X.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

CAPA LIMITE TÉRMICA E HIDRODINÁMICA

pfernandezdiez.es

X.1.- INTRODUCCIÓN

Antes de entrar en la metodología que permite determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección h_C, examinaremos con cierto detalle el proceso y fenomenología de la convección, así como su relación con el movimiento del fluido.

Si a título de ejemplo se supone una placa plana sobre la que fluye una corriente fluida, lo primero que se observa es que la velocidad del fluido disminuye a medida que nos aproximamos hacia la superficie de la misma, como consecuencia de las fuerzas de viscosidad.

Como la velocidad de la capa de fluido en contacto con la pared es cero, $u_{pF} = 0$, la transferencia de calor entre la superficie y esta capa de fluido está originada únicamente por conducción, por lo que:

$$q_C = - k_F \left.\frac{dT}{dy}\right\rangle_{y=0} = h_C \, (T_{pF} - T_F \,)$$

y aunque ésto sugiere que el proceso térmico pudiera considerarse como de conducción, lo cierto es que el gradiente de temperaturas en la superficie $\left.\frac{dT}{dy}\right\rangle_{y=0}$ viene determinado por la velocidad a que puede ser transportada la energía por el fluido más alejado de la pared hacia el interior de la corriente principal, por lo que el gradiente de temperaturas en la superficie del sólido depende del campo de flujo, de forma que las velocidades más elevadas son las que originan mayores gradientes de temperatura y mayores velocidades de transferencia de calor.

No obstante, hay que tener presente la conductividad térmica k_F del fluido que está intervi-

niendo directamente; para el caso del agua, el valor del coeficiente k_F es de un orden de magnitud mayor que el del aire, lo que implica el que el coeficiente de transferencia térmica por convección sea también mayor en el caso del agua, que en el caso del aire.

La situación es muy parecida cuando se estudia la convección libre; la diferencia principal radica en que en el caso de la convección forzada, la velocidad tiende hacia el valor de la corriente sin perturbar impuesta por una fuerza exterior, mientras que en la convección libre la velocidad crece al principio, a medida que va aumentando la distancia desde el plano, debido a que el efecto de la viscosidad disminuye más rápidamente que la variación de densidades, que lo hace más lentamente; sin embargo, la fuerza ascensional disminuye cuando la densidad del fluido se acerca al valor de la del fluido que lo rodea; ésta es la causa de que la velocidad alcance un valor máximo y tienda a cero bastante lejos de la superficie caliente.

La distribución de temperaturas en la convección forzada y libre tienen formas análogas y en ambos casos el mecanismo de transferencia de calor en la interfase (fluido/sólido) es la conducción.

El coeficiente de transferencia de calor por convección h_C depende, en general, de algunas propiedades inherentes al flujo del fluido, como son su densidad, viscosidad y velocidad, y de sus propiedades térmicas (conductividad y calor específico):

$$h_C = f(\rho, \eta, u, k_F, c_p)$$

Mientras que en la convección forzada la velocidad del fluido viene impuesta normalmente por la acción de una bomba o un ventilador, y puede especificarse directamente, en la convección libre la velocidad depende de una serie de factores como son:

- La diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido, $T_{pF} - T_F$

- El coeficiente de dilatación térmica del fluido β *(que determina la variación de su densidad por unidad de diferencia de temperaturas), por cuanto:*

$$v = v_F \{1 + \beta (T - T_F)\} \quad ; \quad \frac{\rho_F}{\rho} = 1 + \beta (T - T_F)$$

- El campo de fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema que, en la mayoría de las situaciones, se reduce únicamente al campo gravitatorio g.

Para adquirir una cierta comprensión del significado de los parámetros que intervienen en la convección forzada, se puede examinar con mayor detalle el campo de fuerzas; así, para una placa plana inmersa en una corriente fluida, el flujo a diversas distancias del borde de ataque de la placa se desarrolla en una región en la que las fuerzas de viscosidad frenan al fluido, disminuyendo su velocidad.

Las fuerzas de viscosidad dependen de la tensión de corte $\tau = \eta \frac{du}{dy}$

La región del flujo próxima a la placa, en donde la velocidad del fluido se ve frenada por las fuerzas de viscosidad, se denomina capa límite, siendo su espesor δ igual a la distancia existente entre la placa y la región del fluido donde éste tiene una velocidad igual al 99% de la correspondiente a la corriente libre; la región de fluido que se encuentra más allá de esta región se denomina régimen de flujo potencial o régimen no perturbado.

Inicialmente el flujo de un fluido dentro de la capa límite es completamente laminar; el espesor de la capa límite va creciendo a medida que aumenta la distancia respecto al borde de ataque, llegándose así a que a una cierta distancia x_C el efecto de la fuerzas de inercia llega a ser lo suficientemente importante, en comparación con la acción amortiguadora de la viscosidad, que en el flujo empiezan a aparecer y a crecer pequeñas perturbaciones; a esta distancia se la conoce como *distancia crítica*.

Cuando comienzan a amplificarse estas perturbaciones, la regularidad del flujo viscoso se ve alterada y tiene lugar una transición, de forma que el flujo pasa de laminar a turbulento. En la región del flujo turbulento, las partículas de fluido se mueven a través de líneas de corriente que transportan con más o menos violencia tanto la energía térmica, como la cantidad de movimiento.

El coeficiente de transferencia de calor por convección h_C varía con la posición, respecto al borde de entrada para una placa plana o desde la entrada de un tubo o conducto cerrado.

El parámetro que describe la variación espacial es el coeficiente de transferencia de calor local h_{Cx}, siendo x la distancia que hay desde el borde de ataque de la placa o entrada del tubo a la sección considerada.

Si se desea calcular en el intervalo $(0 \le x \le L)$ el coeficiente medio de transferencia térmica por convección h_C, hay que conocer el coeficiente de transferencia de calor local h_{Cx}, siendo la relación existente entre ellos de la forma:

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx}\, dx = 2\, h_{Cx} \rangle_{x=L}$$

en la que L es la longitud de la placa o del tubo considerada.

X.2.- ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA TRANSMISIÓN DE CALOR EN UN MEDIO EN MOVIMIENTO

Cuando se hace el estudio de la convección forzada hay que tener en cuenta que los fenómenos que influyen en ella son, un transporte de materia y la conductividad térmica. Para su comprensión vamos a considerar un paralelepípedo de fluido elemental, de volumen unidad, Fig X.1, de dimensiones *dx, dy, dz,* teniendo en cuenta que en el proceso intervienen tanto la temperatura T_F como la velocidad $V_F = V(u,v,w)$ del fluido, y que el calor producido por rozamiento interno es despreciable.

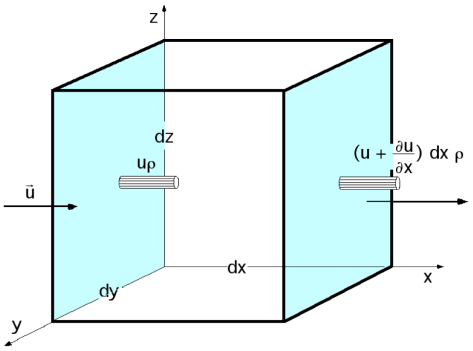


Fig X.1.- Paralelepípedo elemental de fluido

Mediante un balance de energía se obtiene:

Calor que penetra según Ox en la unidad de tiempo debido a la velocidad:

$Q_{1x} = m\, c_F\ T = (\rho\ u\ dy\ dz)\, c_F\ T = \rho\ (u\ T)\, c_F\ dy\ dz$

Calor disipado según Ox: $Q_{2x} = \rho\ c_F\ (u\ T + \dfrac{\partial (u\,T)}{\partial x}\ dx)\ dy\ dz$

habiendo reagrupado u y T porque ambas intervienen en el interior del paralelepípedo elemental.

