IX.- SUPERFICIES AMPLIADAS

pfernandezdiez.es

IX.1.- INTRODUCCIÓN

Las superficies ampliadas tienen un extenso campo de aplicaciones en problemas de transmisión de calor, desde radiadores de automóviles o equipos de aire acondicionado, hasta los elementos combustibles de reactores nucleares refrigerados por gases, o los elementos de absorción y disipación de energía en vehículos espaciales, o los equipos de refrigeración y calentamiento en la industria química, etc.

Antes de entrar en la resolución de los problemas térmicos en superficies específicas, es conveniente hacer una interpretación intuitiva de la necesidad de las superficies ampliadas, que se conocen como *aletas*, así como de sus secciones transversales, laterales y perfiles (sección recta), que se corresponden con figuras geométricas con posibilidades de fabricación en serie, tales como las rectangulares, triangulares, trapezoidales, parabólicas e hiperbólicas, con dimensiones en las que la relación (longitud/espesor) es del orden de 5/1 ÷ 50/1, y espesores del orden de 0,5 ÷ 10 mm.

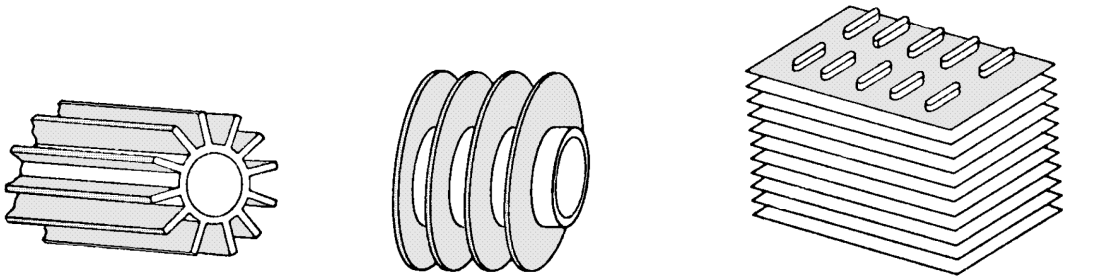
Las aletas se pueden disponer sobre superficies planas o curvas. Si la disposición es de tipo longitudinal, se puede admitir que la superficie de encastre donde se apoya la aleta es plana, siempre que el radio del tubo sea elevado frente al espesor de la aleta.

Cuando las aletas son sólidos de revolución o paralelepípedos se denominan *protuberancias* y su disposición puede admitirse sobre superficies planas cuando la superficie de la protuberancia en la base sea pequeña frente a la superficie de esta última. Las protuberancias se tratan con distribución de temperatura constante para cada sección recta paralela a la base, lo que equivale a admitir que la relación entre la longitud L de la protuberancia y el diámetro o longitud equivalente en la base, es elevada, pudiéndose considerar la transmisión de calor como unidireccional; cuando esta hipótesis no se cumpla se estudia el fenómeno de la transmisión de calor en tres dimensiones.

Las aletas y las protuberancias se disponen en la superficie base constituyendo un conjunto, siendo el más frecuente un tubo en el que el número de aletas o protuberancias es variable, con una separación del orden de 1 ÷ 6 cm para las aletas, y una distribución de retícula cuadrada o triangu-

lar para las protuberancias. Para satisfacer las necesidades térmicas, los elementos se acoplan en serie o en paralelo constituyendo un intercambiador de calor.

Cuando el fluido que circula por las aletas está confinado y se mueve mediante un sistema de bombeo, hay que tener en cuenta la energía necesaria para mantener el coeficiente de convección h_C a través de las aletas, procurando que la energía térmica extraída sea máxima frente a la energía utilizada en mover el fluido.



a) Aletas longitudinales *b) Aletas transversales* *c) Tubos aplastados con aletas continuas*

Fig IX.1.- Diferentes tipos de aletas

Esta situación conduce a un estudio de métodos y costes de fabricación, mantenimiento y rendimiento de los elementos de las aletas, cuyos valores óptimos pueden no coincidir con los óptimos térmicos, por lo que un análisis de estos últimos es importante desde el punto de vista de la fabricación de modelos normalizados, así como de la elección del modelo más adecuado para el usuario.

IX.2.- TRANSFERENCIA TÉRMICA EN ALETAS LONGITUDINALES DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

Los perfiles rectangulares sobre superficies planas constituyen el caso más simple de superficies ampliadas. Se pueden disponer en una pared plana, o sobre la longitud axial de un tubo en dirección longitudinal, con hélices de paso elevado o sobre superficies arbitrarias de gran radio de curvatura. El conjunto constituido con aletas longitudinales rectangulares es de fácil fabricación por extrusión, fundición, colada continua, etc. En casos especiales, las aletas longitudinales se mecanizan sobre el material de aleación de la base. Las aletas unidas a la base sin discontinuidades, mediante soldadura o presión, no tienen resistencias térmicas de contacto y son adecuadas para temperaturas elevadas dado que la base no se altera por dilataciones térmicas diferenciales siempre que no sufran efectos corrosivos o una excesiva deformación. En régimen estacionario, el calor que se conduce a través de un sistema de aletas se elimina al exterior mediante

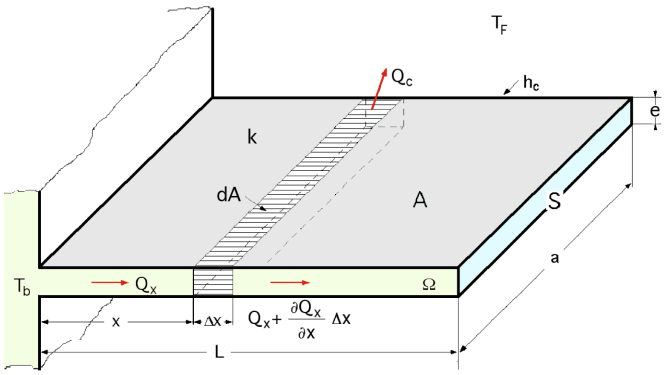


Fig IX.2.- Aleta de sección transversal constante

un proceso de convección, siendo la energía disipada, en la unidad de tiempo, proporcional a su área superficial.

En primer lugar vamos a considerar una aleta de sección transversal constante, de longitud a igual a la longitud del tubo; aunque en la Fig IX.2 hemos representado una de sección transversal rectangular, de altura L, el método es válido para cualquier otra geometría, por la forma que toma el número de Biot. El calor se transmite por conducción a través del material de la aleta y luego se elimina por convección al fluido que le rodea. La temperatura del fluido ambiente es T_F, y el coeficiente de transmisión de calor por convección es h_C, siendo constantes ambos valores.

El balance de flujos térmicos en régimen estacionario, en la unidad de tiempo, en el volumen elemental situado en la posición x, es igual a la suma del calor conducido en dicho tiempo fuera del volumen en $(x + \Delta x)$ más el calor transferido por convección en dicho tiempo, desde la superficie del volumen elemental, es decir:

$$Q_x - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}\,\Delta x) - Q_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x}\,\Delta x + Q_C = 0$$

$$\text{siendo: } \begin{cases} Q_x = -\,k\,S\,(\frac{\partial T}{\partial x})_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\,k\,S\,(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2})_x \\ Q_C = h_C\ dA\,(T_x - T_F) = h_C\ (p\,\Delta x)\,(T_x - T_F) \end{cases}$$

en las que p es el perímetro y S el área de la sección transversal.

La ecuación diferencial de la distribución de temperaturas es:

$$-\,k\,S\,(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2})_x \Delta x + h_C\ p\,\Delta x\,(T_x - T_F) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2})_x - \frac{h_C\ p}{k\,S}\,(T_x - T_F) = 0$$

Definimos una función $\Phi(\xi)$ de temperaturas, con $\xi = \frac{x}{L}$ en la forma:

$$\Phi(x) = \frac{T_x - T_F}{T_b - T_F} \quad ; \quad T_x = T_F + \Phi(x)\,(T_b - T_F)$$

$$\text{por lo que: } \begin{cases} \frac{dT}{dx} = (T_b - T_F)\,\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx} = \left| \xi = \frac{x}{L} \ ; \ \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \right| = \frac{T_b - T_F}{L}\,\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \\ \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{T_b - T_F}{L}\,\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2}\,\frac{d\xi}{dx} = \frac{T_b - T_F}{L^2}\,\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} \end{cases}$$

Sustituyendo en: $(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2})_x - \frac{h_C\ p}{k\,S}\,(T_x - T_F) = 0$, se obtiene:

$$\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} - \frac{h_C\ p\,L^2}{k\,S}\,\Phi(\xi) = 0$$

La distribución de temperaturas se puede expresar en forma adimensional, en función del número de Biot; teniendo en cuenta que el perímetro p multiplicado por la longitud L de la aleta, es

igual al área total de la superficie lateral *(A=pL)*, resulta:

$$\frac{p\,L^2}{S} = \frac{A\,L}{S} = L^*$$

que tiene dimensiones de longitud, por lo que se puede considerar como la longitud característica L^* de la aleta; el número de Biot se define en la forma:

$$Bi = \frac{h_C\ p\,L^2}{k\,S} = \frac{h_C\ L^*}{k}$$

La expresión de la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas en forma adimensional, correspondiente a la aleta, en función del número de Biot, es:

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} - Bi\ \Phi = 0 \quad \xrightarrow{\text{cuya solución general es}} \quad \Phi(\xi) = C_1\ e^{-\sqrt{Bi}\ \xi} + C_2\ e^{\sqrt{Bi}\ \xi}$$

Los valores de las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan una vez se especifiquen las condiciones de contorno para los diferentes casos.

Condiciones de contorno.- La temperatura que se suele conocer inicialmente es la correspondiente a la base de la aleta *(x = 0), ($T_{x=0} = T_b$), que es la primera condición de contorno*, por lo que:

$$x = 0 \ ; \ \xi = 0 \ ; \ \Phi(0) = \frac{T_b - T_F}{T_b - T_F} = 1 \ ; \ C_1 + C_2 = 1$$

común a los tipos de aletas de sección transversal constante.

El calor que entra a la aleta por conducción por la base *(x = 0)*, es:

$$Q = -\,k\,S\,\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = -\,\frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\left(\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\,(C_1 - C_2)$$

La segunda condición de contorno toma diversas formas, según sea:

a) ALETA MUY LARGA.- La temperatura de su extremo libre es igual a la del medio exterior del fluido que la rodea:

$$T_{x\to\infty} = T_F \ ; \ \xi = \frac{x}{L} = 1 \ ; \ \Phi(1) = \frac{T_F - T_F}{T_b - T_F} = 0 = C_1\ e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\ e^{\sqrt{Bi}}$$

y como L es muy grande y Bi es proporcional en este caso a L^2 resulta que Bi es también muy grande, siendo la distribución de temperaturas correspondiente:

$$0 + C_2\ e^{\sqrt{Bi}} = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Phi(\xi) = \frac{T_\xi - T_F}{T_b - T_F} = e^{-\sqrt{Bi}\ \xi} \quad ; \quad T_\xi = T_F + (T_b - T_F)\,e^{-\sqrt{Bi}\ \xi}$$

El calor intercambiado por convección con el exterior se calcula teniendo en cuenta que es igual al que entra por la base de la aleta *(x = 0)* por conducción:

$$Q = - k\,S\,(\frac{\partial T}{\partial x})_{x=0} = \frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\,(C_1 - C_2) = \left| \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{array} \right| = \frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}$$

b) ALETA CON SU EXTREMO LIBRE TÉRMICAMENTE AISLADO.- Este tipo de aletas no disipa calor por el extremo libre *(x = L)* ó *(ξ = 1)*, por lo que:

$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = \frac{T_b - T_F}{L}\,\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = 0$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen en la forma:

$$\frac{d\Phi}{dx})_{\xi=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{Bi}\;C_1\;e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi}\;C_2\;e^{\sqrt{Bi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2\;\frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = C_2\;\dfrac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}} \\ C_1 + C_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow C_2\,\frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}} + C_2 = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_2 = \dfrac{e^{-\sqrt{Bi}}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \dfrac{e^{-\sqrt{Bi}}}{2\,Ch\sqrt{Bi}} \\ C_1 = \dfrac{e^{\sqrt{Bi}}}{2\,Ch\sqrt{Bi}} \end{array}\right.$$

por lo que la distribución de temperaturas es:

$$\Phi(\xi) = \frac{T_\xi - T_F}{T_b - T_F} = \frac{e^{\sqrt{Bi}}e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + e^{-\sqrt{Bi}}e^{\sqrt{Bi}\,\xi}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} + \frac{e^{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)} + e^{-\sqrt{Bi}\,(1-\xi)}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{Ch\{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)\}}{Ch\,\sqrt{Bi}}$$

La temperatura T_L en el extremo libre de la aleta, $\xi = 1$, es:

$$\frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} = \frac{1}{Ch\,\sqrt{Bi}} \quad ; \quad T_L = T_F + \frac{T_b - T_F}{Ch\,\sqrt{Bi}}$$

El calor disipado por la aleta por convección en la unidad de tiempo, se determina como en el caso anterior, considerando que es el mismo que entra por conducción por la base de la aleta *(x = 0)*, es decir:

$$Q = - k\,S\,(\frac{\partial T}{\partial x})_{x=0} = \frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\,(C_1 - C_2) =$$

$$= k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\,\frac{e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\,Ch\sqrt{Bi}} = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\,\frac{Sh\sqrt{Bi}}{Ch\sqrt{Bi}} = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\,Th\sqrt{Bi}$$

c) ALETA CON CONVECCIÓN DESDE SU EXTREMO LIBRE.- La condición de contorno en el extremo libre es:

$$\left.\begin{array}{l} -k\,\dfrac{dT}{dx})_{x=L} = h_C\,(T - T_F)_{x=L} = h_C\;\Phi(1)\,(T_b - T_F) \\ -k\,\dfrac{dT}{dx})_{x=L} = -k\,\dfrac{T_b - T_F}{L}\,\dfrac{d\Phi}{d\xi})_{\xi=1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\Phi}{dx})_{\xi=1} = -\frac{h_C L}{k}\,\Phi(1) = -\frac{h_C L}{k}\,(C_1\,e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\,e^{\sqrt{Bi}})$$

que igualada a:

$$\frac{d\Phi}{d\xi})_{\xi=1} = -\sqrt{Bi}\ C_1\ e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi}\ C_2\ e^{\sqrt{Bi}}$$

permite obtener la segunda relación entre las constantes C_1 y C_2:

$$-\frac{h_C L}{k}(C_1\ e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\ e^{\sqrt{Bi}}) = -\sqrt{Bi}\ C_1\ e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi}\ C_2\ e^{\sqrt{Bi}}$$

$$C_1\ e^{-\sqrt{Bi}}(-\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}) + C_2\ e^{\sqrt{Bi}}(\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{e^{\sqrt{Bi}}(\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k})}{e^{-\sqrt{Bi}}(\sqrt{Bi} - \frac{h_C L}{k})}\ C_2$$

y como $C_1 + C_2 = 1$ resulta:

$$C_1 = \frac{(\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k})\ e^{\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi}\ (e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}) + \frac{h_C L}{k}(e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}})} = \frac{1}{2}\ \frac{(\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k})\ e^{\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi}\ Ch\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}\ Sh\sqrt{Bi}}$$

$$C_2 = \frac{(\sqrt{Bi} - \frac{h_C L}{k})\ e^{-\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi}\ (e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}) + \frac{h_C L}{k}(e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}})} = \frac{1}{2}\ \frac{(\sqrt{Bi} - \frac{h_C L}{k})\ e^{-\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi}\ Ch\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}\ Sh\sqrt{Bi}}$$

