XII.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN ANALOGÍAS Y ANÁLISIS DIMENSIONAL

pfernandezdiez.es

XII.1.- ANALOGÍA ENTRE LA TRANSMISIÓN DE CALOR Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN FLUJO TURBULENTO

CAPA LIMITE TÉRMICA SOBRE PLACA PLANA.- En una corriente fluida que circula sobre una placa plana en régimen turbulento, se pueden distinguir dentro de la capa límite según una misma sección transversal, tres subcapas de fluido contenidas en la capa límite térmica, con unos límites de separación no muy bien diferenciados, Fig XII.1.

a) La primera, subcapa viscosa, se encuentra en las proximidades de la pared; en ella prácticamente no existen remolinos y, por lo tanto, la variación de la cantidad de movimiento se debe exclusivamente a la viscosidad.

b) La segunda zona, subcapa de transición, se corresponde con un régimen intermedio, y en ella se produce una variación de la cantidad de movimiento debido a la viscosidad y a la turbulencia.

c) La tercera zona, subcapa turbulenta, se corresponde con la parte principal de la corriente que ocupa casi toda la sección transversal del tubo; es la zona en la que existen turbulencias de intensidad relativamente pequeña, aunque los remolinos sean grandes; los gradientes de la velocidad respecto a la distancia a la pared son relativamente pequeños, por lo que las variaciones de la cantidad de movimiento predominantes, son debidas a los esfuerzos de Reynolds τ_{turb} en régimen turbulento.

En lo que sigue se supondrá que tanto los gradientes de temperatura dentro de la capa límite térmica, como los gradientes de velocidades dentro de la capa límite hidrodinámica están perfectamente desarrollados y superpuestos, cumpliéndose que $\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt[3]{Pr}$, por lo que para Pr = 1, las dos capas límite coinciden.

Si Pr < 1, la capa límite térmica es más gruesa que la hidrodinámica y cuando Pr > 1, sucede todo lo contrario.

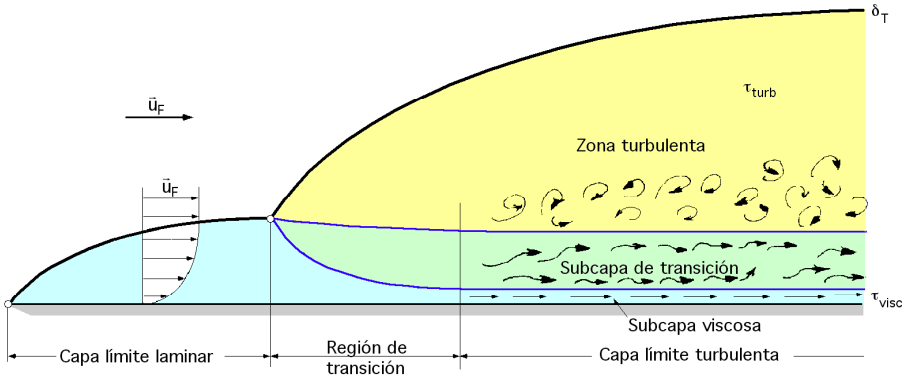

Fig XII.1.- Subcapas de la capa límite térmica en régimen turbulento

Conductividad térmica.- Dentro de la subcapa viscosa el calor fluye principalmente por conducción, aunque también interviene algo la convección, debido a que en esa zona existe algún remolino; a medida que se avanza transversalmente dentro de la capa límite, los efectos de la turbulencia se hacen más notorios, predominando la transmisión de calor por convección.

En los fluidos ordinarios con números de Prandtl superiores a 0,6 la conducción térmica es totalmente despreciable en la subcapa turbulenta, y puede llegar a ser considerable en la zona de transición cuando el número de Prandtl se aproxime a la unidad; para números de Prandtl elevados, la conducción térmica es despreciable en esa zona.

Cantidad de movimiento.- El esfuerzo cortante en régimen turbulento sigue una regla similar a lo anterior respecto a la viscosidad. Bajo ciertas condiciones ideales, existe una correspondencia exacta entre el flujo de calor y la variación de la cantidad de movimiento; sin embargo, en un caso general, esta correspondencia será sólo aproximada y el considerarla como exacta podría conducir a grandes errores.