El calor que se almacena en el paralelepípedo según Ox, en la unidad de tiempo, debido a las masas entrantes y salientes es:

$$Q_{1x} - Q_{2x} = -\ \rho\ c_F\ \frac{\partial (u\,T)}{\partial x}\ dx\ dy\ dz$$

Teniendo en cuenta el conjunto de las tres direcciones, se obtiene la expresión del *calor total almacenado dentro del paralelepípedo elemental, debido a las variaciones de velocidades y temperaturas de las masas de fluido circulante:*

$$Q_1 - Q_2 = -\ \rho\ c_F\ dx\ dy\ dz\ \{\frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{\partial (vT)}{\partial y} + \frac{\partial (wT)}{\partial z}\} =$$

$$= -\ \rho\ c_F\ dx\ dy\ dz\ \{u\ \frac{\partial T}{\partial x} + v\ \frac{\partial T}{\partial y} + w\ \frac{\partial T}{\partial z} + T\,(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})\} =$$

$$= -\ \rho\ c_F\ dx\ dy\ dz\ \{u\ \frac{\partial T}{\partial x} + v\ \frac{\partial T}{\partial y} + w\ \frac{\partial T}{\partial z} + T\ div\ \vec{V}\}$$

El calor que se almacena en el volumen elemental debido a la conducción en la unidad de tiempo, según el eje Ox, es:

$$Q^*_{1x} = -\ k\ (dy\ dz)\ \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$Q^*_{2x} = Q^*_{1x} + \frac{\partial Q^*_{1x}}{\partial x}\ dx = -\ k\ \frac{\partial}{\partial x}(T + \frac{\partial T}{\partial x}\ dx)\ dy\ dz = -\ k\ (\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ dx)\ dy\ dz$$

luego en la dirección Ox se tiene:

$$Q^*_{1x} - Q^*_{2x} = k\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ dx\ dy\ dz$$

Sumando los calores almacenados por conducción en las tres direcciones y en la unidad de tiempo, se obtiene:

$$Q^*_1 - Q^*_2 = k\,(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2})\ dx\ dy\ dz = k\ (\nabla^2 T)\ dx\ dy\ dz$$

Finalmente, el calor total almacenado en el elemento de volumen considerado en el tiempo dt, será el mismo que la suma de los calores almacenados, anteriormente deducidos:

$$\textit{En el tiempo } t: \; Q_t = \rho \; dx \; dy \; dz \; c_F \; T$$

$$\textit{En el tiempo } t + dt: \; Q_{t+dt} = \rho \; dx \; dy \; dz \; c_F \; (T + \frac{\partial T}{\partial t} \; dt)$$

por lo que el calor almacenado en dt es:

$$Q_{t+dt} - Q_t = \rho \; dx \; dy \; dz \; c_F \frac{\partial T}{\partial t} \; dt$$

El balance térmico es de la forma:

$$k \; (\nabla^2 T) \; dx \; dy \; dz - \rho \; c_F \; dx \; dy \; dz \; (u \; \frac{\partial T}{\partial x} + v \; \frac{\partial T}{\partial y} + w \; \frac{\partial T}{\partial z} + T \; div \; \vec{V}) = \rho \; dx \; dy \; dz \; c_F \frac{\partial T}{\partial t} \; dt$$

$$\alpha \; (\nabla^2 T) - (u \; \frac{\partial T}{\partial x} + v \; \frac{\partial T}{\partial y} + w \; \frac{\partial T}{\partial z} + T \; div \; \vec{V}) = \frac{\partial T}{\partial t} \; dt$$

Si se considera $\begin{cases} \textit{fluido incompresible: } div \; \vec{V} = 0 \\ \textit{régimen permanente, tanto térmico como dinámico: } \frac{\partial T}{\partial t} \; dt = 0 \end{cases}$, se obtiene:

$$\alpha \; (\nabla^2 T) = u \; \frac{\partial T}{\partial x} + v \; \frac{\partial T}{\partial y} + w \; \frac{\partial T}{\partial z}$$

que es una ecuación diferencial con 4 incógnitas T, u, v, w, por lo que serán necesarias otras 3 ecuaciones, que son las de *Navier-Stokes,* de la forma:

$$\frac{1}{\rho} \; \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \nu \; \Delta u + \frac{1}{3} \; \nu \; \frac{\partial}{\partial x} \; div \; \vec{V}$$

$$\frac{1}{\rho} \; \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt} + \nu \; \Delta v + \frac{1}{3} \; \nu \; \frac{\partial}{\partial y} \; div \; \vec{V}$$

$$\frac{1}{\rho} \; \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt} + \nu \; \Delta w + \frac{1}{3} \; \nu \; \frac{\partial}{\partial z} \; div \; \vec{V}$$

completándose así el sistema de ecuaciones que rige el fenómeno termohidrodinámico.

En las ecuaciones de Navier-Stokes, las componentes (X,Y,Z) de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema elemental de fluido, quedan reducidas para fluidos pesados a:

$$X = 0 \; ; \; Y = 0 \; ; \; Z = g$$

pudiéndose poner para la tercera ecuación de Navier-Stokes,

$$\rho \; Z = \rho \; g$$

para el caso en que T permanezca constante.

A su vez, como el fluido al calentarse o enfriarse modifica su densidad, en el intervalo de temperaturas T_0 y T, se tiene:

$$g\,(\rho_0 - \rho) = \rho\, g\,(\frac{\rho_0}{\rho} - 1) = \left| v = v_0\ \{1 + \beta\ (T - T_0)\}\ \ ;\ \ \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \beta\ (T - T_0) \right| = \rho\, g\, \beta\ (T - T_0) = \rho\, g\, \beta\ \Delta T$$

siendo ρ_0 la densidad del fluido a la temperatura T_0 y v el volumen específico del fluido.

La tercera ecuación de Navier-Stokes queda en la forma:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p}{\partial z} = g\ \beta\ \Delta T\ -\ \frac{dw}{dt} + \nu\ \nabla^2 w$$

X.3.- CAPA LIMITE LAMINAR EN FLUJO SOBRE PLACA PLANA

En el movimiento de fluidos sobre una placa plana, la Hidrodinámica clásica se limita a imponer, como condición de contorno, la tangencia del vector velocidad, mientras que la Mecánica de Fluidos viscosos exige la condición adicional de adherencia al contorno de la placa, que es mucho más restrictiva que la de tangencia. En los fluidos poco viscosos, los esfuerzos tangenciales son, con frecuencia, muy inferiores a los de inercia o a los de gravedad, pero ésto no autoriza a prescindir de los esfuerzos viscosos, que pueden llegar a ejercer una influencia considerable sobre la configuración del movimiento.

Prandtl, en 1904, propone que el estudio del movimiento de un fluido de viscosidad pequeña, se podía asimilar al de un fluido perfecto, salvo en una capa próxima al contorno, de espesor δ, en la que concentraba los fenómenos de fricción, y que llamó *capa límite*; en el exterior de dicha capa, las tensiones tangenciales se desprecian, predominando las fuerzas de inercia sobre las de viscosidad, mientras que en el interior de la capa límite la proximidad del contorno hace que el gradiente de velocidades sea muy grande y, por lo tanto, la tensión tangencial $\tau = \eta\ \frac{du}{dy}$ será también muy grande; en esta situación las fuerzas de fricción son del mismo orden de magnitud que las fuerzas de inercia.

El espesor δ *de la capa límite* puede estar comprendido entre unas pocas moléculas y algunos milímetros, según los casos; fuera de la capa límite se pueden utilizar las ecuaciones de Euler o métodos experimentales basados en las líneas y redes de corriente que, una vez configuradas alrededor del contorno o perfil deseado, permiten obtener el campo de velocidades y la distribución de presiones correspondiente.

En el estudio de la capa límite hay que tener presentes las siguientes consideraciones:

- Aunque la perturbación producida por la fricción se propaga a todo el fluido, se admite que la propagación queda limitada a una zona del mismo de espesor finito δ*, en sentido normal al contorno.*

- La forma de la curva de distribución de velocidades en las distintas secciones a lo largo de la capa límite, se puede expresar, en general, mediante las siguientes ecuaciones, Fig X.2:

$$\textit{Régimen laminar:}\ \ \frac{u}{V_0} = C + C_1\,(\frac{y}{\delta}) + C_2\,(\frac{y}{\delta})^2 + C_3\,(\frac{y}{\delta})^3 \ldots$$

Régimen turbulento: $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{d}}$

en las que V_0 es la velocidad uniforme del fluido no perturbado; la capa límite en su desarrollo longitudinal, muestra una tendencia progresiva al ensanchamiento, Fig VII 2.b.

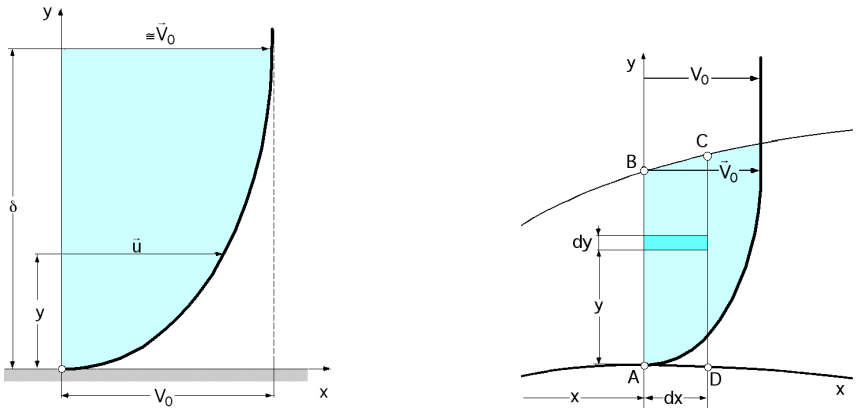


Fig X.2.a.b.- Capa límite

Polinomio de segundo grado: $\frac{u}{V_0} = C + C_1(\frac{y}{\delta}) + C_2(\frac{y}{\delta})^2$

con las condiciones, para: $\begin{cases} y = 0\ ;\ u = 0 \ \Rightarrow\ C = 0 \\ y = \delta\ ;\ u = V_0 \ \Rightarrow\ C_1 + C_2 = 1 \\ y = \delta\ ;\ (\partial u / \partial y)_{y=\delta} = 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{V_0}\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=\delta} = (\frac{C_1}{\delta} + \frac{2\,C_2\ y}{\delta^2})_{y=\delta} = \frac{C_1}{\delta} + \frac{2\,C_2}{\delta} = 0\ ;\ C_1 + 2\,C_2 = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2\,C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ C_1 = 2\ ;\ C_2 = -1$$

y la forma del perfil de la distribución de velocidades de la capa límite en régimen laminar, (polinomio de segundo grado) es:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2\,y}{\delta} - (\frac{y}{\delta})^2$$