La distribución de temperaturas es:

$$\Phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_b - T_F} = C_1\ e^{-\sqrt{Bi}\ \xi} + C_2\ e^{\sqrt{Bi}\ \xi} = \frac{1}{2}\ \frac{e^{\sqrt{Bi}}(\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k})\ e^{-\sqrt{Bi}\ \xi} + e^{-\sqrt{Bi}}(\sqrt{Bi} - \frac{h_C L}{k})\ e^{\sqrt{Bi}\ \xi}}{\sqrt{Bi}\ Ch\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}\ Sh\sqrt{Bi}} =$$

$$= \frac{\sqrt{Bi}\ Ch\{(1-\xi)\sqrt{Bi}\} + \frac{h_C L}{k}\ Sh\{(1-\xi)\sqrt{Bi}\}}{\sqrt{Bi}\ Ch\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}\ Sh\sqrt{Bi}} = \left| Bi = \frac{h_C p\ L^2}{k\ S} \quad ; \quad \frac{h_C\ L}{k} = \frac{S\ Bi}{p\ L} \right| =$$

$$= \frac{Ch\{(1-\xi)\sqrt{Bi}\} + \frac{S\ \sqrt{Bi}}{p\ L}\ Sh\{(1-\xi)\sqrt{Bi}\}}{Ch\sqrt{Bi} + \frac{S\ \sqrt{Bi}}{p\ L}\ Sh\sqrt{Bi}}$$

El calor disipado en la unidad de tiempo es:

$$Q = \frac{k\ S}{L}(T_b - T_F)\ \sqrt{Bi}\ \ (C_1 - C_2) = \frac{k\ S}{2\ L}(T_b - T_F)\ \sqrt{Bi}\ \ \frac{e^{\sqrt{Bi}}\ (\sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}) - e^{-\sqrt{Bi}}\ (\sqrt{Bi} - \frac{h_C\ L}{k})}{\sqrt{Bi}\ Ch\ \sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}\ Sh\ \sqrt{Bi}} =$$

$$= \frac{k\ S}{L}(T_b - T_F)\ \sqrt{Bi}\ \ \frac{\sqrt{Bi}\ Sh\ \sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}\ Ch\ \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}\ Ch\ \sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}\ Sh\ \sqrt{Bi}} = \frac{k\ S}{L}(T_b - T_F)\ \sqrt{Bi}\ \ \frac{Th\ \sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k\sqrt{Bi}}}{1 + \frac{h_C\ L}{k\sqrt{Bi}}\ Th\ \sqrt{Bi}}$$

$$= \frac{k\,S\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}}{L}\;\frac{Th\sqrt{Bi} + \dfrac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}}{1 + \dfrac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}\,Th\sqrt{Bi}} = \left| \begin{array}{l} Bi = \dfrac{h_C\;p\,L^2}{k\,S} \approx \dfrac{h_C\;2\,a\,L^2}{k\,a\,e} = \dfrac{2\,h_C\;L^2}{k\,e} = m^2\;L^2 \\ \sqrt{Bi} = m\,L \;\;;\;\; m = \sqrt{\dfrac{2\,h_C}{k\,e}} \end{array} \right| =$$

$$= k\,S\,(T_b - T_F)\,m\;\frac{Th(m\,L) + \dfrac{h_C}{k\,m}}{1 + \dfrac{h_C}{k\,m}\,Th(mL)}$$

d) ALETA ENTRE DOS PAREDES A TEMPERATURAS DISTINTAS T_B Y T_L.- La condición de contorno en el extremo T_L es:

$$x = L \;\;;\;\; T = T_L \;\;;\;\; \xi = \frac{x}{L} = 1$$

$$\Phi(1) = \frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} = C_1\;e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\;e^{\sqrt{Bi}} = \left| \; C_1 = 1 - C_2 \; \right| = (1 - C_2)\,e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\;e^{\sqrt{Bi}} =$$

$$= e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\,(e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}}) = e^{-\sqrt{Bi}} + 2\,C_2\;Sh\sqrt{Bi}$$

$$C_2 = \frac{\Phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\,Sh\sqrt{Bi}} \quad ; \quad C_1 = 1 - \frac{\Phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\,Sh\sqrt{Bi}} = \frac{e^{\sqrt{Bi}} - \Phi(1)}{2\,Sh\sqrt{Bi}}$$

en las que T_b, T_L y T_F son conocidas por lo que $\Phi(1)$ también lo es.

Distribución de temperaturas:

$$\Phi(\xi) = \frac{e^{\sqrt{Bi}} - \Phi(1)}{2\;Sh\sqrt{Bi}}\;e^{-\sqrt{Bi}\;\xi} + \frac{\Phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\;Sh\sqrt{Bi}}\;e^{\sqrt{Bi}\;\xi} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{Bi}(1 - \xi)} - \Phi(1)\,e^{-\sqrt{Bi}\;\xi} + \Phi(1)\,e^{\sqrt{Bi}\;\xi} - e^{-\sqrt{Bi}(1 - \xi)}}{2\;Sh\sqrt{Bi}} = \frac{Sh\,\{\sqrt{Bi}\;(1 - \xi)\} + \Phi(1)\,Sh\,(\sqrt{Bi}\;\xi)}{Sh\;\sqrt{Bi}}$$

El calor Q para cualquier valor de ξ es:

$$Q = -\,k\,S\,\frac{dT}{dx} = -\,\frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} = -\,\frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\;\frac{-\,Ch\{\sqrt{Bi}(1 - \xi)\} + \Phi(1)\,Ch\,(\sqrt{Bi}\;\xi)}{Sh\sqrt{Bi}}$$

El calor disipado por la aleta es igual al calor entrante por la pared a T_b, menos el calor saliente por la pared a T_L, es decir:

$$Q = Q_{\xi=0} - Q_{\xi=1} = -\,\frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\;\frac{\Phi(1) - Ch\sqrt{Bi}\;-\Phi(1)\,Ch\sqrt{Bi} + 1}{Sh\sqrt{Bi}} =$$

$$= -\,\frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\;\frac{(1 - Ch\sqrt{Bi})\,\{\Phi(1) + 1\}}{Sh\sqrt{Bi}}$$

IX.3.- CAMPO DE APLICACIÓN DE LAS ALETAS RECTAS DE PERFIL UNIFORME

La condición $\frac{dQ}{dL} = 0$ *aplicada a la ecuación:* $Q = k\,S\,(T_b - T_F)\,m\,\frac{Th(m\,L) + \frac{h_C}{k\,m}}{1 + \frac{h_C}{k\,m}\,Th(m\,L)}$, es:

$$\frac{dQ}{dL} = k\,S\,(T_b - T_F)\,m\,\frac{\frac{m}{Ch^2(m\,L)}\{1 + \frac{h_C}{k\,m}\,Th\,(m\,L)\} - \{Th\,(m\,L) + \frac{h_C}{k\,m}\}\,\frac{h_C}{k\,m}\,\frac{m}{Ch^2(m\,L)}}{\{1 + \frac{h_C}{k\,m}\,Th\,(m\,L)\}^2} = 0$$

$$1 + \frac{h_C}{k\,m}\,Th\,(m\,L) = \{Th\,(m\,L) + \frac{h_C}{k\,m}\}\,\frac{h_C}{k\,m} \quad ; \quad 1 = (\frac{h_C}{k\,m})^2 = \left| m = \sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e}} \right| = \frac{h_C\,e}{2\,k}$$

que se cumple para cualquier valor de L, e indica las condiciones técnicas a tener en cuenta para colocar aletas sobre una superficie y el efecto que estas producen.

Esta ecuación indica que si la resistencia térmica por unidad de superficie frontal de la aleta es menor que la resistencia térmica correspondiente a la convección, hay que colocar aletas, mientras que en el caso contrario, las aletas producen un efecto refrigerante. Al sustituir este valor en la segunda derivada se obtiene un punto de inflexión, que se corresponde con una evacuación de calor del tubo sin aletas.

a) Cuando $\frac{h_C e}{2\,k} > 1$ *, resulta que poner aletas produce un efecto aislante o refrigerante, por cuanto el calor que se elimina es inferior al del tubo sin aletas, que se interpreta como que las aletas absorben calor del medio ambiente y lo transmiten al fluido (Vaporizador de una máquina frigorífica)*

b) Cuando $\frac{h_C e}{2\,k} = 1$ *, las aletas no producen ningún efecto, y es equivalente al tubo sin aletas*

c) Cuando $\frac{h_C e}{2\,k} < 1$ *, la adición de aletas produce un incremento del flujo de calor al fluido ambiente, (sistema de calefacción)*

En los procesos de calefacción, por razones de tipo económico, es mejor que la superficie primaria carezca de aletas, a menos que se cumpla que $\frac{h_C e}{2\,k} << 1$. Por razones de espacio o de resistencia mecánica, se tiende a que las aletas no sean muy largas.

En aletas cortas, para que tenga interés la disipación de calor, se tiene que cumplir que:

$$\frac{h_C\,e}{2\,k} \le \frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{p}{S} = \frac{2\,(a + e)}{a\,e} \approx \frac{2}{e} \quad ; \quad \frac{h_C\,S}{p\,k} \le \frac{1}{5}$$

ya que de no ser así, no merece la pena poner aletas.

Para que una aleta sea eficaz, debe tener un espesor *e* muy pequeño, y estar construida por un material de elevada conductividad térmica.

IX.4.- PERFIL OPTIMO

Es interesante lograr un valor óptimo de Q para una superficie del perfil Ω dada, por unidad a de longitud de tubo; el espesor óptimo cumple que $\frac{dQ}{de} = 0$.

Para el caso de una aleta con su extremo libre térmicamente aislado se tiene:

$$Q = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\;Th\sqrt{Bi} = k\,S\,(T_b - T_F)\,m\,Th\,(m\,L) = \left| m = \sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e}} \right| =$$

$$= k\,S\,(T_b - T_F)\,\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e}}\;Th\,(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e}}\;L) = \left| \begin{array}{l} S = a\,e\;;\;a = 1 \\ S = e\;;\;\Omega = L\,e \end{array} \right| = (T_b - T_F)\,\sqrt{2\,h_C\;k\,e}\;Th\,(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\;\Omega)$$

Para una aleta cuya masa esté fijada, Ω es constante, por lo que esta ecuación indica la variación del flujo térmico en función del espesor e de la aleta.

Derivando Q respecto de e, e igualando a cero, resulta:

$$\frac{dQ}{de} = (T_b - T_F)\,\{\frac{2\,h_C\;k}{2\,\sqrt{2\,h_C\;e\,k}}\;Th\,(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\;\Omega) - \frac{\sqrt{2\,h_C\;e\,k}}{Ch^2\,(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\;\Omega)}\;\frac{\Omega}{2\,\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}}\;\frac{6\,h_C}{k\,e^4}\} = 0$$

$$Th\,(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\;\Omega) = 3\,(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\;\Omega)\,Sech^2\,(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\;\Omega)\;\;;\;\;Th\,\sqrt{Bi} = 3\,\sqrt{Bi}\;Sech^2\,\sqrt{Bi}$$

Resolviendo se obtiene: $Bi_{óptimo} = 2{,}0141945$ *, por lo que el espesor y longitud óptimas son:*

$$\left.\begin{array}{l} m^2 = \dfrac{2\,h_C}{k\,e} \\ m^2 = \dfrac{Bi}{L^2} = \dfrac{Bi\,e^2}{\Omega^2} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{2\,h_C}{k\,e} = \frac{Bi\,e^2}{\Omega^2}\;\;;\;\; e_{ópt} = \sqrt[3]{\frac{2\,h_C\,\Omega^2}{k\,Bi_{ópt}}} = 0{,}997\,\sqrt[3]{\frac{h_C\,\Omega^2}{k}}$$

$$L_{ópt} = \frac{\Omega}{e_{ópt}} = \frac{\Omega}{0{,}997\,\sqrt[3]{\frac{\Omega^2\;h_C}{k}}} = 1{,}007\,\sqrt[3]{\frac{\Omega\;k}{h_C}}$$

En general se suelen conocer las constantes físicas y las condiciones de funcionamiento de la aleta, como son, h_C, k, Q, $(T_b - T_F)$, por lo que se puede obtener otra formulación para las dimensiones óptimas en función de éstos parámetros y de $Bi_{ópt}$ en la forma:

$$Q = (T_b - T_F)\,\sqrt{2\,h_C\;e\,k}\;\;Th\sqrt{Bi_{ópt}}$$

$$e_{ópt} = (\frac{Q}{T_b - T_F})^2\;\;\frac{1}{2\,h_C\;\;k\,Th^2\,\sqrt{Bi_{ópt}}} = \frac{0{,}6321}{h_C\;\;k}\,(\frac{Q}{T_b - T_F})^2$$

Igualando los valores de $e_{ópt}$ se obtienen las ecuaciones que se utilizan para diseñar la aleta

recta de espesor constante, de *mínimo material*:

$$e_{ópt} = \frac{0{,}6321}{h_C\ k}\left(\frac{Q}{T_b - T_F}\right)^2 = 0{,}997\sqrt[3]{\frac{\Omega^2\ h_C}{k}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Omega_{ópt} = \dfrac{0{,}5048}{h_C^2\ k}\left(\dfrac{Q}{T_b - T_F}\right)^3 \\ L_{ópt} = \dfrac{0{,}7979}{h_C}\ \dfrac{Q}{T_b - T_F} \end{cases}$$

Las aletas no se deben emplear nunca en aquellos casos en los que el coeficiente de película h_C sea grande.

