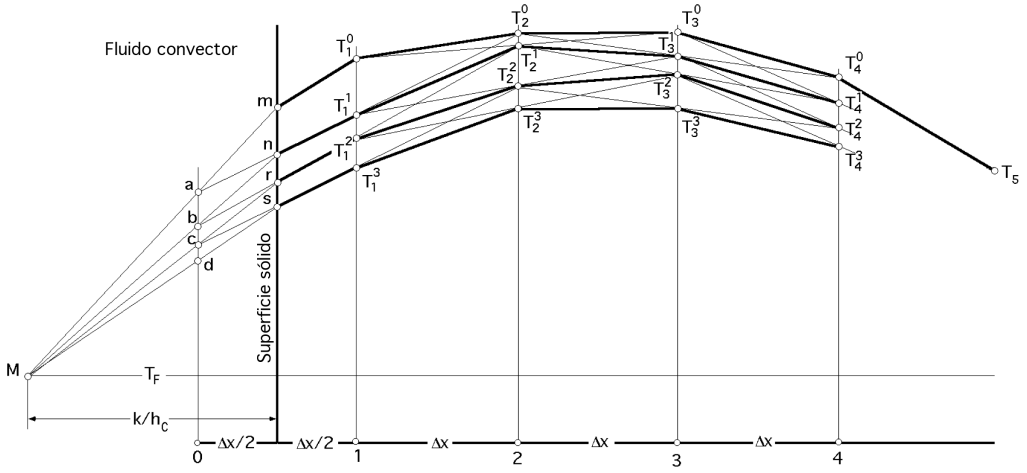


Fig VIII.8.- Aplicación del método de Binder-Schmidt a un sólido con convección en su superficie, y distribución inicial de temperaturas no uniforme

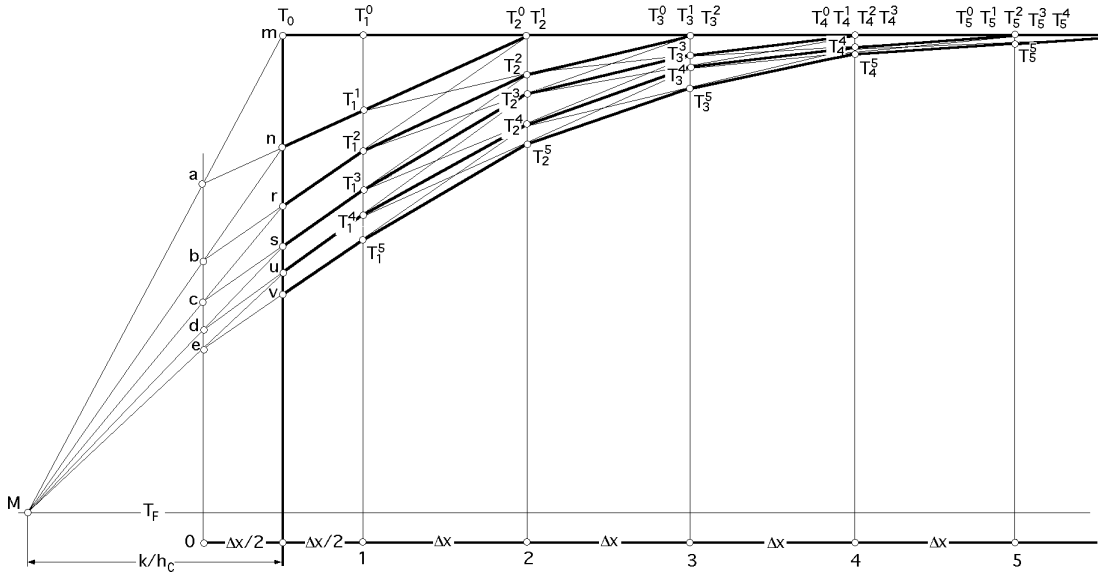


Fig VIII.9.- Aplicación del método de Binder a un sólido con convección en su superficie y temperatura inicial constante