Polinomio de tercer grado: $\frac{u}{V_0} = C + C_1(\frac{y}{\delta}) + C_2(\frac{y}{\delta})^2 + C_3(\frac{y}{\delta})^3$

con las condiciones, para $\begin{cases} y = 0,\ u = 0 \ \Rightarrow\ C = 0 \\ y = \delta\ ,\ u = V_0 \ \Rightarrow\ C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ y = \delta\ ,\ (\partial u / \partial y)_{y=\delta} = 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{V_0}\ \frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=\delta} = \{\frac{C_1}{\delta} + \frac{2\,C_2}{\delta}(\frac{y}{\delta}) + \frac{3\,C_3 y}{\delta}(\frac{y}{\delta})^2\}_{y=\delta} = 0\quad ;\quad C_1 + 2\,C_2 + 3\,C_3 = 0$$

$$\text{Para: } y = 0\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rangle_{y=0} = 0\ \ ;\ \ \frac{1}{V_0}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rangle_{y=0} = \{0 + \frac{2\,C_2}{\delta^2} + \frac{6\,C_3}{\delta^2}(\frac{y}{\delta})\}_{y=0} = 0 \Rightarrow\ C_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ C_1 + 2\,C_2 + 3\,C_3 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{3}{2} \;\; ; \;\; C_2 = 0 \;\; ; \;\; C_3 = -\frac{1}{2}$$

y la forma del perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, (polinomio de tercer grado), es:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3\,y}{2\,\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

La experiencia ha permitido comprobar para placa plana, que el movimiento laminar en la capa límite llega a hacerse inestable cuando se sobrepasa un valor crítico del nº de $Re_c = \frac{V_0\;x_C}{\nu}$ siendo x_C la distancia a partir del borde de ataque de la placa.

La capa límite continua su desarrollo, como se muestra en la Fig X.3; a partir de x_C se origina la capa límite turbulenta, que se divide en dos subcapas, una de las cuales, en las proximidades de la placa, permite definir una delgada subcapa marcadamente laminar.

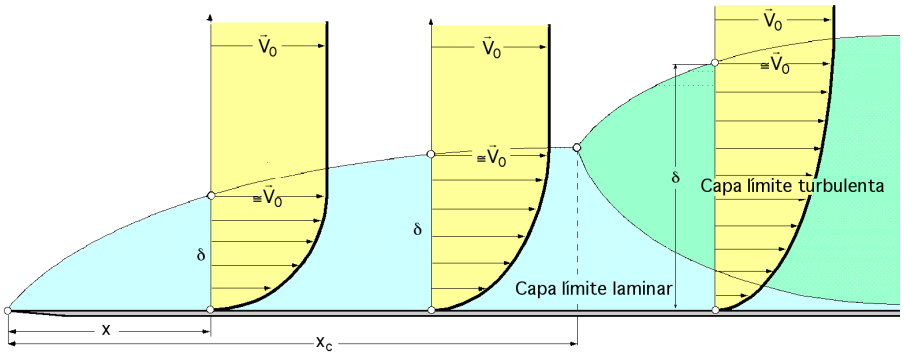


Fig X.3.- Desarrollo de la capa límite laminar

Los valores críticos del número de Reynolds que definen la transición para *placa plana*, son:

$$Re_{lam.} < 5.10^5 \quad ; \quad Re_{turb.} > 3.10^6$$

Para fluidos que circulan entre dos paredes próximas, el ensanchamiento progresivo de la capa límite de cada contorno determina que éstas se unan, a una cierta distancia de la entrada, desapareciendo la zona en que el movimiento podía ser asimilable a un fluido perfecto, para realizarse todo él bien en régimen laminar, o bien en régimen turbulento, según el valor del número de Re.

En tuberías sólo se puede considerar el movimiento como irrotacional en las proximidades de la embocadura; con flujo totalmente desarrollado, no.

ESPESOR Y CAUDALES DE LA CAPA LIMITE.- Mediante el concepto de capa límite es posible concentrar en un espesor δ los fenómenos de fricción; ello implica el que se tengan que cumplir las siguientes condiciones:

- El valor de la velocidad $\vec{u}$ *correspondiente a,* $y = \delta$ *, tiene que estar muy próximo a* $\vec{V}_0$ *pues entonces el gradiente de velocidades será despreciable; suele tomarse:* $u = 0{,}99\ V_0$

- El esfuerzo de fricción evaluado en la zona de espesor δ*, (a lo largo del contorno), mediante la ecuación de la cantidad de movimiento, tiene que coincidir con el obtenido:*

- Analíticamente para la capa límite laminar

- Experimentalmente en la capa límite turbulenta

En ambas situaciones la distribución de velocidades viene dada, para el régimen laminar, por polinomios de grado m (parábolas de segundo o tercer grado en general) y para el régimen turbulento por polinomios de grado $\frac{1}{m}$.

ESPESOR DE DESPLAZAMIENTO DE LA CAPA LÍMITE.- El espesor de desplazamiento de la capa límite δ_1 está basado en la conservación del caudal a lo largo de la normal al contorno, mediante la equivalencia de las áreas rayadas, como se indica en la Fig X.4.

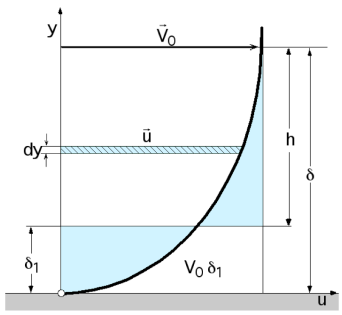


Fig X.4
Espesor de desplazamiento de la capa límite

Si se admite que la ley de velocidades es asintótica a $\vec{V}_0$ se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0}\int_0^{\infty}(V_0 - u)\ dy$$

y si la ley de distribución de velocidades alcanza el valor $\vec{V}_0$ para el espesor δ se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0}\int_0^{\delta}(V_0 - u)\,dy = \int_0^{\delta}\left(1 - \frac{u}{V_0}\right)dy = \delta - \int_0^{\delta}\frac{u}{V_0}\,dy = \delta - \frac{q}{V_0}$$

que se puede interpretar como la diferencia entre el espesor δ y el espesor δ_1 de una corriente que tuviese la misma velocidad $\vec{V}_0$ que la corriente exterior y que transportase la misma masa de fluido, caudal q, que la capa límite real.

$$\text{Con: } \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \quad \xrightarrow{\text{Se obtiene}} \quad \delta_1 = \delta - \int_0^{\delta}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} dy = \delta - \frac{1}{\delta^{1/m}}\int_0^{\delta} y^{1/m}\,dy = \frac{\delta}{m+1}$$

ESPESOR DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE LA CAPA LÍMITE.- El espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 se corresponde con el espesor de una corriente fluida que tenga la misma velocidad V_0 que la corriente exterior, y la misma variación de la cantidad de movimiento que la debida a la fuerza de arrastre de la capa límite real; se define en la forma:

$$\delta_2 = \frac{1}{V_0^2}\int_0^{\delta} u\,(V_0 - u)\ dy = \int_0^{\delta}\frac{u}{V_0}\left(1 - \frac{u}{V_0}\right)dy$$

Para:

$$\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} \right\} dy = \frac{1}{\delta^{2/m}} \int_0^{\delta} y^{1/m} \left(\delta^{1/m} - y^{1/m}\right) dy = \delta \; \frac{m}{(m+1)(m+2)}$$

La relación entre el espesor de desplazamiento δ_1 y el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 se denomina Factor de forma del perfil F; para una placa plana, en función de m se tiene:

$$F = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\delta \; \dfrac{1}{(m+1)}}{\delta \; \dfrac{m}{(m+1)(m+2)}} = \frac{m+2}{m}$$

Un valor elevado del factor de forma del perfil implica que está próximo a producirse el desprendimiento de la capa límite.