En aletas normales, $e < 1{,}5\ mm$, construidas con materiales corrientes, como el acero o el aluminio, no se recomienda el empleo de superficies ampliadas si el medio exterior es un:

- *Líquido sometido a convección forzada*
- *Vapor que condensa*

ya que es fácil encontrar coeficientes $h_C > 5000$ W/m^{2}ºC, que proporcionan valores de $\frac{h_C e}{2\ k}$ del orden de la unidad, por lo que el empleo de la aleta sería antieconómico.

Con aletas de dimensiones normales se hace un intercambio térmico muy efectivo, entre la superficie y el gas que la rodea. En los gases convectores es frecuente obtener coeficientes de película del orden de 50 a 120 W/m^{2}ºC, que permiten valores de $\frac{h_C e}{2\ k}$ lo bastante bajos como para que las aletas ejerzan su efecto y de ahí el que algunas de sus aplicaciones más interesantes lo sean en:

- *Motores enfriados por aire*
- *Precalentadores de aire y economizadores de calderas*
- *Serpentines de calentamiento y enfriamiento de los acondicionadores de aire*
- *Radiadores de automóviles*
- *Intercambiadores de calefacción agua-aire, etc.*

Para aletas con convección en el extremo se puede hacer uso del concepto de *longitud corregida* L_C despreciando los efectos de convección en dicho extremo, mediante la expresión: $L_C = L + \frac{e}{2}$, y se tratan como aletas con su extremo libre aislado térmicamente.

IX.5.- CASOS ESPECIALES

Una de las características fundamentales del *análisis de protuberancias de sección constante*, consiste en que dado el pequeño espesor de las mismas se puede considerar la conducción como unidireccional y, por lo tanto, que la variación de la temperatura a través de su sección transversal permanece prácticamente constante.

Esta suposición se puede aplicar a una serie de situaciones como:

- *Determinadas superficies conductoras, hilos o placas, recubiertas con un aislante,* de forma

que transversalmente a ellas, entre el hilo o placa y el medio que les rodea, apenas varía la temperatura, pero que a lo largo de los mismos existe una diferencia de temperatura significativa; esta situación no se corresponde físicamente con la de la protuberancia, pero el proceso térmico que acontece sí, ya que en la protuberancia existe un gradiente de temperaturas a lo largo de ella, pero no transversalmente, por lo que esta casuística se puede aplicar de alguna forma a dicha situación.

- La instalación de un termopar utilizado para medir la temperatura de una corriente de gases calientes, hace que la esfera del termopar se encuentre a una temperatura inferior a la de los gases cuya temperatura va a medir, existiendo un flujo térmico conductivo a lo largo de los hilos del termopar que le unen con la pared más fría, que está equilibrado por la convección desde los gases, por lo que la variación de la temperatura transversal de los hilos del termopar es prácticamente uniforme, existiendo una diferencia de temperaturas entre el termopar (caliente) y el equipo de registro (frío) similar a la de la protuberancia, lo que permite determinar el error esperado en la lectura del termopar.

- Existen intercambiadores de calor de placas perforadas que se pueden asimilar a aletas, ya que la variación de la temperatura a través de ellas es pequeña comparada con la variación de temperaturas en la región que separa la corriente caliente de la corriente fría.

- Los conductores de cobre en un circuito impreso se pueden considerar como aletas, al igual que la porción del circuito que los separa.

En estos ejemplos se observa que la situación no guarda parecido alguno con el caso geométrico de la protuberancia y, sin embargo, la suposición de que la variación de la temperatura es mínima en la sección transversal del hilo o de la placa permite obtener una ecuación diferencial similar a la deducida para la protuberancia.

IX.6.- ALETAS DE SECCIÓN VARIABLE

Para aquellos tipos de aleta en los que su perfil no sea constante, podemos considerar un elemento diferencial de anchura *dx*, tal como se muestra en la Fig IX.3, sobre el que se definen los siguientes calores:

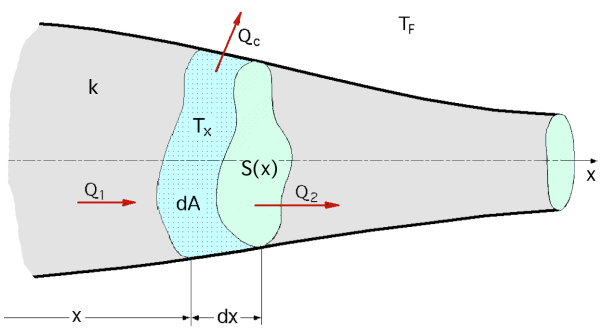


Fig IX.3.- Aleta de sección variable

El entrante por conducción en x, es:

$$Q_1 = - k\, S \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right\rangle_x$$

El saliente por conducción en (x + dx), es:

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\, dx + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2}\frac{dx^2}{2!} + .. = Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\, dx$$

El disipado por convección en el elemento diferencial es:

$$Q_C = h_C \;\; dA\, (T_x - T_F\,)$$

El balance de flujos térmicos es: $Q_1 = Q_2 + Q_C = Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\, dx + Q_C \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x}\, dx + Q_C = 0$

Llamando $\Phi = T_x - T_F$ a la diferencia entre las temperaturas de la aleta y del fluido en que está inmersa, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\, S\, \frac{d\Phi}{dx}\right) dx + h_C\ \Phi\ dA = 0 \quad ; \quad -k\, \frac{dS}{dx}\, \frac{d\Phi}{dx}\, dx - k\, S\, \frac{d^2\Phi}{dx^2}\, dx + h_C\ \Phi\ dA = 0$$

en la que S es la sección transversal variable y dA la superficie lateral del elemento elegido de la aleta expuesta a la convección.

Dividiéndola por *(k S dx)* se obtiene:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{S}\, \frac{dS}{dx}\, \frac{d\Phi}{dx} - \frac{h_C}{k}\left(\frac{1}{S}\, \frac{dA}{dx}\right)\Phi = 0$$

que es de aplicación general a cualquier tipo de configuración de superficie ampliada en la que la conducción de calor sea monodimensional.

Para el caso particular de aleta recta de sección transversal constante, se tiene:

$$\begin{cases} S = Cte \ \Rightarrow\ dS = 0 \\ A = p\, x \ \Rightarrow\ dA = p\, dx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{p\, h_C}{k\, S}\, \Phi = 0$$

ALETA ANULAR DE ESPESOR CONSTANTE.- Este tipo de aletas, Fig IX.4, se utiliza principalmente en cambiadores de calor líquido-gas, y en cilindros de motores refrigerados por aire; para su estudio se supondrá que el espesor de la aleta $(e << r_e - r_b)$ es mucho más pequeño que la diferencia entre sus radios, por lo que la conducción de calor dentro de la aleta dependerá únicamente de la coordenada radial $(r = x)$ tomando la ecuación diferencial la forma:

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{S}\, \frac{dS}{dr}\, \frac{dF}{dr} - \frac{h_C}{k}\left(\frac{1}{S}\, \frac{dA}{dr}\right)\Phi = 0\,, \ \textit{en la que:} \ \begin{cases} S = 2\,\pi\, r\, e \quad ; \quad \frac{dS}{dr} = 2\,\pi\, e \\ A = 2\,\pi\,(r^2 - r_b^2) \quad ; \quad \frac{dA}{dr} = 4\,\pi\, r \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial se obtiene:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\, \frac{d\Phi}{dr} - m^2\ \Phi = 0\,, \ \textit{siendo:}\ m = \sqrt{\frac{2\, h_C}{k\, e}}$$

que es la ecuación diferencial de Bessel de orden cero.

Su solución es:

$$F = B\, I_0(m\, r) + C\, K_0(m\, r)$$

siendo $\begin{cases} I_0 \ \textit{la función de Bessel modificada de primera especie y orden cero} \\ K_0 \ \textit{la función de Bessel modificada de segunda especie y orden cero} \end{cases}$, cuyos valores vienen indicados en la Tabla IX.1; B y C son las constantes de integración.

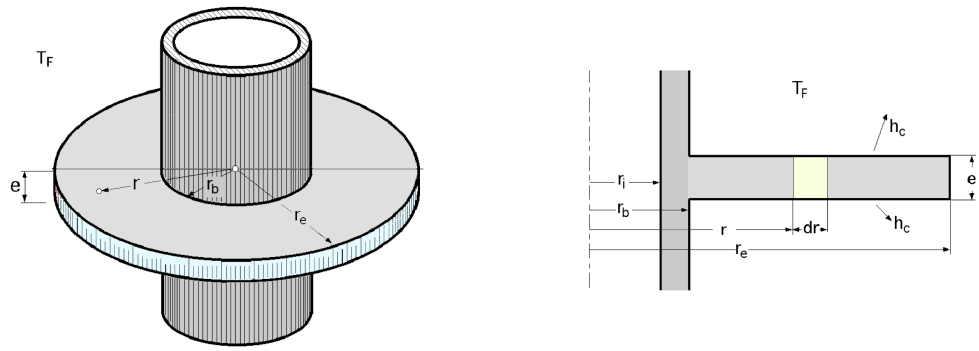


Fig IX.4.- Aleta anular de espesor constante

De las condiciones de contorno se obtiene lo siguiente:

$$a)\ Para:\ \begin{cases} r = r_b \\ T = T_b \end{cases} \Rightarrow \Phi_b = T_b - T_F = B\, I_0(m\, r_b) + C\, K_0(m\, r_b)$$

b) Para $r = r_e$ *, la convección es nula, ya que se desprecia el calor evacuado por el extremo de la aleta; por lo tanto:*

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=r_e} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=r_e} = 0$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=r_e} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dr}\{I_0(m\, r)\} = m\, I_1(m\, r) \\ \dfrac{d}{dr}\{K_0(m\, r)\} = -\, m\, K_1(m\, r) \end{array} \right| = B\, m\, I_1(m\, r_e) - m\, C\, K_1(m\, r_e) = 0$$

Las constantes B y C se obtienen del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_b = B\, I_0(m\, r_b) + C\, K_0(m\, r_b) \\ 0 = B\, I_1(m\, r_e) - C\, K_1(m\, r_e) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{\Phi_b\ K_1(m\, r_e)}{K_1(m\, r_e)\, I_0(m\, r_b) + K_0(m\, r_b)\, I_1(m\, r_e)} \\ C = \dfrac{\Phi_b\ I_1(m\, r_e)}{K_1(m\, r_e)\, I_0(m\, r_b) + K_0(m\, r_b)\, I_1(m\, r_e)} \end{cases}$$

Distribución de temperaturas en la aleta:

$$\frac{\Phi}{\Phi_b} = \frac{K_1(m\, r_e)\, I_0(m\, r) + I_1(m\, r_e)\, K_0(m\, r)}{K_1(m\, r_e)\, I_0(m\, r_b) + K_0(m\, r_b)\, I_1(m\, r_e)}$$

El calor disipado por la aleta es el que atraviesa la base de la misma por conducción:

$$Q = -\, k\, S_b \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=r_b} = \left| S_b = 2\,\pi\, e\, r_b \right| = -\, 2\,\pi\, e\, r_b\ k\, m\, \Phi_b\ \frac{K_1(m\, r_e)\, I_1(m\, r_b) - I_1(m\, r_e)\, K_1(m\, r_b)}{K_1(m\, r_e)\, I_0(m\, r_b) + I_1(m\, r_e)\, K_0(m\, r_b)}$$

Estas ecuaciones para la distribución de temperaturas y del flujo de calor se pueden escribir de modo más general en forma adimensional; al considerar el problema de tipo monodimensional, las expresiones adimensionales de la temperatura y del flujo térmico, se pueden obtener en función de parámetros adimensionales, que se definen en la forma:

Tabla IX.1.- Valores de las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie, órdenes cero y uno

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$	$\frac{2}{\pi}K_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$	$\frac{2}{\pi}K_1(x)$
0	1	0	∞	∞	5	27,2399	24,3356	0,002350	0,002575
0,1	1,0025	0,0501	1,5451	6,273	5,2	32,5336	29,2543	0,001888	0,002062
0,2	1,0100	0,1005	1,11580	3,0405	5,4	39,0088	35,1821	0,001518	0,001653
0,4	1,0404	0,2040	0,70953	1,3906	5,6	46,7376	42,3283	0,001221	0,001326
0,6	1,0920	0,3137	0,49498	0,82941	5,8	56,0381	50,9462	0,000983	0,001064
0,8	1,1665	0,4329	0,35991	0,54862	6	67,2344	61,3419	0,000792	0,0008556
1	1,2661	0,5652	0,26803	0,38318	6,2	80,7179	73,8859	0,0006382	0,0006879
1,2	1,3937	0,7147	0,20270	0,27667	6,4	96,9616	89,0261	0,0005146	0,0005534
1,4	1,5534	0,8861	0,15512	0,20425	6,6	116,537	107,305	0,0004151	0,0004455
1,6	1,7500	1,0848	0,11966	0,15319	6,8	140,136	129,378	0,0003350	0,0003588
1,8	1,9896	1,3172	0,092903	0,11626	7	168,593	156,039	0,0002704	0,0002891
2	2,2796	1,5906	0,072507	0,089041	7,2	202,921	188,250	0,0002184	0,0003231
2,2	2,6291	1,9141	0,056830	0,068689	7,4	244,341	227,175	0,0001764	0,0001880
2,4	3,0493	2,2981	0,044702	0,053301	7,6	294,332	274,222	0,0001426	0,0001517
2,6	3,5533	2,7554	0,035268	0,041561	7,8	354,685	331,099	0,0001153	0,0001424
2,8	4,1573	3,3011	0,027896	0,032539	8	427,564	399,873	0,00009325	0,00009891
3	4,8808	3,9534	0,022116	0,025564	8,2	515,593	483,048	0,00007543	0,00007991
3,2	5,7472	4,7343	0,017568	0,020144	8,4	621,944	583,657	0,00006104	0,00006458
3,4	6,7848	5,6701	0,013979	0,015915	8,6	750,461	705,377	0,00004941	0,00005220
3,6	8,0277	6,7028	0,011141	0,012602	8,8	905,797	852,663	0,00004000	0,00004221
3,8	9,5169	8,1404	0,008891	0,009999	9	1093,59	1030,91	0,00003239	0,00003415
4	11,3019	9,7595	0,007105	0,007947	9,2	1320,66	1246,68	0,00002624	0,00002763
4,2	13,4425	11,706	0,005684	0,006327	9,4	1595,28	1507,88	0,00002126	0,00002236
4,4	16,0104	14,046	0,004551	0,005044	9,6	1927,48	1824,14	0,00001722	0,00001810
4,6	19,0926	16,8626	0,003648	0,004027	9,8	2329,39	2207,13	0,00001396	0,00001465
4,8	22,7937	20,2528	0,002927	0,003218	10	2815,72	2670,99	0,00001131	0,00001187

β *es un parámetro adimensional del coeficiente de película*

α *es un parámetro adimensional del tamaño de la aleta*

η *es un parámetro adimensional de la coordenada (posición)*

que se pueden aplicar a otras configuraciones de aletas.