ESPESOR DE ENERGÍA DE LA CAPA LÍMITE.- El espesor de energía de la capa límite d_3 se define en la forma:

$$\delta_3 = \frac{1}{V_0^3} \int_0^{\delta} u \left(V_0^2 - u^2\right) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u^2}{V_0^2}\right) dy$$

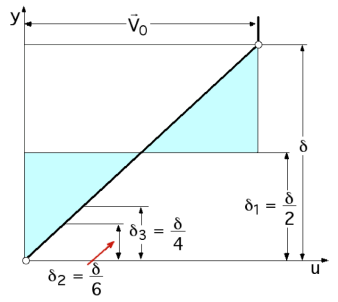


Fig X.5.- Espesores de la capa límite en distribución triangular

$$Para: \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \Rightarrow \delta_3 = \int_0^{d} \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \left\{ 1 - \sqrt[m]{\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \right\} dy = \delta \; \frac{2\,m}{(m+1)(m+2)}$$

Para hacernos una idea del orden de magnitud y del significado, de los diversos espesores de la capa límite así definidos, indicamos en la Fig X.5, para el caso particular de una distribución de velocidades triangular *(m = 1)* el orden de magnitud de los mismos, de la forma:

$$\delta_1 = \frac{\delta}{2} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{\delta}{6} \quad ; \quad \delta_3 = \frac{\delta}{4}$$

CAUDAL DE LA CAPA LÍMITE.- El caudal a través de la capa límite es:

$$q = \int_0^{\delta} u \; dy$$

Teniendo en cuenta el espesor de desplazamiento δ_1, resulta:

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} dy - \int_0^{\delta} \frac{u \; dy}{V_0} = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u \; dy}{V_0} \quad \Rightarrow \quad \delta - \delta_1 = \int_0^{\delta} \frac{u \; dy}{V_0} = \frac{q}{V_0} \quad \Rightarrow \quad q = V_0 (\delta - \delta_1) = V_0 \; \delta \; \frac{m}{m+1}$$

CAUDAL DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE LA CAPA LÍMITE.- El caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite q_M se define en la forma:

Teniendo en cuenta la expresión del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 se obtiene:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \{ 1 - \frac{u}{V_0} \} dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} dy - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} dy = \delta - \delta_1 - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} dy$$

$$\int_0^{\delta} u^2 dy = (\delta - \delta_1 - \delta_2) V_0^2$$

quedando la expresión del caudal de la cantidad de movimiento en la forma:

$$q_M = \int_0^{d} \rho u^2 dy = \rho (\delta - \delta_1 - \delta_2) V_0^2 = \rho \delta V_0^2 \frac{m}{m+2}$$

función del espesor δ de la capa límite, del espesor de desplazamiento δ_1 y del espesor de la cantidad de movimiento δ_2.

X.4.- ECUACIÓN INTEGRAL DEL IMPULSO DE LA CAPA LIMITE

CAUDAL DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.- Como consecuencia de la viscosidad del fluido y de su deformación, aparece un esfuerzo tangencial sobre el contorno de la placa que determina lo que se conoce como *Resistencia de Superficie o de Forma.*

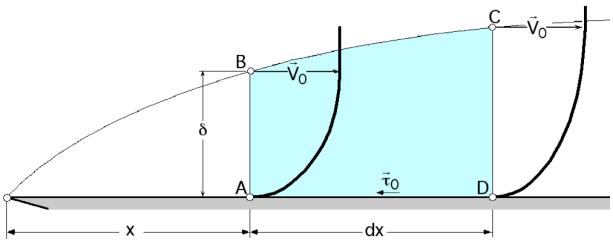


Fig X.6.- Volumen de fluido en la capa límite

Para calcular este esfuerzo se aplica el Teorema de la Cantidad de movimiento al volumen de fluido comprendido en el interior de la capa límite entre las secciones (AB) y (DC) de la Fig X.6.

Como el movimiento irrotacional exterior a la capa límite es uniforme, no existe gradiente de presiones y, al expresar el equilibrio, la única fuerza actuante es la de arrastre sobre la placa, de la forma $(\tau_0 \, dx)$.

Para una anchura de placa unidad, el caudal de la cantidad de movimiento se evalúa como sigue:

- Sobre la cara (AB) el caudal de la cantidad de movimiento entrante es:

$$q_{M(AB)} = m\, u = V \rho\, u = q \rho\, u = \int_0^{\delta} \rho\, u^2\, dy = q_M$$

- Sobre la cara (CD) el caudal de la cantidad de movimiento saliente es:

$$q_{M(CD)} = q_M + \frac{\partial q_M}{\partial x} dx = q_M + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} u^2\, dy \right) dx$$

por lo que en el volumen de control (ABCD) se tiene una variación del caudal de la cantidad de movimiento $(q_{M(AB)} - q_{M(CD)})$ en la forma:

$$\frac{\partial q_M}{\partial x} dx = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta} u^2\, dy \right) dx$$

- Sobre el contorno (BC) no existe ningún tipo de esfuerzo cortante porque está fuera de la capa límite $\frac{du}{dy} = 0$; teniendo en cuenta que sobre este contorno la velocidad es V_0, el caudal de la cantidad de movimiento entrante por (BC) se obtiene en la forma:

$$\left.\begin{aligned} q_{M(B)} &= m\, V_0 = q\, \rho\, V_0 = \rho\, V_0 \int_0^\delta u\, dy \\ q_{M(C)} &= q_{M(B)} + \frac{\partial q_{M(B)}}{\partial x}\, dx = q_{M(B)} + \rho\, V_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u\, dy \right) dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q_{M(BC)} = \rho\, V_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta u\, dy \right) dx$$

Sobre el contorno (AD) de contacto con la placa no hay caudal saliente de la cantidad de movimiento.

FUERZA DE ARRASTRE.- Igualando el caudal de la cantidad de movimiento con la fuerza de arrastre F_a sobre la placa en dx, y aplicando el Teorema del Impulso se obtiene:

$$\tau_0\, dx = -\, r\, \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (u^2\, dy)\, dx + V_0\, \rho\, \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (u\, dy)\, dx = \rho\, \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^\delta u\, (V_0 - u)\, dy \}\, dx$$

$$F_a = \int \tau_0\, dx = \rho \int_0^\delta u\, (V_0 - u)\, dy = \rho\, V_0^2\, \delta_2 = \frac{C_w\, x\, \rho\, V_0^2}{2}$$

$$\tau_0 = \eta\, \frac{\partial u}{\partial y}\Big\rangle_{y=0} = \rho\, \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^\delta u\, (V_0 - u)\, dy \} \quad ; \quad \nu\, \frac{\partial u}{\partial y}\Big\rangle_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^\delta u\, (V_0 - u)\, dy \}$$

$$\tau_0 = \frac{C_w\, \rho\, V_0^2}{2}$$

en la que $\delta_2 = \frac{C_w x}{2}$ *se deduce comparándola con la obtenida por análisis dimensional; los valores de* C_w *se obtienen mediante formulación, ábacos y tablas.*

a) Para una distribución de velocidades de la capa límite laminar de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2\, y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

con:

$$\tau_0 = \eta\, \frac{\partial u}{\partial y}\Big\rangle_{y=0} = \rho\, \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^\delta u\, (V_0 - u)\, dy \} = \rho\, V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \}$$

se obtiene:

$$\nu\, \frac{\partial u}{\partial y}\Big\rangle_{y=0} = V_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^\delta \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \}$$

$$\frac{1}{V_0}\, \frac{\partial u}{\partial y}\Big\rangle_{y=0} = \frac{2}{\delta} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big\rangle_{y=0} = \frac{2\, V_0}{\delta}$$

$$\frac{2\,V_0\,\nu}{\delta} = V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\{\int_0^\delta \frac{u}{V_0}\,(1-\frac{u}{V_0})\,dy\} = V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,[\int_0^\delta \{\frac{2\,y}{\delta} - (\frac{y}{\delta})^2\}\,\{1-\frac{2\,y}{\delta}+(\frac{y}{\delta})^2\}]\,dy =$$

$$= V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,(2-\frac{5}{3}-\frac{1}{5})\,\delta = \frac{2}{15}\,V_0^2\,\frac{\partial \delta}{\partial x}$$

$$\frac{15\,\nu}{V_0}\,dx = \delta\,d\delta \;\;;\;\; \frac{15\,\nu}{V_0}\,x = \frac{\delta^2}{2} + C \;\;;\;\; \delta^2 = \frac{30\,x^2}{Re_x} \;\;;\;\; \frac{\delta}{x} = \frac{5{,}477}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha tenido en cuenta que para: $\begin{cases}\delta = 0\\ x = 0\end{cases} \Rightarrow C = 0$

Los valores de los coeficientes C_x (local) y C_w (medio), son:

$$\tau_0 = \eta\,\frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = C_x\,\rho\,\frac{V_0^2}{2} = \eta\,\frac{2\,V_0}{\delta}$$

$$C_x = \frac{4\,\nu}{\delta\,V_0} = \frac{4\,x}{\delta\,Re_x} = \frac{4}{\frac{\delta}{x}\,Re_x} = \frac{4}{5{,}477\sqrt{Re_x}} = \frac{0{,}7303}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_w = \frac{1}{L}\,\int_0^L C_x\,dx = 2\,C_x\rangle_{x=L} = \frac{1{,}4606}{\sqrt{Re_L}}$$

b) Para una distribución de velocidades de la capa límite de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3\,y}{2\,\delta} - \frac{1}{2}\,(\frac{y}{\delta})^3$$

resulta:

$$\tau_0 = \eta\,\frac{\partial u}{\partial y}\rangle_{y=0} = \eta\,\frac{3\,V_0}{2\,\delta}$$

$$\tau_0 = \rho\,V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,\{\int_0^\delta \frac{u}{V_0}\,(1-\frac{u}{V_0})\,dy\} = \rho\,V_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,[\int_0^d \{\frac{3\,y}{2\,\delta} - \frac{1}{2}\,(\frac{y}{\delta})^3\}\,\{1-\frac{3\,y}{2\,\delta}+\frac{1}{2}\,(\frac{y}{\delta})^3\}]\,dy =$$

$$= 0{,}139\,\rho\,V_0^2\,\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{3\,\eta\,V_0}{2\,\delta}$$

Igualándolas:

$$\delta\,d\delta = 10{,}79\,\frac{\nu\,dx}{V_0} \;\;;\;\; \frac{\delta^2}{2} = 10{,}79\,\frac{\nu}{V_0}\,x + Cte = \left| \text{Para: } \begin{cases}\delta = 0\\ x = 0\end{cases} \Rightarrow Cte = 0 \right| = 10{,}79\,\frac{\nu}{V_0}\,x$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_0 = \frac{3\,\eta\,V_0}{2\,\delta} = \frac{3\,\eta\,V_0\sqrt{Re_x}}{2_x\,4{,}64\,x} = \frac{0{,}323\,\eta\,V_0\sqrt{Re_x}}{x} = 0{,}323\,\sqrt{\frac{\eta\,\rho\,V_0^3}{x}} = \frac{\rho\,V_0^2\,C_x}{2}$$

$$C_x = \frac{0{,}646\,\nu\,\sqrt{Re_x}}{x\,V_0} = \frac{0{,}646}{\sqrt{Re_x}} \;;\; C_w = \frac{1}{L}\int_0^L C_x\,dx = 2\,C_x\rangle_{x=L} = \frac{1{,}292}{\sqrt{Re_L}}$$

El valor de C_w así obtenido para placa plana, está muy próximo al valor exacto (Blasius), y es de la forma:

$$C_x = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \; ; \; C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \; ; \; \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

siendo la fuerza de arrastre F_a sobre cada cara de la placa de longitud L y anchura unidad:

$$F_a = \int_0^L \tau_0 \; dx = \int_0^L 0,323 \sqrt{\frac{\rho \; \eta \; V_0^3}{x}} \; dx = 0,646 \sqrt{\rho \; \eta \; V_0^3 \; L}$$

ECUACIONES DE PRANDTL DE LA CAPA LÍMITE.- Si se supone un fluido incompresible, en movimiento laminar permanente, en flujo bidimensional sobre una pared cualquiera en la que el radio de curvatura es muy superior al espesor de la capa límite, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican, quedando en la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho} \; \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \nu \; \Delta u = \left| \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = u \; \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \; \dfrac{\partial u}{\partial y} \; ; \; X = 0 \text{, en la dirección del movimiento} \\ \text{Ecuación de continuidad: } \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ v = 0 \; ; \; \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \; \Rightarrow \; \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \; ; \; \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= - u \; \frac{\partial u}{\partial x} - v \; \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En el borde de la capa límite se tiene la velocidad V_0 del movimiento irrotacional exterior, por lo que aplicando la ecuación de Bernoulli se puede hallar la variación longitudinal de la presión, resultando:

$$\frac{1}{2} \; \frac{dV_0^2}{dx} = - \frac{1}{\rho} \; \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \; \frac{dV_0^2}{dx} + \nu \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \; \frac{\partial u}{\partial x} + v \; \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si se introduce la función línea de corriente ψ de la forma: $u = - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$; $v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, y sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \; \partial y} \; \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \; \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \; \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

de aplicación a la obtención de la capa límite laminar sobre un contorno plano.

ECUACIÓN CLÁSICA DE KÀRMÀN.- Los caudales de la cantidad de movimiento, en proyección paralela a la pared, manteniendo la anchura de la capa límite igual a la unidad, son los siguientes:

Sobre (AB), $q_{M(AB)} = q_M$ *, (entrante)*

Sobre (CD), $q_{M(CD)} = q_M + \dfrac{\partial q_M}{\partial x}\, dx$ *, (saliente)*

Sobre (BC), $\dfrac{\partial q}{\partial x}\, dx\, V_0$ *, (entrante)*

Variación de la cantidad de movimiento: $- q_M + (q_M + \dfrac{\partial q_M}{\partial x}\, dx) - \dfrac{\partial q}{\partial x}\, dx\, V_0 = \dfrac{\partial q_M}{\partial x}\, dx - \dfrac{\partial q}{\partial x}\, dx\, V_0$

Impulso mecánico: $p\,\delta - (p + \dfrac{\partial p}{\partial x}\, dx)(\delta + \dfrac{\partial \delta}{\partial x}\, dx) - \tau_0\, dx = - (\tau_0 + \dfrac{\partial p}{\partial x}\, \delta)\, dx$

Igualándolas se obtiene: $\dfrac{\partial q_M}{\partial x} - V_0\, \dfrac{\partial q}{\partial x} = - \tau_0 - \dfrac{\partial p}{\partial x}\, \delta$

$$\frac{\partial q_M}{\partial x} - V_0\, \frac{\partial q}{\partial x} = \left| \begin{array}{l} q_M = (\delta - \delta_1 - \delta_2)\, V_0^2\, \rho \quad ; \quad q = (V_0\, \delta - \delta_1)\, \rho \quad ; \quad \delta - \delta_1 = Cte \\ \dfrac{\partial q_M}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} \{(\delta - \delta_1 - \delta_2)\, V_0^2\, \rho\} = - \dfrac{\partial \delta_2}{\partial x}\, V_0^2\, \rho + (\delta - \delta_1 - \delta_2)\, 2\, V_0\, \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\, \rho \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} = \rho\, (\delta - \delta_1)\, \dfrac{\partial V_0}{\partial x} \end{array} \right| =$$

$$= - \frac{\partial \delta_2}{\partial x}\, V_0^2\, \rho + (\delta - \delta_1 - \delta_2)\, 2\, V_0\, \frac{\partial V_0}{\partial x}\, \rho - \rho\, (\delta - \delta_1)\, V_0\, \frac{\partial V_0}{\partial x} = - \tau_0 - \frac{\partial p}{\partial x}\, \delta =$$

$$= \left| p + \rho\, \frac{V_0^2}{2} = Cte \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = - \rho\, V_0\, \frac{\partial V_0}{\partial x} \right| = - \tau_0 + \rho\, V_0\, \frac{\partial V_0}{\partial x}\, \delta$$

que simplificada convenientemente queda en la forma:

$$\tau_0 = \frac{\partial \delta_2}{\partial x}\, V_0^2 \rho + V_0\, \frac{\partial V_0}{\partial x}\, \rho\, (\delta_1 + 2\, \delta_2)$$

ecuación que se conoce como ecuación de Kàrmàn, en la que las variables V_0, δ_1 y δ_2 no dependen más que de x.

X.5.- ECUACIÓN INTEGRAL DE LA ENERGÍA DE LA CAPA LÍMITE

El Primer Principio de la Termodinámica aplicado a un sistema abierto en régimen estacionario, permite calcular el calor Q puesto en juego en una transformación, en la forma:

$$Q = \Delta i + T + \Delta E_{cinética} + \Delta E_{potencial}$$

e indica que la energía se puede considerar en forma de entalpía, calor o energía cinética, con las mismas unidades que el trabajo de cizalladura o de corte.

A pequeñas velocidades, los términos asociados a la energía cinética y potencial y al trabajo de cortadura son pequeños en comparación con las demás magnitudes, y se pueden despreciar.