Para la aleta anular de perfil de sección constante se definen:

$$\begin{cases} \beta_{an} = m\, r_e = \sqrt{\dfrac{2\, h_C\ r_e^2}{k\, e}} \\ \eta_{an} = \dfrac{r}{r_e} \quad ; \quad \alpha_{an} = \dfrac{r_b}{r_e} \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la distribución de temperaturas, resulta:

$$\frac{\Phi}{\Phi_b} = \frac{T - T_F}{T_b - T_F} = \frac{K_1(\beta_{an})\, I_0(\beta_{an}\eta_{an}) + I_1(\beta_{an})\, K_0(\beta_{an}\eta_{an})}{K_1(\beta_{an})\, I_0(\beta_{an}\alpha_{an}) + I_1(\beta_{an})\, K_0(\beta_{an}\alpha_{an})}$$

que permite determinar la temperatura en cualquier punto conocida la temperatura en la base, realizándose los cálculos con ayuda de la Tabla de funciones de Bessel modificadas de 1ª y 2ª especie.

Método gráfico.- Para cálculos rápidos que proporcionan una precisión suficiente, la distribución de temperaturas se puede obtener con ayuda de una gráfica que llamaremos $G_1(\eta\ \beta)$, Fig IX.5,

de forma que:

$$Para:\ r = r_e \ \Rightarrow \ \begin{cases} \Phi = \Phi_e \\ \eta_{an} = 1 \end{cases} \ \Rightarrow \ \frac{\Phi_e}{\Phi_b} = \frac{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an})}{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}\alpha_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an}\alpha_{an})}$$

y como:

$$\frac{\Phi_e}{\Phi} = \frac{\Phi_e}{\Phi_b}\,\frac{\Phi_b}{\Phi} = \frac{\dfrac{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an})}{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}\ \alpha_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an}\ \alpha_{an})}}{\dfrac{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}\ \eta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an}\ \eta_{an})}{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}\ \alpha_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an}\ \alpha_{an})}} = \frac{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an})}{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}\ \eta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an}\ \eta_{an})}$$

resulta que estas dos ecuaciones son idénticas, en las que se sustituyen $\begin{cases} \alpha_{an}\ por\ \eta_{an} \\ \Phi_b\ por\ \Phi \end{cases}$

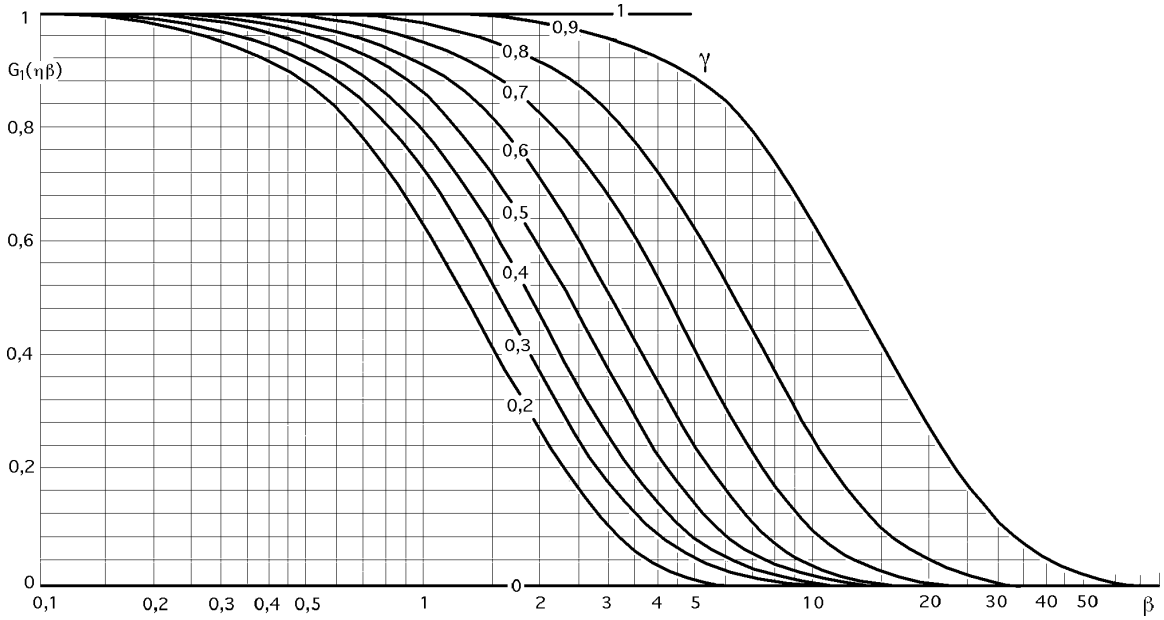


Fig IX.5.- La función G_1 para la distribución de la temperatura en aleta anular de espesor uniforme

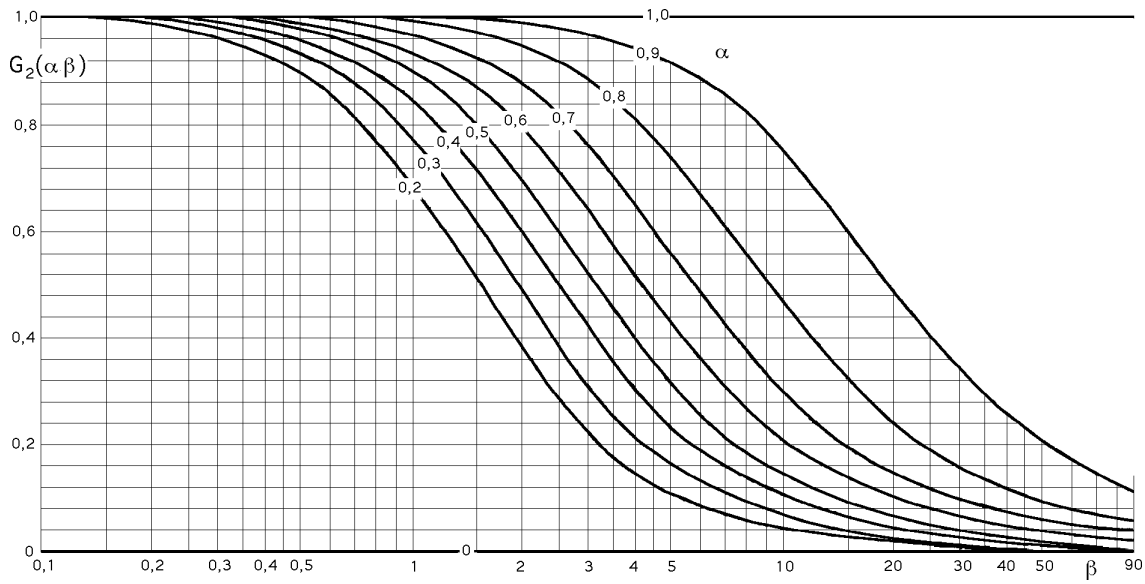


Fig IX.6.- La función G_2 para el flujo calorífico en aleta anular de espesor uniforme

Si se define una función:

$$G_1(\beta_{an}\gamma) = \frac{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an})}{K_1(\beta_{an})\,I_0(\beta_{an}\alpha_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\beta_{an}\alpha_{an})}$$

las dos ecuaciones anteriores son:

$$\frac{\Phi_e}{\Phi_b} = G_1(\beta_{an}\alpha_{an}),\ y\ \ \frac{\Phi_e}{\Phi} = G_1(\beta_{an}\eta_{an}),\ para\ (\alpha < \eta < 1)$$

es decir:

$$G_1(\eta\ \beta)\ se\ transforma\ en:\ \begin{cases} G_1(\beta_{an}\alpha_{an})\ para\ hallar\ la\ temperatura\ en\ el\ radio\ extremo\ r_e \\ G_1(\beta_{an}\eta_{an})\ para\ hallar\ la\ temperatura\ en\ cualquier\ radio\ r \end{cases}$$

Conocido Φ_e el valor de Φ se calcula para cualquier radio comprendido entre r_b y r_e a partir de:

$$\frac{\Phi_e}{\Phi} = G_1(\beta_{an}\eta_{an}),\ para\ (\alpha < \eta < 1)$$

El flujo calorífico se calcula también mediante otra gráfica que se denomina $G_2(\alpha_{an}\beta_{an})$, la cual se obtiene a partir de:

$$Q = -2\,\pi\,k\,e\,(m\,r_b)\,\Phi_b\ \frac{K_1(m\,r_e)\,I_1(m\,r_b) - I_1(m\,r_e)\,K_1(m\,r_b)}{K_1(m\,r_e)\,I_0(m\,r_b) + I_1(m\,r_e)\,K_0(m\,r_b)} = \left| \begin{array}{c} Se\ multiplica\ y\ divide\ por \\ (1 - \alpha_{an}^2)\,\beta_{an} \end{array} \right| =$$

$$= 2\,\pi\,k\,e\,(\alpha_{an}\beta_{an})\,\Phi_b\ \frac{1 - \alpha_{an}^2}{1 - \alpha_{an}^2}\ \frac{K_1(\alpha_{an}\beta_{an})\,I_1(\beta_{an}) - I_1(\alpha_{an}\beta_{an})\,K_1(\beta_{an})}{K_1(\beta_{an})\,I_0(\alpha_{an}\beta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\alpha_{an}\beta_{an})}$$

$$\frac{Q}{\pi\,k\,e\,(1 - \alpha_{an}^2)\,\beta_{an}^2\,\Phi_b} = \frac{2\,\alpha_{an}}{\beta_{an}(1 - \alpha_{an}^2)}\ \frac{K_1(\alpha_{an}\beta_{an})\,I_1(\beta_{an}) - I_1(\alpha_{an}\beta_{an})\,K_1(\beta_{an})}{K_1(\beta_{an})\,I_0(\alpha_{an}\beta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\alpha_{an}\beta_{an})} = G_2(\alpha_{an}\beta_{an})$$

$$Q = \pi\,k\,e\,(1 - \alpha_{an}^2)\,\beta_{an}^2\,\Phi_b\,G_2(\alpha_{an}\beta_{an})$$

en la que la función $G_2(\alpha_{an}\beta_{an})$ se ha definido en la forma:

$$G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) = \frac{2\,\alpha_{an}}{\beta_{an}(1 - \alpha_{an}^2)}\ \frac{K_1(\alpha_{an}\beta_{an})\,I_1(\beta_{an}) - I_1(\alpha_{an}\beta_{an})\,K_1(\beta_{an})}{K_1(\beta_{an})\,I_0(\alpha_{an}\beta_{an}) + I_1(\beta_{an})\,K_0(\alpha_{an}\beta_{an})}$$

y viene representada en la Fig IX.6.

ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL TRAPECIAL.- Para proceder al estudio de la aleta longitudinal de perfil triangular y trapecial resulta conveniente situar el origen de coordenadas en el punto de intersección de las caras de la aleta, para el caso triangular, o de su prolongación, para el trapecial, Fig IX.7, por cuanto se simplifica el cálculo de las constantes de integración.

Partiendo del hecho de que la aleta sea lo suficientemente delgada como para suponer un espesor $(e << L - x_e)$, existirá flujo monodimensional.