La velocidad a la que la entalpía entra a través de la cara (AB) de la capa límite representada en la Fig X.7 viene dada por:

$$i_{(AB)} = m\, c_p\, T = c_p\ \rho \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy$$

mientras que la velocidad del flujo de entalpía a través de la cara (CD) es:

$$i_{(CD)} = i_{(AB)} + \frac{\partial i_{(AB)}}{\partial x}\, dx = i_{(AB)} + c_p\ \rho\ \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy \}\, dx$$

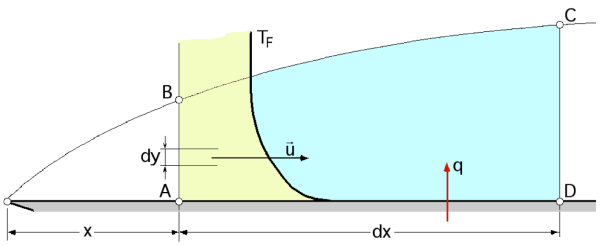


Fig X.7.- Capa límite térmica

por lo que dentro de la capa límite se tiene:

$$i_{(AB)} - i_{(CD)} = -\, c_p\ \rho\ \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy \}\, dx$$

La entalpía transportada al interior del volumen de control a través de la superficie (BC), es:

$$\Delta i_{(BC)} = c_p\ \rho\ T_F\ \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, dy \}\, dx$$

A su vez, el calor conducido a través de la capa límite es:

$$q_k = -\, k\, dx\, (\frac{\partial T}{\partial y})_{y=0}$$

Sumando todas las contribuciones energéticas, se obtiene la ecuación integral para la conservación de la energía:

$$c_p\ \rho\ T_F\ \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\ dy \}\, dx - c_p\ \rho\ \frac{\partial}{\partial x} \{ \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy \}\, dx - k\, dx\, (\frac{\partial T}{\partial y})_{y=0} = 0$$

Como fuera de la capa límite térmica la temperatura es T_F, sólo se integrará hasta el límite, $y = \delta_T$ de la misma; por lo tanto:

$$c_p\ \rho\ T_F\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T} u\ dy - c_p\ \rho\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T} u\, T\, dy - k\, (\frac{\partial T}{\partial y})_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T} (T_F - T)\, u\ dy = \frac{k}{\rho\ c_p}\, (\frac{\partial T}{\partial y})_{y=0} = \alpha\, (\frac{\partial T}{\partial y})_{y=0}$$

que es la ecuación integral de la energía de la capa límite laminar para el caso de un flujo de baja velocidad, en la que dx se comporta como un intervalo y es independiente de dy.

Si se utiliza un perfil de velocidades de tercer grado, de la forma: $\frac{u}{V_0} = \frac{3\, y}{2\, \delta} - \frac{1}{2}\, (\frac{y}{\delta})^3$

y distribución de temperaturas:

$$\frac{T - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F + T_F - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F}{T_F - T_{pF}} + 1 = \frac{3}{2}\ \frac{y}{\delta_T\,(x)} - \frac{1}{2}\, (\frac{y}{\delta_T\,(x)})^2$$

en la que considerando las condiciones: $\begin{cases} y = 0\ ;\ T = T_{pF}\ ;\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\ y = \delta_T\ ;\ T = T_F\ ;\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$ *, se obtiene:*

$$\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_{pF} - T_F)\, V_0 \;\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_T} \{1 - \frac{3}{2}\,\frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3\}\{\frac{3}{2}\,\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\}\, dy =$$

$$= (T_F - T_{pF})\, V_0 \;\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{20}\,\frac{\delta_T^2}{\delta} - \frac{3}{280}\,\frac{\delta_T^4}{\delta^3}\right)$$

Teniendo en cuenta que: $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = (T_F - T_{pF})\,\frac{3\,k}{2\,\delta_T}$ *, resulta:*

$$\frac{3\,\alpha}{2\,\delta_T} = V_0 \;\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{20}\,\frac{\delta_T^2}{\delta} - \frac{3}{280}\,\frac{\delta_T^4}{\delta^3}\right)$$

Llamando $\xi = \frac{\delta_T}{\delta}$ *se tiene:*

$$\frac{3\,\alpha}{2\,\varepsilon\,\delta} = V_0 \;\frac{d}{dx}\{\delta\,(\frac{3}{20}\,\xi^2 - \frac{3}{280}\,\xi^4)\}$$

En la ecuación de Pohlhausen se demuestra que: $\xi = \frac{\delta_T}{\delta} = (Pr)^{-1/3}$

El nº de Pr para la mayor parte de los gases *(0,6 < Pr < 1)* es del orden de la unidad, mientras que para la mayor parte de los líquidos varía en un campo muy grande, con valores elevados para los aceites muy viscosos y bajas temperaturas, y valores muy bajos para los metales líquidos; en consecuencia, cuando:

$$\frac{\delta_T}{\delta} << 1 \;\; ; \;\; \xi << 1 \;\; \Rightarrow \;\; \xi^4 << \xi^2$$

resulta:

$$\frac{3\,\alpha}{2\,\xi\,\delta} = V_0 \;\frac{d}{dx}\left(\delta\;\frac{3}{20}\,\xi^2\right) = \frac{3\,V_0}{20}\left(\xi^2\;\frac{d\delta}{dx} + 2\,\xi\,\delta\,\frac{d\xi}{dx}\right)$$

$$\frac{10\,\alpha}{V_0}\,dx = \xi^3\delta\,d\delta + 2\,\xi^2\delta^2 d\xi = \left| \delta^2 = 21{,}58\,\frac{\nu\,x}{V_0} \;\Rightarrow\; \delta\,d\delta = 10{,}79\,\frac{\nu\,dx}{V_0} \right| = \xi^3\,\frac{10{,}79}{\delta}\,\frac{\nu\,dx}{V_0} + 2_x\,21{,}58\,\xi^2\,\frac{\nu\,x}{V_0}\,d\xi$$

$$\xi^3 + 4\,x\,\xi^2\,\frac{d\xi}{dx} = \frac{13\,\alpha}{14\,\nu} = \frac{13}{14\,(Pr)}$$

La solución general es:

$$\xi^3 = C\,x^{-3/4} + \frac{10}{10{,}79\;Pr} = C\,x^{-3/4} + \frac{0{,}92678}{Pr}$$

La solución exacta es:

$$\xi^3 = C\,x^{-3/4} + \frac{13}{14\;Pr} = C\,x^{-3/4} + \frac{0{,}92857}{Pr}$$

y con la condición: $\begin{cases} x = x_i \;\; ; \;\; \xi^2 = (\frac{\delta_T}{\delta})^3 \Rightarrow 0 \\ C = -\,\frac{13}{14}\,\frac{\sqrt[3]{x_i}}{Pr} \end{cases}$ *, resulta, Fig X.8:* $\xi = 0{,}976\,\sqrt[3]{\frac{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}{Pr}}$

por lo que:

$$h_{Cx} = \frac{3\ k}{2\ \delta_T} = \frac{\frac{3\ k}{2}}{0{,}976\ \delta \sqrt[3]{\frac{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}{Pr}}} = \left| \delta = \frac{4{,}64\ x}{\sqrt{Re_x}} \right| = \frac{\frac{3\ k}{2}}{0{,}976\ \frac{4{,}64\ x}{\sqrt{Re_x}} \sqrt[3]{\frac{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}{Pr}}} =$$

$$= \frac{3\ k}{2\ x} \frac{\sqrt[3]{Pr}\sqrt{Re_x}}{0{,}976 \times 4{,}64 \sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}} = 0{,}332\ k \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}} \frac{\sqrt[3]{Pr}\sqrt{Re_x}}{x}$$

$$Nu_x = \frac{h_{Cx}\ x}{k} = \frac{0{,}332\ \sqrt[3]{Pr}\sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}}$$

De haber considerado la ecuación de tercer grado anterior, se obtendría:

$$Nu_x = \frac{0{,}323\ \sqrt[3]{Pr}\sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}}$$

Haciendo $\frac{x_i}{x} = 0$ se obtiene la ecuación de Pohlhausen:

$$Nu_x = 0{,}332\ \sqrt{Re_x}\ Pr^{1/3}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\xi = \frac{0{,}976}{\sqrt[3]{Pr}} = \frac{\delta_T}{\delta} \quad ; \quad \delta_T = \frac{0{,}976\ \delta}{\sqrt[3]{Pr}} = 4{,}534\ \frac{x}{\sqrt{Re_x}\ \sqrt[3]{Pr}}$$

el coeficiente medio de transmisión de calor por convección h_C en el intervalo $(0 \le x \le L)$ a lo largo de la superficie plana es:

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx}\, dx = 2\ h_{Cx}\rangle_{x=L} = \frac{0{,}664\ k\ \sqrt{Re_L}\ Pr^{1/3}}{L} \quad (exacto)$$

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx}\, dx = 2\ h_{Cx}\rangle_{x=L} = \frac{0{,}646\ k\ \sqrt{Re_L}\ Pr^{1/3}}{L} \quad (ecuación\ de\ tercer\ grado)$$

El calor transmitido desde la placa, de anchura unidad, al fluido, es: $Q = L\ h_C\ (T_{pF} - T_F)$

Si se considera existen dos zonas longitudinales sobre la placa, perfectamente diferenciadas, una sin aporte de calor, Fig X.8, resulta, teniendo en cuenta que: $\Delta T = T_{pF} - T_F$

$$Para: \begin{cases} x < x_1 \ ; \quad Q = 0 \\ x > x_1 \ ; \quad Q = 0{,}323\ \frac{k_F}{x}\ Pr^{1/3} \sqrt{Re_x}\ \frac{DT}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}} \end{cases}$$

Para una zona de la placa comprendida en el intervalo $(x_1 < \boldsymbol{x} < x_2)$ *a la que se aplica un flujo de calor q, Fig X.9, se tiene:*

$$Q = 0{,}323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \left(\frac{\Delta T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}} + \frac{-\Delta T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_2}{x})^{3/4}}} \right)$$

observándose que el flujo de calor en la región $(x_1 > x_2)$ es (-) lo cual significa que en la citada sección la pared reabsorbe parte del calor comunicado a la capa límite en la región $(x_1 < x < x_2)$.