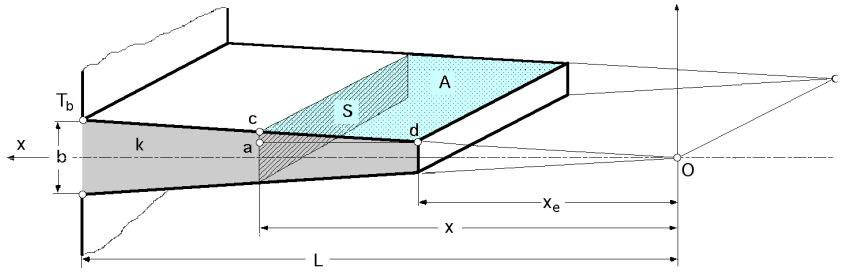


Fig IX.7.- Aleta recta de perfil triangular y trapecial

La ecuación diferencial a resolver es: $\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\frac{d\Phi}{dx} - \frac{h_C}{k}\left(\frac{1}{S}\frac{dA}{dx}\right)\Phi = 0$

Para la aleta longitudinal de anchura unidad, en la que se pueden despreciar las pérdidas laterales, el área de las secciones lateral A, y transversal S, varía con x en la forma:

$$S = \frac{b\,x}{L} \quad ; \quad \frac{dS}{dx} = \frac{b}{L}$$

$$A = 2\,\overline{cd} = 2\sqrt{\overline{ad}^2 + \overline{ac}^2} = \left| \begin{array}{c} \overline{ad} = x - x_e \\ \frac{\overline{ac}}{b/2} = \frac{\overline{ad}}{L} = \frac{x - x_e}{L} \end{array} \right| = 2\sqrt{(x - x_e)^2 + \left(\frac{b}{2}\frac{x - x_e}{L}\right)^2} =$$

$$= 2\,(x - x_e)\sqrt{1 + \frac{b^2}{4\,L^2}} = 2\,(x - x_e)\,f = 2\,\overline{ad}$$

siendo $f = \sqrt{1 + \frac{b^2}{4\,L^2}}$ *una constante que depende de las características de la aleta.*

Si: $L >> b \;\Rightarrow\; f = 1$, *se satisface la condición monodimensional:* $\begin{cases} A = 2\,(x - x_e) \\ \frac{dA}{dx} = 2 \end{cases}$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial general se obtiene:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left(\frac{L}{b\,x}\frac{b}{L}\right)\frac{d\Phi}{dx} - \frac{h_C}{k}\left(\frac{L}{b\,x}\,2\,f\right)\Phi = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Phi}{dx} - \frac{n^2}{x}\Phi = 0\,,\ con:\ n = \sqrt{\frac{2\,f\,h_C\,L}{k\,b}} = m\sqrt{L}$$

siendo la solución de esta ecuación diferencial: $L = \sqrt{\frac{2\,h_{cF}}{k\,b}}$

ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL TRIANGULAR.- Para calcular las constantes de integración de la aleta triangular B y C, partiremos de las condiciones en los extremos; de acuerdo con la Fig IX.7, se tiene:

a) Para: $x = x_e = 0$, $C = 0$, *por cuanto la función de Bessel modificada* K_0 *tiende a infinito cuando el argumento tiende a cero; por lo tanto:* $\Phi = B\,I_0(2\,n\sqrt{x})$

b) Para: x = L, T = T_b que se supone constante, luego $\Phi = \Phi_\beta$ y por lo tanto, el valor de B es:

$$\Phi_b = B\, I_0(2\,n\sqrt{L}) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\Phi_b}{I_0(2\,n\sqrt{L})}$$

La distribución de temperaturas es: $\Phi = \dfrac{\Phi_b}{I_0(2\,n\sqrt{L})}\, I_0(2\,n\sqrt{x}) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Phi}{\Phi_b} = \dfrac{I_0(2\,n\sqrt{x})}{I_0(2\,n\sqrt{L})}$

El calor disipado al exterior por la aleta longitudinal de anchura unidad será igual al que penetra por conducción por su base, por lo que:

$$Q = -\,k\,(S\,\frac{d\Phi}{dx})_{x=L} = -\,k\,b\,\Phi_b\,\frac{\frac{2\,n}{2\sqrt{L}}\,I_1(2\,n\sqrt{L})}{I_0(2\,n\sqrt{L})} = -\,\frac{k\,b\,\Phi_b\,n}{\sqrt{L}}\,\frac{I_1(2\,n\sqrt{L})}{I_0(2\,n\sqrt{L})}$$

Método gráfico.- Las ecuaciones de Φ y de Q se pueden expresar en forma adimensional, haciendo:

$$\beta_t = 2\,n\sqrt{L} = \sqrt{\frac{8\,f\,h_C\,L^2}{k\,b}} \quad ; \quad \eta_t = \sqrt{\frac{x}{L}}$$

La distribución de temperaturas es: $\dfrac{\Phi}{\Phi_b} = \dfrac{I_0(\beta_t\ \eta_t)}{I_0(\beta_t)} = G_3(\beta_t\ \eta_t)$

El flujo de calor es: $Q = -\,\Phi_b\ k\ b\ \dfrac{\beta_t}{2\,L}\ \dfrac{I_1(\beta_t)}{I_0(\beta_t)} = -\,\Phi_b\ k\ b\ \dfrac{\beta_t}{2\,L}\ G_4(\beta_t)$

en las que las gráficas de las nuevas funciones, $G_3(\beta_t\ \eta_t)$ y $G_4(\beta_t)$, Fig IX.8 y 9, se utilizan para cálculos rápidos.

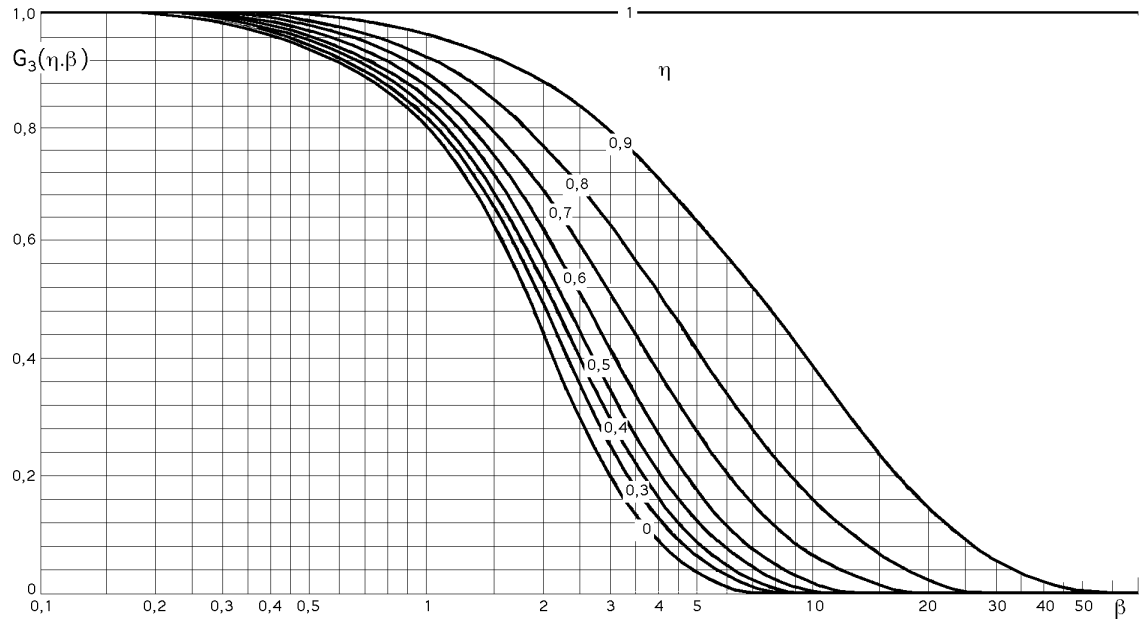


Fig IX.8.- La función G_3 para la distribución de la temperatura en la aleta recta de perfil triangular

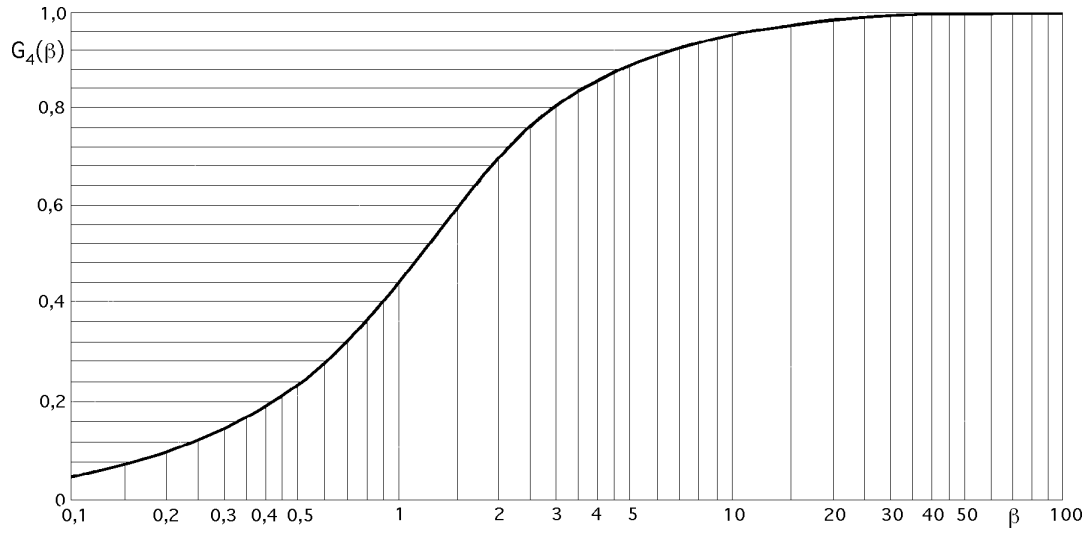


Fig IX.9.- La función G_4 para el flujo calorífico en la aleta recta de perfil triangular

IX.7.- PERFIL OPTIMO DE LA ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL TRIANGULAR

El perfil óptimo de la aleta triangular longitudinal de sección $\Omega = \frac{b\,L}{2}$ se obtiene haciendo $\frac{dQ}{db} = 0$, con Q en la forma:

$$Q = -\frac{k\,b\,\Phi_b n}{\sqrt{L}}\,\frac{I_1(2\,n\sqrt{L})}{I_0(2\,n\sqrt{L})} = \left| n = \sqrt{\frac{2\,h_C\,L}{k\,b}} \right| = -\Phi_b\sqrt{2\,h_C k\,b}\,\frac{I_1(2L\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b}})}{I_0(2L\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b}})} = -\Phi_b\sqrt{2\,h_C k\,b}\,\frac{I_1(4\,\Omega\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b^3}})}{I_0(4\,\Omega\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b^3}})}$$

Derivándola respecto de b se obtiene la condición de máximo:

$$\frac{4}{3}\,\frac{I_1(4\,\Omega\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b^3}})}{I_0(4\,\Omega\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b^3}})} = \Omega\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b^3}}\{1-(\frac{I_1(4\,\Omega\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b^3}})}{I_0(4\,\Omega\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b^3}})})^2\} \quad \Rightarrow \quad 4\,\Omega\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,b^3}} = 2{,}6168$$

de la que se deducen: $\begin{cases} \text{Base: } b_{ópt} = 1{,}6718\sqrt[3]{\frac{\Omega^2 h_C}{k}} \\ \text{Longitud: } L_{ópt} = 1{,}196\sqrt[3]{\frac{\Omega\,k}{h_C}} = \frac{2\,\Omega}{b_{ópt}} \end{cases}$ *, condiciones óptimas función de la sección Ω del perfil.*

Teniendo en cuenta la carga térmica:

$$Q = -\Phi_b\sqrt{2\,h_C k\,b_{ópt}}\,\frac{I_1(2{,}6168)}{I_0(2{,}6168)} = -0{,}7754\,\Phi_b\sqrt{2\,h_C k\,b_{ópt}} \quad \Rightarrow \quad b_{ópt} = \frac{0{,}8273}{k\,h_C}(\frac{Q}{T_b - T_F})^2$$

$$\Omega_{ópt} = \frac{0{,}3483}{k\,h_C^2}(\frac{Q}{T_b - T_F})^3 \;\; ; \;\; L_{ópt} = \frac{0{,}8420}{h_C}(\frac{Q}{T_b - T_F})$$

Igualando los valores de $b_{ópt}$ o de $L_{ópt}$, se obtiene la relación entre el perfil óptimo Ω (de mínimo material) y la carga térmica Q:

$$\Omega_{ópt} = \frac{0{,}3486}{k\, h_C^2} \left(\frac{Q}{T_b - T_F} \right)^3$$

IX.8.- RENDIMIENTO DE LA ALETA

Se define el rendimiento de una aleta μ, como la relación entre la cantidad de calor transferida realmente por la aleta Q_a y el calor transferido a través de una aleta ideal Q_i:

$$\eta = \frac{Q_{real}}{Q_{ideal}}$$

La aleta ideal transfiere la máxima cantidad de calor respecto a una aleta cualquiera del mismo tamaño e igual temperatura en la base. La aleta ideal tiene una conductividad térmica infinita y, por consiguiente, toda ella es isotérmica, por lo que estará a la temperatura de la base T_b.

La transferencia de calor, por unidad de tiempo, desde una aleta ideal es:

$$Q_i = h_C\, A_a\, (T_b - T_F)$$

siendo $(A_a = p\, L)$ la superficie lateral de la aleta expuesta al fluido a temperatura T_F.

Por lo tanto, la transferencia de calor por unidad de tiempo, procedente de la aleta real, en función del rendimiento, es:

$$Q_{real} = Q = \eta\, h_C\, A_a\, (T_b - T_F)$$

Si se tiene en cuenta la sección A_t, perteneciente al tubo, el calor Q total disipado por la aleta y el tubo es:

$$Q = Q_t + Q_a = h_C\, (A_t + \eta\, A_a)\, (T_b - T_F)$$

CASOS PARTICULARES:

a) Aleta longitudinal de sección uniforme, de superficie constante y extremo libre aislado

$$\eta = \frac{\sqrt{Bi}\ \frac{k\, S}{L}\, (T_b - T_F)\, Th\sqrt{Bi}}{h_C\, p\, L\, (T_b - T_F)} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} \quad ; \quad Bi = \frac{h_C\, p\, L^2}{k\, S} \quad ; \quad p = 2\,(a + e) \simeq 2\,a$$

que viene representada en la Fig IX.10.

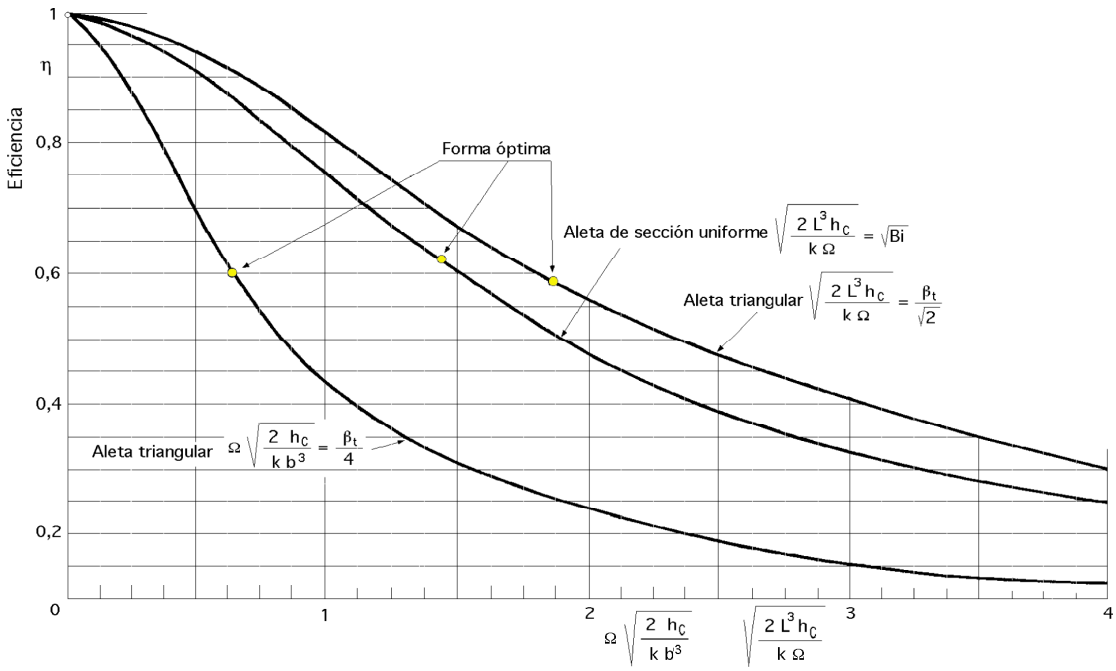


Fig IX.10.- Eficiencia de las aletas de sección uniforme y de sección triangular

b) Aleta longitudinal de perfil triangular

$$\eta = \frac{\frac{k\,b\,\Phi_b}{\sqrt{L}}\,n\,\frac{I_1(2\,n\sqrt{L})}{I_0(2\,n\sqrt{L})}}{2\,h_C\,L\,\Phi_b} = \frac{n}{\frac{2\,h_C\,L}{k\,b}\,\sqrt{L}}\,\frac{I_1(2\,n\sqrt{L})}{I_0(2\,n\sqrt{L})} = \left| n = \sqrt{\frac{2\,f\,h_C L}{k\,b}} = m\,\sqrt{L} \right| =$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{L}}\,\frac{I_1(2\,n\sqrt{L})}{I_0(2\,n\sqrt{L})} = \left| \begin{array}{c} \beta_t = 2\,n\sqrt{L} \\ G_4(\beta) = \frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} \end{array} \right| = \frac{G_4(2\,n\sqrt{L})}{n\sqrt{L}} = \frac{2\,G_4(\beta_t)}{\beta_t}$$

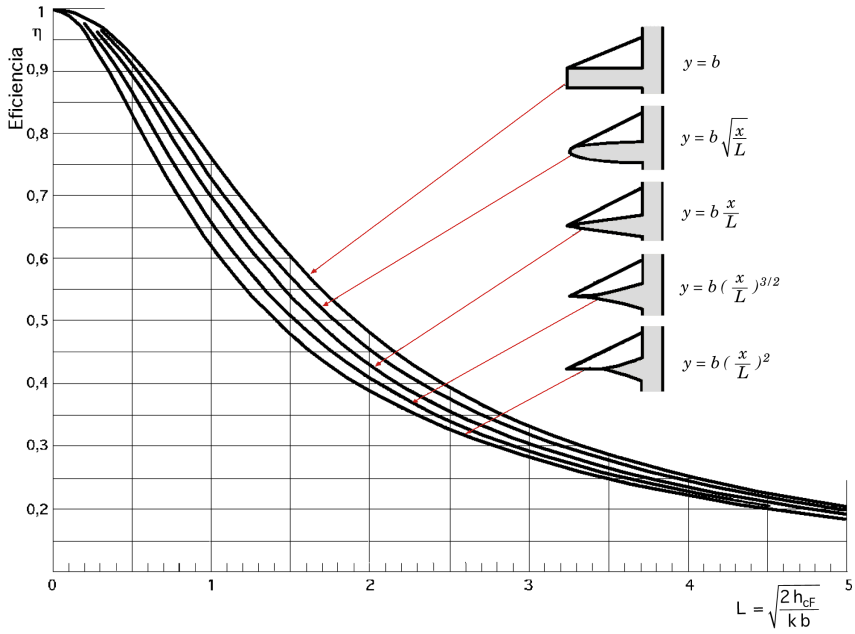


Fig IX.11.- Eficiencia de aletas de perfil rectangular, triangular y parabólico

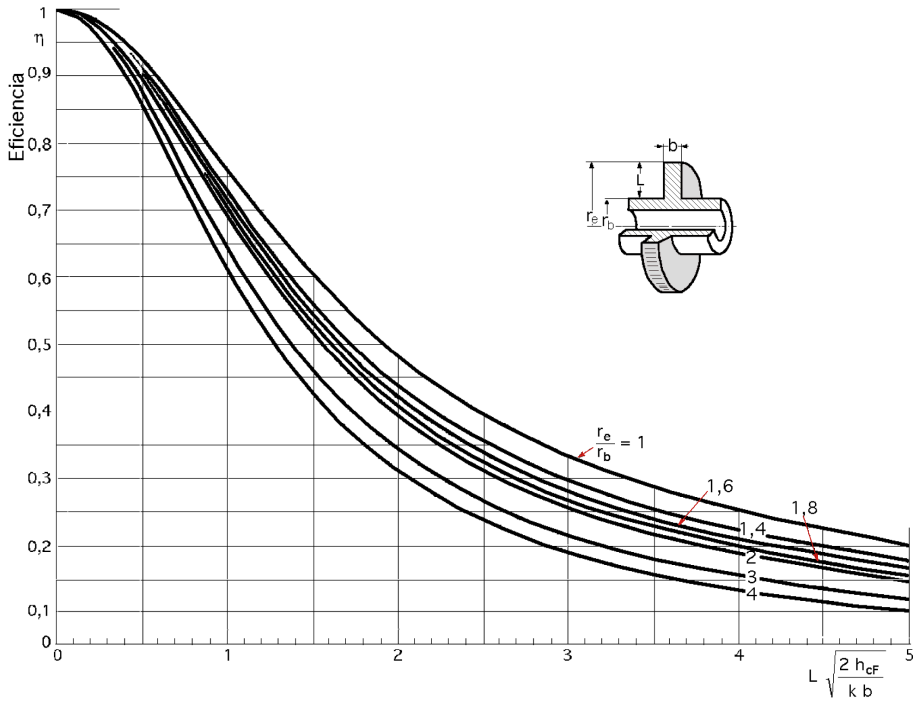


Fig IX.12.- Eficiencia de aletas anulares de perfil rectangular

c) Aleta anular de espesor constante

$$\eta = \frac{\pi\,(1-\alpha_{an}^2)\,k\;e\;\Phi_b\;\beta_{an}^2\;G_2(\alpha_{an}\beta_{an})}{h_C\;\Phi_b\;A} = \left| \begin{array}{c} A = 2\;\pi\;(r_e^2 - r_b^2) \\ \alpha_{an} = \dfrac{r_b}{r_e}\;\;;\;\; r_b = r_e\alpha_{an} \\ \beta_{an}^2 = \dfrac{2\;h_C r_e^2}{k\;e}\;\;;\;\; 2\;h_C r_e^2 = k\;e\;\beta_{an}^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi\;(1-\alpha_{an}^2)\,k\;e\;\Phi_b\;\beta_{an}^2\;G_2(\alpha_{an}\beta_{an})}{h_C\;\Phi_b\;2\;\pi\;r_e^2\,(1-\alpha_{an}^2)} = G_2(\alpha_{an}\beta_{an})$$

Cuando las aletas son muy largas, $L >> b$, la eficiencia de la aleta se puede poner en función del parámetro $L\sqrt{\dfrac{2\,h_C}{k\,b}} = L\sqrt{m}$

Las Fig IX.11 y 12, muestran la variación de la eficiencia de la aleta en función de dicho parámetro para algunas secciones transversales típicas; así, en la Fig IX.11 se representa la eficiencia de aletas longitudinales en las que el espesor de la aleta varía con la distancia x medida desde la base de la aleta; en la Fig IX.12 se representa la eficiencia de aletas anulares en forma de disco de espesor $e = Cte$.

Al aumentar el número de aletas en una superficie se aumenta el área de transferencia térmica, pero también aumenta la resistencia térmica de la superficie en donde se fijan las aletas, por lo que se pueden presentar situaciones en las que al aumentar el número de aletas no se incremente la transferencia de calor.

Tabla IX.2.- Eficacia de aletas sobre superficies planas

m L	*Perfil rectangular*	*Perfil triangular*	*Perfil cóncavo*	*Perfil parabólico convexo*
0	*1*	*1*	*1*	*1*
0,1	*0,996*	*0,995*	*0,99*	*0,975*
0,2	*0,986*	*0,98*	*0,962*	*0,968*
0,3	*0,971*	*0,957*	*0,923*	*0,965*
0,4	*0,949*	*0,927*	*0,877*	*0,935*
0,5	*0,924*	*0,892*	*0,929*	*0,903*
0,6	*0,895*	*0,854*	*0,78*	*0,877*
0,7	*0,853*	*0,814*	*0,735*	*0,84*
0,8	*0,83*	*0,774*	*0,692*	*0,802*
0,9	*0,795*	*0,735*	*0,653*	*0,769*
1	*0,761*	*0,697*	*0,618*	*0,731*
1,1	*0,727*	*0,661*	*0,585*	*0,695*
1,2	*0,694*	*0,629*	*0,555*	*0,666*
1,3	*0,662*	*0,596*	*0,528*	*0,63*
1,4	*0,632*	*0,567*	*0,503*	*0,6*
1,5	*0,603*	*0,54*	*0,48*	*0,572*
1,6	*0,576*	*0,514*	*0,459*	*0,545*
1,7	*0,55*	*0,491*	*0,44*	*0,52*
1,8	*0,526*	*0,47*	*0,422*	*0,497*
1,9	*0,503*	*0,45*	*0,405*	*0,476*
2	*0,482*	*0,431*	*0,39*	*0,456*
2,1	*0,462*	*0,414*	*0,376*	*0,437*
2,2	*0,443*	*0,398*	*0,352*	*0,424*
2,3	*0,426*	*0,384*	*0,35*	*0,404*
2,4	*0,409*	*0,37*	*0,338*	*0,389*
2,5	*0,394*	*0,357*	*0,327*	*0,375*
2,6	*0,38*	*0,345*	*0,317*	*0,361*
2,7	*0,367*	*0,334*	*0,308*	*0,349*
2,8	*0,354*	*0,323*	*0,299*	*0,338*
2,9	*0,342*	*0,313*	*0,29*	*0,327*
3	*0,331*	*0,304*	*0,282*	*0,317*
3,1	*0,321*	*0,295*	*0,274*	*0,307*
3,2	*0,311*	*0,286*	*0,257*	*0,298*
3,3	*0,302*	*0,279*	*0,26*	*0,289*
3,4	*0,293*	*0,271*	*0,254*	*0,281*
3,5	*0,285*	*0,264*	*0,247*	*0,274*

Tabla IX.3.- Eficacia de aletas anulares de perfil rectangular

β/α	*α= 0,2*	*α= 0,4*	*α= 0,6*	*α= 0,8*
0,1	*0,992*	*1*	*1*	*1*
0,1	*0,992*	*0,994*	*0,995*	*0,995*
0,2	*0,971*	*0,979*	*0,983*	*0,985*
0,3	*0,938*	*0,954*	*0,962*	*0,967*
0,4	*0,896*	*0,922*	*0,936*	*0,944*
0,5	*0,847*	*0,884*	*0,904*	*0,915*
0,6	*0,794*	*0,842*	*0,868*	*0,883*
0,7	*0,74*	*0,798*	*0,829*	*0,849*
0,8	*0,684*	*0,754*	*0,79*	*0,913*
0,9	*0,537*	*0,709*	*0,75*	*0,776*
1	*0,589*	*0,565*	*0,711*	*0,74*
1,1	*0,544*	*0,625*	*0,673*	*0,711*
1,2	*0,503*	*0,587*	*0,536*	*0,569*
1,3	*0,466*	*0,551*	*0,602*	*0,535*
1,4	*0,432*	*0,517*	*0,569*	*0,605*
1,5	*0,402*	*0,486*	*0,539*	*0,575*
1,6	*0,374*	*0,458*	*0,51*	*0,547*

β/α	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,6$	$\alpha = 0,8$
1,7	0,349	0,431	0,484	0,522
1,8	0,326	0,407	0,46	0,498
1,9	0,306	0,385	0,437	0,475
2	0,287	0,365	0,415	0,454
2,1	0,27	0,346	0,397	0,434
2,2	0,255	0,329	0,379	0,416
2,3	0,241	0,314	0,362	0,399
2,4	0,228	0,299	0,347	0,383
2,5	0,217	0,286	0,333	0,356
2,6	0,206	0,273	0,319	0,354
2,7	0,196	0,262	0,307	0,34
2,8	0,187	0,251	0,295	0,329
2,9	0,179	0,241	0,285	0,318
3	0,172	0,232	0,275	0,306
3,1	0,154	0,224	0,255	0,296
3,2	0,159	0,215	0,256	0,288
3,3	0,152	0,208	0,248	0,279
3,4	0,145	0,201	0,24	0,271
3,5	0,141	0,195	0,233	0,263

Método de Schmidt.- *Consiste en la transferencia de calor a una configuración de tubos desnudos o lisos, tratando al tubo como una aleta de altura cero*

La correlación de Schmidt para la conductancia, en el caso de tubos con aletas helicoidales, rectangulares, circulares o cuadradas, es de la forma:

$$h_C = h_{cF}\, Z \{ 1 - (1 - \eta_{aleta}) (\frac{S_{aleta}}{S_{tubo+aletas}}) \}$$

en la que:
h_{cF} *es el coeficiente de transferencia térmica para tubo desnudo en flujo cruzado*
S_{aleta} *es el área de la superficie de la aleta, incluyendo ambos lados y periferia*
$S_{tubo+aletas}$ *es el área de la superficie del tubo expuesta entre aletas, más la de las aletas*
Factor geométrico $Z = 1 - 0,18 (\frac{L_{aleta}}{L_{espaciado\ entre\ aletas}})^{0,63}$

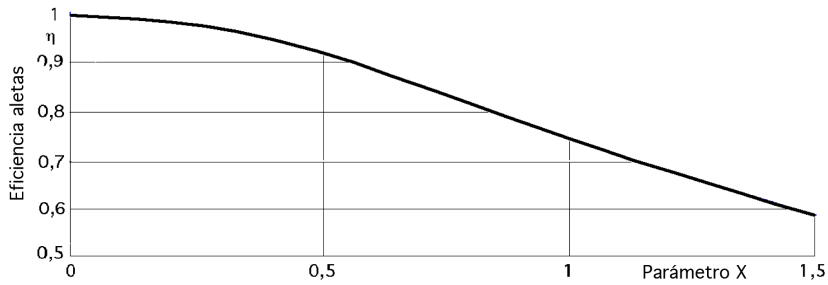


Fig XI.13.- Eficiencia de aletas en función del parámetro X

La eficiencia de las aletas se muestra en la Fig XI.13, como función de un parámetro *X* de valor:

- Aletas helicoidales: $X = L_{aleta} \sqrt{\frac{2\, Z\, h_{cF}}{k_F\ L_{espaciado}}}$