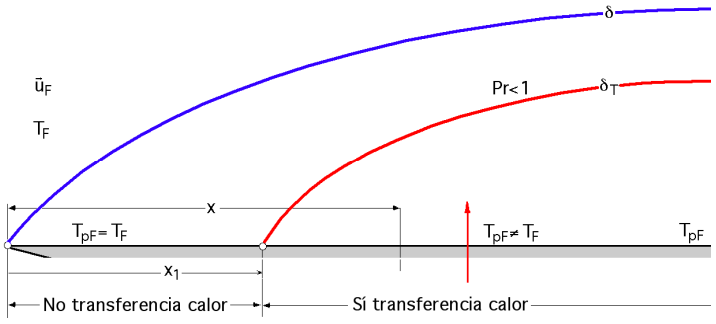


Fig X.8- Capa límite térmica e hidrodinámica superpuestas

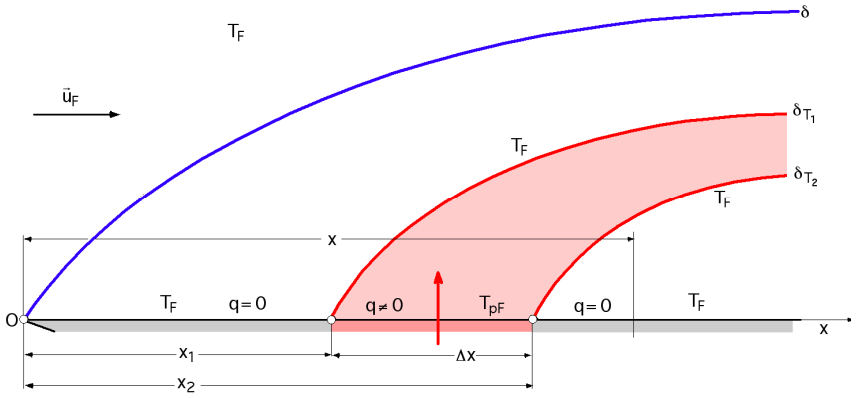


Fig X.9 - Placa con una capa límite laminar y dos capas límite térmicas

Relación entre C_x y h_{Cx} en flujo laminar sobre placa plana.- A partir de la expresión exacta de Blasius $\frac{C_x}{2} = \frac{0{,}332}{\sqrt{Re_x}}$ para el coeficiente de arrastre local C_x, a lo largo de una placa plana, en la que se ha supuesto que para el espesor δ de la capa límite el gradiente de presiones es cero y las propiedades del fluido constantes, y del número de Nu local para el flujo laminar, (Pohlhausen):

$$Nu_x = 0{,}332 \sqrt{Re_x}\ Pr^{1/3}$$

y como el número de Stanton local St_x es:

$$St_x = \frac{h_{Cx}}{\rho\ c_p\ V_0} = \frac{Nu_x}{Pr\, Re_x} = \frac{0{,}332}{Pr^{2/3} \sqrt{Re_x}} = \frac{0{,}332\ C_x}{Pr^{2/3}\ x\ 2\ x\ 0{,}332} = \frac{C_x}{2\ Pr^{2/3}}$$

$$\frac{C_x}{2} = St_x\, Pr^{2/3} \quad ; \quad Pr > 0,5$$

que se conoce como analogía de Reynolds-Colburn que relaciona el coeficiente de arrastre local C_x con el número de Stanton St_x para flujo laminar a lo largo de una placa plana.

Como es mucho más fácil hacer medidas de la fuerza de arrastre que de la transferencia de calor, para el caso de valores medios se puede poner:

$$\frac{C_w}{2} = St\, Pr^{2/3} = \frac{h_C}{\rho\, c_p\, V_0}\, Pr^{2/3}$$

en la que C_w es el coeficiente de arrastre medio y St el número de Stanton medio.

Teniendo en cuenta lo anterior, la fuerza de arrastre F_a queda en la forma:

$$F_a = \frac{\rho\,(L\ a)\, C_w\ V_0^2}{2} = \frac{\rho\,(L\ a)\, h_C\ V_0^2}{\rho\, c_p\ V_0} = (L\ a)\, \frac{h_C}{c_p}\, V_0$$

X.6.- CAPA LIMITE TURBULENTA PARA PLACA PLANA

No existe una teoría exacta que permita estudiar la capa límite turbulenta; sin embargo sí existen modelos empíricos que han permitido la obtención de soluciones numéricas de las ecuaciones de la capa límite. El reparto de velocidades para la placa plana es aproximadamente logarítmico, habiéndose obtenido al efecto los siguientes resultados experimentales:

$$Para:\ 10^5 < Re < 10^7\ ;\ \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{d}}\ ,\ con:\ m = 7\ ,\ F = \frac{9}{7}$$

El valor de $\tau_0 = \rho\ \frac{\partial}{\partial x}\ \{ \int_0^{\delta} u\,(V_0 - u)\ dy\}$ se puede aplicar también al régimen turbulento, por cuanto en su demostración no se ha fijado la forma de la distribución de velocidades en la capa límite, por lo que la distribución de velocidades $\frac{u}{V_0}$ puede ser:

$$Para\ , \begin{cases} placa\ plana,\ \dfrac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\dfrac{y}{d}} \\ flujo\ turbulento\ por\ el\ interior\ de\ tuberías,\ (Nikuradse),\ \dfrac{u}{V_{máx}} = \sqrt[m]{\dfrac{y}{R}} \end{cases}$$

En estas circunstancias Blasius dedujo experimentalmente:

$$\tau_0 = 0,0288\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{\delta\ v_0}}\ ,\ con,\ 5.10^5 < Re < 10^7$$

Siguiendo el mismo método que para el cálculo de la capa límite laminar:

$$\tau_0 = \rho\ V_0^2\ \frac{\partial}{\partial x}\ \{ \int_0^{\delta}\ \frac{u}{V_0}\ (1 - \frac{u}{V_0})\ dy\} = \rho\ V_0^2\ \frac{\partial}{\partial x}\ [\int_0^{\delta}\ \sqrt[7]{\frac{y}{\delta}}\ \{1 - \sqrt[7]{\frac{y}{\delta}}\}\ dy] = \frac{7}{72}\ \rho\ V_0^2\ \frac{d\delta}{dx}$$

Igualando las expresiones: $\frac{7}{72}\ \rho\ V_0^2\ \frac{d\delta}{dx} = \tau_0 = 0{,}0228\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{\delta\ V_0}}$, se obtiene:

$$\sqrt[4]{\delta}\ d\delta = 0{,}234\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0}}\ dx \quad ; \quad \delta^{5/4} = 0{,}292\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0}}\ x \quad ; \quad \frac{\delta}{x} = \frac{0{,}376}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

en donde se ha supuesto que la capa límite es turbulenta en el total de la longitud de la placa L de forma que para $(x = 0\ ,\ \delta = 0)$.

El esfuerzo cortante es:

$$\tau_0 = 0{,}0228\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[4]{\frac{\upsilon}{\delta\ V_0}} = 0{,}0228\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[4]{\frac{\nu}{V_0\ \frac{0{,}376\ x}{\sqrt[5]{Re_x}}}} = 0{,}029\ \rho\ V_0^2\ \sqrt[5]{\frac{\nu}{x\ V_0}}$$

La fuerza de arrastre F_a por unidad de anchura de la placa es:

$$F_a = \int_0^L \tau_0\ dx = 0{,}036\ \frac{\rho\ V_0^2\ L}{\sqrt[5]{Re_L}} \quad ; \quad C_x = \frac{0{,}0576}{\sqrt[5]{Re_x}} \quad ; \quad C_w = \frac{0{,}072}{\sqrt[5]{Re_L}} = \frac{P}{\frac{1}{2}\ \rho\ V_0^2\ L}$$

ecuaciones válidas en el intervalo en que lo es la ecuación de Blasius.