- *Aletas rectangulares, cuadradas o circulares* $X = r\,Y\sqrt{\dfrac{2\,Z\,h_{cF}}{k_F\;L_{espaciado}}}$ *, en la que el parámetro Y se define en la Fig.XI.14.*

La conductancia global se puede poner, considerando el parámetro C_{limp} (factor de limpieza) en la forma:

$$\frac{1}{U\,A} = \frac{1}{C_{limp}\,A_e\,h_{c\,ext}} + R_{equiv} + \frac{1}{A_i\,h_{c\,int}}$$

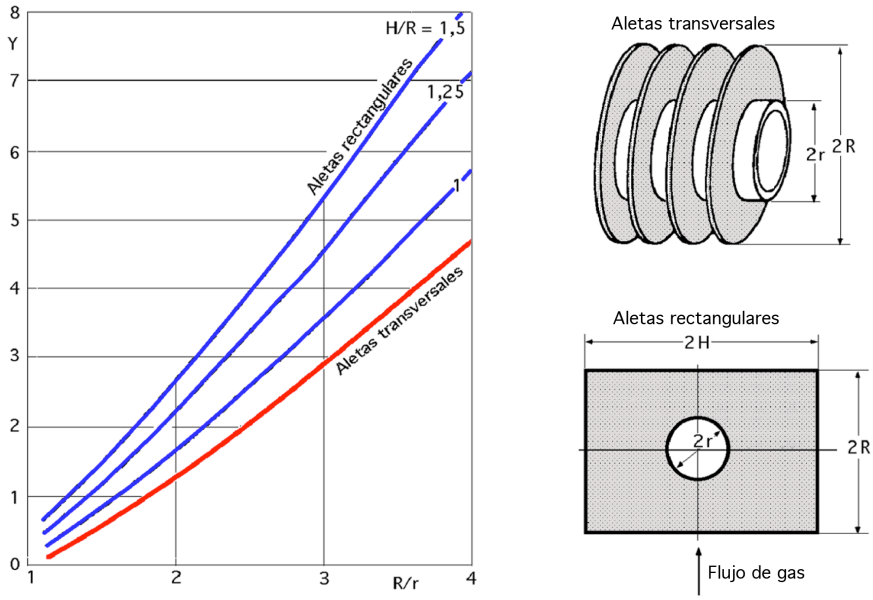
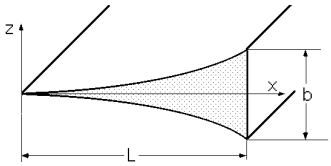


Fig XI.14.- Coeficiente Y función de la relación R/r para diversos tipos de aletas

IX.9.- ALETAS LONGITUDINALES DE PERFIL PARABÓLICO

Perfil parabólico cóncavo



Ecuación del perfil: $z = \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{x}{L}\right)^2$; *Superficie del perfil:* $\Omega = \dfrac{b\,L}{3}$

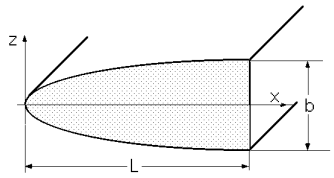
Calor evacuado al exterior: $Q = \dfrac{4\,h_c\;\Omega_b\;L}{1+\sqrt{1+4\,m^2L^2}}$

Distribución de temperaturas: $\dfrac{\Phi}{\Phi_b} = \dfrac{T-T_F}{T_b-T_F} = \left(\dfrac{x}{L}\right)^a$; $a = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\,m^2L^2}}{2}$; $m = \sqrt{\dfrac{2\,h_c}{k\,b}}$

$$\eta = \frac{2}{1+\sqrt{1+4\,m^2L^2}}$$

Condición para el perfil óptimo: $m\,L = \sqrt{\dfrac{2\,h_c}{k\,b}}\,L = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b_{ópt} = 2{,}08\,\sqrt[3]{\dfrac{\Omega^2\,h_c}{k}} \\ L_{ópt} = \dfrac{3\,\Omega}{b_{ópt}} = 1{,}4423\,\sqrt[3]{\dfrac{\Omega\,k}{h_c}} \end{cases}$

Perfil parabólico convexo



Ecuación del perfil: $z = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{x}{L}}$; *Superficie del perfil:* $\Omega = \frac{2\,b\,L}{3}$

Calor evacuado al exterior: $Q = \frac{I_{(2/3)}(\frac{4\,m\,L}{3})\,2\,h_c\,\Phi_b}{m\,L\,I_{(-1/3)}(\frac{4\,m\,L}{3})}$

Distribución de temperaturas: $\frac{\Phi}{\Phi_b} = \frac{T - T_F}{T_b - T_F} = \sqrt[4]{\frac{x}{L}}\ \frac{I_{(-1/3)}(\frac{4\,m\,\sqrt[4]{L\,x^3}}{3})}{I_{(-1/3)}(\frac{4\,m\,L}{3})}$; $m = \sqrt{\frac{2\,h_c}{k\,b}}$

Eficacia: $\eta = \frac{I_{(2/3)}(\frac{4\,m\,L}{3})}{m\,L\,I_{(-1/3)}(\frac{4\,m\,L}{3})}$

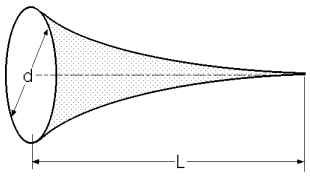
Condiciones para el perfil óptimo: $\frac{4\,m\,L}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\,h_c}{k}}\ \frac{3}{2}\ \frac{\Omega}{b^{2/3}} = 1{,}705$

$b_{ópt} = 1{,}4013\ \sqrt[3]{\frac{h_c\Omega^2}{k}}$; $L_{ópt} = \frac{3\,\Omega}{2\,b_{ópt}} = 1{,}07\ \sqrt[3]{\frac{\Omega\,k}{h_c}}$

.....

IX.10.- PROTUBERANCIAS

Protuberancia parabólica cóncava



Perfil: $z = \frac{d}{2}(\frac{x}{L})^2$

Superficie lateral: $A = \int 2\,\pi\,z\,dx = 2\,\pi\,\frac{d}{2}\int_0^L (\frac{x}{L})^2\,dx = \frac{\pi\,d\,L}{3}$

Sección transversal: $S = \pi\,z^2 = \frac{\pi\,d^2}{4}(\frac{x}{L})^4$

Volumen: $V = \int \pi\,z^2\,dx = \int_0^L \pi\,(\frac{d}{2})^2(\frac{x}{L})^4\,dx = \frac{\pi\,d^2 L}{20}$

Ecuación diferencial: $\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Phi}{dx} = \frac{h_c}{k}\frac{4\,L^2}{x^2 d}\,\Phi = \left| n^2 = \frac{4\,h_c L^2}{k\,d} \right| = (\frac{n}{x})^2\Phi$

Distribución de temperaturas: $\Phi = \Phi_b(\frac{x}{L})^a$, *con:* $a = \frac{-3 + \sqrt{9 + 8\,m^2L^2}}{2}$; $m = \sqrt{\frac{2\,h_c}{k\,d}} = \frac{n}{L\sqrt{2}}$

Calor evacuado: $\int_0^L h_c\,dA\,\Phi = \int_0^L h_c\,2\,\pi\,\frac{d}{2}(\frac{x}{L})^{2+a}\Phi_b\,dx = \pi\,h_c\,\Phi_b\,\frac{d}{L^{2+a}}\,\frac{L^{3+a}}{3+a} = \frac{2\,\pi\,h_c d\,L}{3 + \sqrt{9 + 8\,(mL)^2}}$

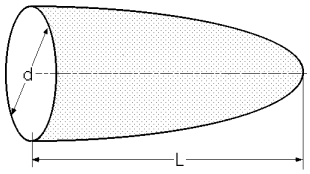
Eficiencia: $\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{8\,m^2L^2}{9}}}$

Calor evacuado: $Q = \eta\,A\,h_c\,\Phi_b = \eta\,A\,h_c(T_b - T_F)$

Condición para el perfil óptimo: $\frac{dQ}{dL} = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{2}\; m\, L = 2 \;;\; m\, L = \sqrt{2} \;\;;\; L_{ópt} = \frac{\sqrt{2}}{m} = \sqrt{\frac{k\, d}{h_c}}$

.....

Protuberancia parabólica convexa



Perfil: $z = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{x}{L}}$

Superficie lateral: $A = \int 2\,\pi\, z\, dx = 2\,\pi\, \frac{d}{2}\int_0^L \sqrt{\frac{x}{L}}\; dx = \frac{2\,\pi\, d\, L}{3}$

Sección transversal: $S = \pi\, z^2 = \frac{\pi\, d^2}{4}\;\frac{x}{L}$

Volumen: $V = \int \pi\, z^2\, dx = \int_0^L \pi\, (\frac{d}{2})^2\, \frac{x}{L}\; dx = \frac{\pi\, d^2 L}{8}$

Ecuación diferencial: $\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{d\Phi}{dx} = \frac{4\, h_c}{k\, d}\,\sqrt{\frac{L}{x}}\;\Phi = \left| n^2 = \frac{4\, h_c\, \sqrt{L}}{k\, d} \right| = \frac{n^2}{\sqrt{x}}\;\Phi$

Distribución de temperaturas: $\Phi = \Phi_b\;\frac{I_0\{\frac{4}{3}\,\sqrt{2}\; m\; \sqrt[4]{L\, x^3}\}}{I_0(\frac{4}{3}\,\sqrt{2}\; m\; L)}$

Calor evacuado: $Q = \int_0^L h_c\; dA\, \Phi = \int_0^L h_c\, 2\pi\; \frac{d}{2}\,\sqrt{\frac{x}{L}}\;\Phi_b\;\frac{I_0\{\frac{4}{3}\,\sqrt{2}\; m\; \sqrt[4]{L\, x^3}\}}{I_0(\frac{4}{3}\,\sqrt{2}\; m\; L)}\, dx = \frac{3\,\pi\, d\, h_c \Phi_b}{2\sqrt{2}\; m\, L}\;\frac{I_1\{\frac{4}{3}\,\sqrt{2}\; m\, L\}}{I_0(\frac{4}{3}\,\sqrt{2}\; m\; L)}$

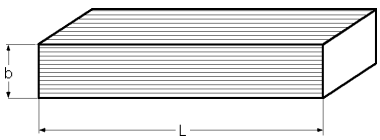
Eficiencia: $\mu = \frac{3}{2\sqrt{2}}\;\frac{I_1(\frac{4}{3}\,\sqrt{2}\; m\; L)}{m\; L\; I_0(\frac{4}{3}\,\sqrt{2}\; m\; L)}$

Calor evacuado al exterior: $Q = (T_b - T_F)\;\eta\; A\; h_c$

Condición para el perfil óptimo: $\frac{dQ}{dL} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4\sqrt{2}\; m\, L}{3} = 1{,}05 \;;\; m\, L = 0{,}5568 \;\Rightarrow\; L_{ópt} = \frac{0{,}5568}{m} = 0{,}393\sqrt{\frac{k\, d}{h_c}}$

.....

Protuberancia paralelepípedo de sección cuadrada



Volumen : $V = b^2 L \;;\; p = 2\, a \;;\; S = a\, e$

Superficie de evacuación de calor: $A = 4\, b\, L + b^2 \cong 4\, b\, L$

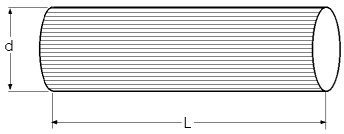
Eficiencia: $\eta = \frac{Th(\sqrt{2}\; m\, L)}{\sqrt{2}\; m\, L} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} \;\;;\;\; m = \sqrt{\frac{2\, h_C}{k\, b}} \;\;;\;\; Bi = \frac{h_C\, p\, L^2}{k\, S}$

Calor evacuado al exterior: $Q = (T_b - T_F)\;\eta\; A\; h_c$

Condición para el perfil óptimo: $b\, L^{3/2} = 1{,}4192 \;\Rightarrow\; Bi_{ópt} = 2{,}01419 \;;\; L_{ópt} = 0{,}75\,(\frac{k\sqrt{V}}{h_c})^{2/5} = 0{,}75\,(\frac{k\, b\sqrt{L}}{h_c})^{2/5}$

.....

Protuberancia cilíndrica



Volumen: $V = \frac{\pi\ d^2}{4}\ L$; $p = \pi\ d$; $S = \frac{\pi\ d^2}{4}$

Superficie de evacuación de calor: $A = \pi\ d\ L + \frac{\pi\ d^2}{4} \cong \pi\ d\ L$

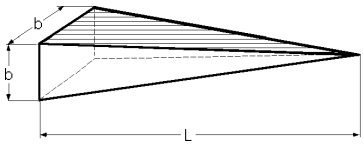
Eficiencia: $\eta = \frac{Th(\sqrt{2}\ m\ L)}{\sqrt{2}\ m\ L} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}}$; $m = \sqrt{\frac{2\ h_c}{k\ b}}$; $Bi = \frac{h_c\ p\ L^2}{k\ S}$

Calor evacuado al exterior: $Q = (T_b - T_F\ )\ \eta\ A\ h_c$

Condición para el perfil óptimo: $m\ L = 0{,}925$; $L_{ópt} = 0{,}42\ (\frac{k\sqrt{V}}{h_c}\ )^{2/5} = 0{,}328\sqrt{\frac{k\ d}{h_c}}$

.....