Para el número de Re crítico, $Re_C = 5.10^5$, resulta:

$$C_w = \frac{0{,}072}{\sqrt[5]{Re_L}} - 0{,}00334\ \frac{x_C}{L} \cong \frac{0{,}072}{\sqrt[5]{Re_L}} - \frac{1700}{Re_L}$$

Para valores de Re comprendidos en el intervalo, $5.10^5 < Re_x < 10^9$, resulta:

$$C_{wx} = \frac{0{,}455}{(\log_{10} Re_L)^{2{,}58}}$$

El coeficiente de arrastre, que es exacto para toda la placa, y que incluye las zonas laminar y turbulenta, se determina mediante las expresiones:

$$C_w = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_C}}\ \frac{Re_C}{Re_L} + 0{,}074\ Re_L^{-1/5}\ \{1 - (\frac{Re_C}{Re_L})^{4/5}\} \quad ; \quad Re_L > 10^7$$

$$C_w = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_C}}\ \frac{Re_C}{Re_L} + \frac{0{,}523}{ln^2\ (0{,}06\ Re_L)} - (\frac{Re_C}{Re_L})\ \frac{0{,}523}{ln^2\ (0{,}06\ Re_C)} \quad ; \quad Re_L < 10^7$$

VII.7.- DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LIMITE

Cuando el gradiente de presiones se mantiene nulo a lo largo de la placa plana, la capa límite se desarrolla a lo largo de la misma, independientemente de su longitud; pero si el gradiente de presiones es *adverso*, la presión aumenta en el sentido de la corriente, y el espesor de la capa límite crece rápidamente.

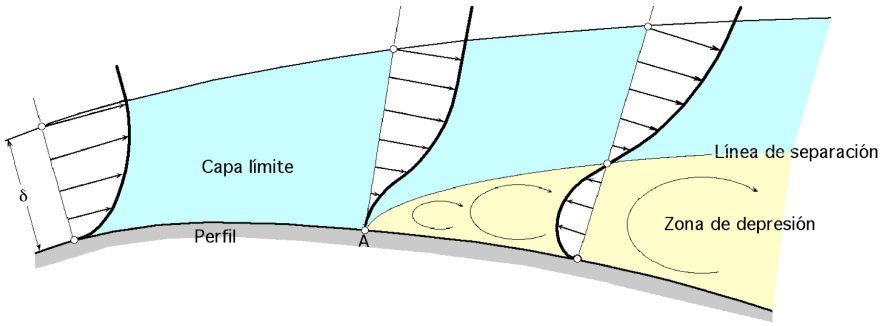


Fig VII.9.- Desprendimiento de la capa límite

Por otro lado, el gradiente de presión adverso junto con el esfuerzo cortante en la pared, hacen que disminuya la cantidad de movimiento dentro de la capa límite y, si ambos actúan a lo largo de una distancia suficiente, el fluido de la capa límite se irá frenando hasta alcanzar el reposo; en este instante, la línea de corriente que coincide con la pared se aleja de la superficie a partir del punto de separación, conociéndose este fenómeno como *desprendimiento de la capa límite*.

El fenómeno se acentúa cuando el perfil es un conducto divergente; el flujo en las proximidades del contorno se va frenando continuamente hasta alcanzar el punto A de la Fig VII.9, en el que la velocidad se hace cero. La forma del contorno puede exigir una disminución mayor de la velocidad, cosa imposible, por lo que el fluido se separará de él, produciéndose al mismo tiempo un contraflujo originado por el gradiente de presiones adverso, es decir, aguas abajo del punto de desprendimiento se origina una zona de bajas presiones, que provocan la aparición de una fuerza depresiva dirigida en el sentido de la corriente, denominada *Resistencia de forma*, por depender hasta cierto punto de la geometría del perfil.

Tabla VII.2.- Coeficientes de arrastre C_w de algunos perfiles inmersos en una corriente fluida de velocidad $\vec{V}_0$

$$F_a = \frac{C_w \, \rho \, V_0^2 \, A_{Frontal}}{2}$$

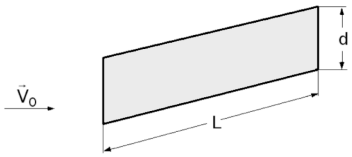
a) Placa plana paralela a la corriente



$$\text{Régimen laminar: } C_w = \frac{1{,}33}{\sqrt{Re}}$$

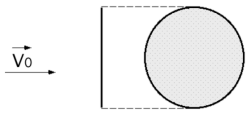
$$Re < 10^7 \quad \Rightarrow \quad C_w = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{Re}} \quad ; \quad Re > 10^7 \quad \Rightarrow \quad C_w = \frac{0{,}455}{(\log_{10} Re)^{2{,}58}}$$

b) Placa plana perpendicular a la corriente, Re > 10^3



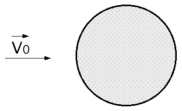
L/d	1	5	10	20	30	∞
C_w	1,18	1,2	1,3	1,5	1,6	1,95

c) Disco circular normal a la corriente



$Re > 10 \;;\; C_w = 1{,}17$

d) Esfera

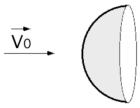


$Re < 1 \;\Rightarrow\; C_w = 24\sqrt{Re}$

$10^3 < Re < 3.10^5 \;\Rightarrow\; C_w = 0{,}47$

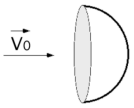
$Re > 3.10^5 \;\Rightarrow\; C_w = 0{,}2$

e) Hemisferio hueco



$10^4 < Re < 10^6$

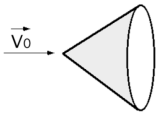
$C_w = 0{,}34$



$10^4 < Re < 10^6$

$C_w = 1{,}42$

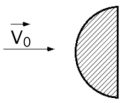
f) Cono de 60º



$Re = 10^5$

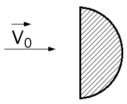
$C_w = 0{,}5$

g) Semicilindro



$10^4 < Re < 10^6$

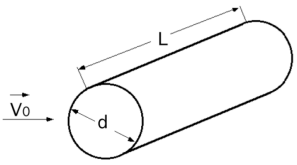
$C_w = 0{,}42$



$10^4 < Re < 10^6$

$C_w = 1{,}17$

h) Cilindro normal a la corriente



$$Re < 0{,}2 \;;\; C_w = \frac{8\,\pi}{Re\,(2{,}2 - lg_{10}Re)}$$

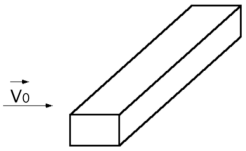
$10^3 < Re < 10^5$

L/d	1	5	10	20	30	∞
C_w	0,63	0,8	0,83	0,93	1	1,2

$Re > 5.10^5$

L/d	5	∞
C_w	0,35	1,6

i) Prisma





$Re = 3{,}5.10^4$

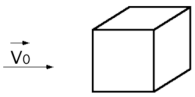
$C_w = 2$



$10^4 < Re < 10^5$

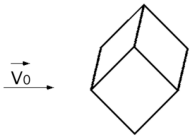
$C_w = 1{,}6$

j) Cubo



$Re = 10^5$

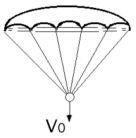
$C_w = 1{,}07$



$Re = 10^5$

$C_w = 0{,}81$

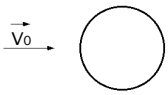
k) Paracaidas (baja porosidad)



$Re = 10^5$

$C_w = 1{,}2$

l) Sólidos de revolución elípticos



Relación 1 / 1 *Régimen laminar, $C_w = 1{,}20$* *Régimen turbulento, $C_w = 0{,}30$*



Relación 2 / 1 *Régimen laminar, $C_w = 0,60$* *Régimen turbulento, $C_w = 0,20$*

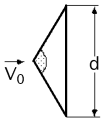


Relación 4 / 1 *Régimen laminar, $C_w = 0,35$* *Régimen turbulento, $C_w = 0,15$*

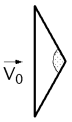


Relación 8 / 1 *Régimen laminar, $C_w = 0,25$* *Régimen turbulento, $C_w = 0,10$*

m) Sólidos de revolución triangulares



120° ; Re > 10.000 ; $C_w = 1,72$



120° ; Re > 10.000 ; $C_w = 2$



60° ; Re > 10.000 ; $C_w = 1,72$



60° ; Re > 10.000 ; $C_w = 1,39$

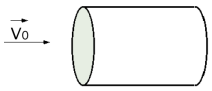


30° ; Re > 100.000 ; $C_w = 1$



30° ; Re > 100.000 ; $C_w = 1,8$

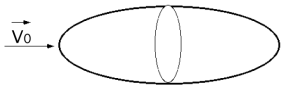
n) Cilindro de sección lenticular



$Re > 10^3$

L / d	*0,5*	*1*	*2*	*4*	*8*
C_w	*1,15*	*0,9*	*0,85*	*0,87*	*0,99*

o) Elipsoide



Relación L / d = 0,75 *Régimen laminar, $C_w = 0,50$* *Régimen turbulento, $C_w = 0,20$*
Relación L / d = 1,00 *Régimen laminar, $C_w = 0,47$* *Régimen turbulento, $C_w = 0,20$*
Relación L / d = 2,00 *Régimen laminar, $C_w = 0,27$* *Régimen turbulento, $C_w = 0,13$*
Relación L / d = 4,00 *Régimen laminar, $C_w = 0,25$* *Régimen turbulento, $C_w = 0,1$*
Relación L / d = 8,00 *Régimen laminar, $C_w = 0,20$* *Régimen turbulento, $C_w = 0,08$*