Protuberancia pirámide cuadrangular



Superficie de evacuación de calor: $A = 2\ b\ \frac{x^2}{L}$

Volumen: $V = \frac{b^2 L}{3}$; $\frac{S}{b^2} = (\frac{x}{L}\ )^2 \Rightarrow S = b^2\ (\frac{x}{L}\ )^2$

Ecuación diferencial: $\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{2}{x}\ \frac{d\Phi}{dx} = \frac{4\ L\ h_c}{k\ b\ x}\ \Phi = \left| m^2 = \frac{2\ h_c}{k\ b} \right| = 2\ m^2 L\ \Phi$

Distribución de temperaturas: $\Phi = \Phi_b\ \sqrt{\frac{L}{x}}\ \frac{I_1(\ 2\ m\sqrt{L\ x}\ )}{I_1(\ 2\ m\ L\ )}$

Calor evacuado: $Q = \int_0^L h_c\ dA\ \Phi = \int_0^L h_c\ \frac{4\ b\ x}{L}\ \Phi_b\ \sqrt{\frac{L}{x}}\ \frac{I_1(\ 2\ m\sqrt{L\ x}\ )}{I_1(\ 2\ m\ L\ )}\ dx = \frac{4\ h_c b\ \Phi_b}{m}\ \frac{I_2(\ 2\ m\ L\ )}{I_1(\ 2\ m\ L\ )}$

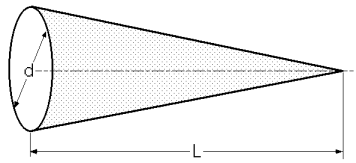
Eficiencia: $\eta = \frac{2I_2\ (2\ m\ L)}{m\ L\ I_1(2\ m\ L)}$

Calor evacuado al exterior: $Q = (T_b - T_F\ )\ \eta\ A\ h_c$

Condición para el perfil óptimo: $m\ L = 0{,}45$; $L_{ópt} = 0{,}48\ (\frac{k\sqrt{V}}{h_c}\ )^{2/5} = 0{,}318\sqrt{\frac{k\ b}{h_c}}$

.....

Protuberancia cónica



Superficie de evacuación de calor: $A = 2\ \pi\ r\ x = \left| r = \frac{d\ x}{2\ L} \right| = \frac{\pi\ d\ x^2}{L}$

Volumen: $V = \frac{\pi\ d^2 L}{12}$; $S = \frac{\pi\ d^2}{4}\ (\frac{x}{L}\ )^2$

Ecuación diferencial: $\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{2}{x}\ \frac{d\Phi}{dx} = \frac{8\ L\ h_c}{k\ d\ x}\ \Phi = \left| m^2 = \frac{2\ h_c}{k\ d} \right| = \frac{4\ m^2 L}{x}\ \Phi$

Distribución de temperaturas: $\Phi = \Phi_b\ \sqrt{\frac{L}{x}}\ \frac{I_1(\ 2\sqrt{2}\ m\sqrt{L\ x}\ )}{I_1(\ 2\sqrt{2}\ m\ L\ )}$

Calor evacuado: $Q = \int_0^L h_c \, dA \; \Phi = \int_0^L h_c \frac{2 \pi d x}{L} \Phi_b \sqrt{\frac{L}{x}} \frac{I_1(2\sqrt{2} \, m\sqrt{L x})}{I_1(2\sqrt{2} \, m L)} dx =$

$$= \frac{\pi \, h_c d \, \Phi_b}{m\sqrt{2}} \frac{I_2(2\sqrt{2} \, m L)}{I_1(2\sqrt{2} \, m L)}$$

Eficiencia: $\eta = \frac{2 I_2(2\sqrt{2} \, m L)}{\sqrt{2} \, m L \, I_1(2\sqrt{2} \, m L)}$

Calor evacuado al exterior: $Q = (T_b - T_F) \, \mu \, A \, h_c$

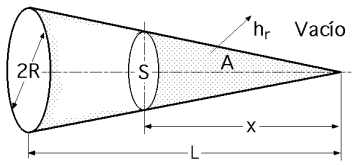
Condición para el perfil óptimo: $m L = 0{,}3535$; $L_{ópt} = 0{,}43 \left(\frac{k\sqrt{V}}{h_c} \right)^{2/5} = 0{,}25 \sqrt{\frac{k \, d}{h_c}}$

.....

Tabla IX.4.- Eficacia de protuberancias sobre superficies

m L	*Paralelepipédica, cilíndrica*	*Parabólica cóncava*	*Cónica*	*Parabólica convexa*
0,1	*0,996*	*0,995*	*0,997*	*0,996*
0,2	*0,986*	*0,991*	*0,985*	*0,997*
0,3	*0,971*	*0,98*	*0,971*	*0,968*
0,4	*0,949*	*0,966*	*0,95*	*0,931*
0,5	*0,924*	*0,949*	*0,925*	*0,908*
0,6	*0,995*	*0,93*	*0,898*	*0,957*
0,7	*0,863*	*0,909*	*0,868*	*0,822*
0,8	*0,83*	*0,887*	*0,837*	*0,793*
0,9	*0,795*	*0,955*	*0,805*	*0,756*
1	*0,761*	*0,842*	*0,775*	*0,718*
1,1	*0,727*	*0,819*	*0,745*	*0,684*
1,2	*0,694*	*0,796*	*0,716*	*0,65*
1,3	*0,662*	*0,774*	*0,698*	*0,619*
1,4	*0,632*	*0,753*	*0,661*	*0,589*
1,5	*0,603*	*0,732*	*0,635*	*9,552*
1,6	*0,576*	*0,711*	*0,612*	*0,537*
1,7	*0,55*	*0,692*	*0,59*	*0,514*
1,8	*0,526*	*0,573*	*0,569*	*0,492*
1,9	*0,503*	*0,655*	*0,548*	*0,471*
2	*0,492*	*0,639*	*0,529*	*0,452*
2,1	*0,462*	*0,621*	*0,512*	*0,435*
2,2	*0,443*	*0,605*	*0,495*	*0,418*
2,3	*0,426*	*0,59*	*0,479*	*0,403*
2,4	*0,409*	*0,575*	*0,464*	*0,389*
2,5	*0,394*	*0,561*	*0,45*	*0,375*
2,6	*0,38*	*0,548*	*0,437*	*0,363*
2,7	*0,367*	*0,535*	*0,424*	*0,351*
2,8	*0,354*	*0,523*	*0,412*	*0,34*
2,9	*0,342*	*0,511*	*0,401*	*0,33*
3	*0,331*	*0,5*	*0,39*	*0,32*
3,1	*0,321*	*0,499*	*0,38*	*0,311*
3,2	*0,311*	*0,479*	*0,371*	*0,303*
3,3	*0,302*	*0,459*	*0,361*	*0,294*
3,4	*0,293*	*0,459*	*0,353*	*0,286*
3,5	*0,285*	*0,449*	*0,344*	*0,279*

Desarrollo del método para protuberancia cónica



Ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\frac{d\Phi}{dx} - \frac{h_r}{k}\left(\frac{1}{S}\frac{dA}{dx}\right)\Phi = 0\,,\ \text{siendo: } \Phi = T - T_{exterior}$$

S es la superficie en la base a la distancia x:

$$\frac{S}{\pi R^2} = \frac{x^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad S = \pi r^2 = \frac{\pi R^2}{L^2}x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dx} = \dfrac{2\pi R^2 x}{L^2} \\ r = \text{radio superficie } S = \dfrac{R x}{L} \end{cases}$$

A es la superficie lateral de altura x: $A = \dfrac{2\pi r}{2}\sqrt{x^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \dfrac{\pi R x}{L}\sqrt{x^2 + \left(\frac{R x}{2L}\right)^2}$

y en el supuesto de conducción térmica en la dirección x:

$$A \cong \pi r x = \pi\frac{R x}{L}x = \frac{\pi R x^2}{L} \quad \Rightarrow \quad dA = \frac{2\pi R x}{L}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial se obtiene: $\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{d\Phi}{dx} - \left(\dfrac{2L h_r}{k R}\right)\dfrac{1}{x}\Phi = 0$

Haciendo: $N = \dfrac{2L h_r}{k R} = 2 m^2 L$ *ó* $m^2 = \dfrac{h_r}{k R}$ *, resulta:*

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\Phi}{dx} - \frac{N}{x}\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + 2x\dfrac{d\Phi}{dx} - N x\Phi = 0 \quad \text{ó} \\ x^2\dfrac{d^2\Phi}{dx^2} + 2x\dfrac{d\Phi}{dx} - 2m^2 L x\Phi = 0 \end{cases}$$

Solución general: $\Phi = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\{C_1 I_1(2N\sqrt{x}) + C_2 K_1(2N\sqrt{x})\} = T - T_{ext}$

Condiciones de contorno, para: $\begin{cases} x = L\ ;\ \Phi = \Phi_{base} \quad \text{ó} \quad \Phi = \Phi_{base} \\ x = 0\ ;\ \dfrac{d\Phi}{dx} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = T_{base}\ \dfrac{\sqrt{L}}{I_1(2N\sqrt{L})} \end{cases}$

Distribución de temperaturas: $T = T_{base}\sqrt{\frac{L}{x}}\ \frac{I_1(2N\sqrt{x})}{I_1(2N\sqrt{L})}$

Calor evacuado: $Q = \pi h_r d\int_0^L \frac{x}{L}\sqrt{\frac{L}{x}}\ \frac{I_1(2N\sqrt{x})}{I_1(2N\sqrt{L})}T_{base}\,dx = \pi h_r d\ \frac{\sqrt{L}}{N}\ \frac{I_2(2N\sqrt{L})}{I_1(2N\sqrt{L})}T_{base} =$

$$= \left\{ \text{sustituyendo } N \right\} = \frac{\pi h_r d}{\sqrt{2}}\ \frac{I_2(2\sqrt{2}\sqrt{L})}{m I_1(2\sqrt{2}\, m L)}T_{base}$$

El valor de h_r es el coeficiente de radiación; estos valores son:

Si las temperaturas medias $\hat{T}_{pF}$ y $T_{ext} = T_{vacío}$ no difieren demasiado entre sí, se puede poner:

$$q = \sigma A \varepsilon_1(\hat{T}_{pF}^4 - T_{ext}^4) = \sigma A \varepsilon_1 (T_{pF}^2 + T_{ext}^2)(\hat{T}_{pF} + T_{ext})(\hat{T}_{pF} - T_{ext}) = \left| T_m = \frac{\hat{T}_{pF} + T_{ext}}{2} \right| =$$

$$= \sigma A \varepsilon_1 4 T_m^3 (\hat{T}_{pF} - T_{ext}) = A_1 h_r (\hat{T}_{pF} - T_{ext})\,,\ \text{siendo: } \begin{cases} \varepsilon_1 \text{ la emisividad de la superficie} \\ h_r = 4\sigma\varepsilon_1 T_m^3 \end{cases}$$

El problema está en hallar $T_{pF} = T_{media\ pared}$

Caso general:

La conductividad térmica unitaria de la radiación h_r se define mediante la expresión:

$$h_r = \frac{1}{R_r\ A} = \frac{\sigma\ F_{pared\text{-}vacío}\ (\hat{T}^4_{pF} - T^4_{vacío})}{\hat{T}_{pF} - T_{vacío}} = \sigma\ F_{pared\text{-}vacío}\ (\hat{T}^2_{pF} + T^2_{vacío})\ (\hat{T}_{pF} + T_{vacío})$$

En este caso, el factor de Forma F valdría la unidad

Nota: el calor eliminado al exterior puede ser en cualquier forma; en este caso es radiación, pudiéndose utilizar la formulación general de aletas y protuberancias cambiando h_C *por* h_r.

IX.11.- COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSMISIÓN DE CALOR PARA EL CASO PARTICULAR DE ALETAS REFRIGERADAS POR AIRE

En la ecuación básica $Q = U\ A\ \Delta T$ común a cualquier tipo de intercambiador de calor, el valor de Q normalmente se conoce, mientras que la superficie de intercambio térmico A es desconocida.

El coeficiente global de transmisión de calor U es función de:

- *La resistencia térmica de la capa límite del fluido que circula por el interior de los tubos*
- *La conductividad térmica del material del tubo y aletas*
- *La resistencia térmica de la capa límite en la parte del tubo más las aletas en contacto con el aire*

La primera de estas resistencias se determina mediante las ecuaciones clásicas conocidas, dependiendo de la naturaleza del flujo, mientras que la contribución de la suciedad depende del tipo de fluido que se esté experimentando.

El coeficiente de película a través de las aletas se puede determinar mediante la fórmula de Joung de la forma:

$$Nu = 0{,}134\ Re^{0{,}681} Pr^{0{,}33}\ (FH)^{0{,}20}\ (FT)^{0{,}1134}\ ,\ en\ la\ que:\ \begin{cases} (FH) = \dfrac{Espaciado\ entre\ aletas}{Longitud\ de\ la\ aleta} \\ (FT) = \dfrac{Espaciado\ entre\ aletas}{Espesor\ de\ la\ aleta} \end{cases}$$

El coeficiente de transmisión de calor h_C así obtenido se modifica mediante un elemento corrector, en el que están comprendidos el rendimiento de la aleta η, la superficie exterior del tubo A_t, la de la aleta A_a y la total A.

$$El\ valor\ medio:\ \hat{h}_C = \frac{h_C\ (\eta\ A_a + A_t)}{A}$$

El área total disponible, puede ser del orden de 20 a 30 veces la del tubo.

Si llamamos T_1 y T_2 las temperaturas de entrada y salida del fluido que circula por el interior de la tubería, y T_{F_1} y T_{F_2} las temperaturas inicial y final del aire, de las que sólo se conoce T_{F_1} , la

temperatura T_{F_2} se calcula, con U expresado en W/m²ºC, en la forma:

$$T_{F_2} = T_{F_1} + \frac{Q}{G_{aire}\ c_{p\,(aire)}} = T_{F_1} + \frac{Q}{G_F\ c_{pF)}}\ ,\ \acute{o}\ ,\ T_{F_2} = T_{F_1} + 0{,}0009\ U\ (\frac{T_1 + T_2}{2}\ - T_{F_1}\ )\ (Brown)$$

Tabla IX.5.- Coeficientes de transferencia de calor típicos para el aire de refrigeración

LÍQUIDOS	*U(W/m²ºC)*	*VAPORES*	*U(W/m²ºC)*		
Temp. media	*55-90*	*Vapor (x = 1)*		*810*	
Temp. media	*74-125*	*Vapor (x = 0,9)*		*600*	
Temp. media	*170-230*	*Vapor (x = 0,6)*		*415*	
Temp. media	*140-200*	*Hidrocarburos ligeros*		*425*	
		Hidrocarburos medios		*270*	
Temp. media	*285-345*	*Amoníaco*		*600*	
Temp. media	*315-370*	*Presión*			
Temp. media	*340-400*	*GASES*	*0,7 atm*	*7 atm*	*35 atm*
Gasóleo	*255-315*	*Vapor*	*70*	*155*	*325*
Queroseno	*315-340*	*Hidrocarburos*	*100*	*270*	*410*
Nafta	*330-400*	*Aire*	*50*	*155*	*270*
Hidrocarburos ligeros	*400-450*	*Amoníaco*	*70*	*185*	*300*
Agua	*685-800*	*Hidrógeno*	*145*	*385*	*555*