Expresión general de la relación básica de la analogía entre el calor y la cantidad de movimiento.- Cuando se conoce el coeficiente de rozamiento λ entre el fluido y la pared del conducto por el que circula, se puede determinar el coeficiente de transferencia de calor h_C, mediante la analogía entre la transferencia de calor y la cantidad de movimiento.

El *esfuerzo cortante* τ *en la capa límite turbulenta* se compone de dos sumandos:

$$\tau = \tau_{visc} + \tau_{turb} = \eta \frac{du}{dx} - \rho \, u_F^* \, v_F^*$$

en la que τ_{turb} se conoce como esfuerzo de Reynolds, siendo u_F^* la velocidad de agitación o fluctuación de la velocidad instantánea u_i alrededor del valor medio u_F:

$$u_i = u_F \pm u_F^* = u_F \pm u_{agit}$$

mientras que v_F^* es la fluctuación transversal de la velocidad instantánea v_i de la forma:

$$v_i = v_F \pm v_F^* = v_F \pm v_{agit}$$

Para el flujo turbulento de calor, se puede considerar que el flujo total de calor q^* está compuesto por una componente $\begin{cases} \text{- conductiva } q_{cond} \\ \text{- turbulenta } q_{turb} \end{cases}$

$$q^* = q_{cond} + q_{turb} = - k \frac{dT}{dx} + \rho\, c_F\, v_F^*\, T_F^* \text{, en la que: } \begin{cases} T_i = T_F \pm T_F^* \text{ , es la temperatura instantánea} \\ T_F = T_\infty \text{ , es la temperatura media del fluido} \\ T_F^* \text{ , es la temperatura debida a la fluctuación} \end{cases}$$

El término $u_F^*\, v_F^*$ se obtiene a partir del significado físico del nº de Prandtl que sugiere que la fluctuación u_F^* de la velocidad se relaciona con $\frac{du}{dx}$ a través de la ecuación:

$$u_F^* \approx l_m \frac{du}{dx}$$

en la que l_m es la longitud de mezcla del espesor δ_2 de la cantidad de movimiento de la capa límite hidrodinámica.

Asimismo, la fluctuación transversal v_F^* se admite es del mismo orden de magnitud que u_F^* pero de signo opuesto:

$$v_F^* \approx - l_m \frac{du}{dx} \quad ; \quad u_F^*\, v_F^* = - (l_m \frac{du}{dx})^2 = - \varepsilon_m \frac{du}{dx}$$

en la que la difusividad turbulenta de la cantidad de movimiento es, $\varepsilon_m = l_m^2 \frac{du}{dx}$

Para hallar la relación del término $v_F^*\, T_F^*$ con el gradiente de temperaturas local medio, se aplica un método similar, en la forma:

$$T_F^* \approx - l_c \frac{dT}{dx} \quad y \quad v_F^* = l_c \frac{du}{dx}$$

en la que l_c es la longitud de mezcla del espesor de energía δ_3 de la capa límite, por lo que se puede poner:

$$v_F^*\, T_F^* = - l_c^2 \frac{du}{dx} \frac{dT}{dx} = - \varepsilon_c \frac{dT}{dx}$$

siendo la difusividad turbulenta del calor, $\varepsilon_c = l_c^2 \frac{du}{dx}$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de τ y de q^*, se obtiene:

$$\tau = \eta \frac{du}{dx} + \rho\, \varepsilon_m \frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{\tau}{\rho} = (\nu + \varepsilon_m) \frac{du}{dx}$$

$$q^* = - k \frac{dT}{dx} + \rho\, c_F\, v_F^*\, T_F^* = - k \frac{dT}{dx} - \rho\, c_F\, \varepsilon_c \frac{dT}{dx} = - (k + \rho\, c_F\, \varepsilon_c) \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{q^*}{\rho\, c_F} = -\left(\frac{k}{\rho\, c_F} + \varepsilon_c\right)\frac{dT}{dx} = -(\alpha + \varepsilon_c)\frac{dT}{dx}$$

ecuaciones que divididas entre sí, proporcionan las relaciones básicas para la circulación de fluidos por tuberías:

$$\frac{\tau}{q^*} = -\frac{\nu + \varepsilon_m}{c_F\,(\alpha + \varepsilon_c)}\frac{du}{dT}$$

en las que $\begin{cases}\nu \text{ y } \alpha \text{ , son propiedades del fluido}\\ \varepsilon_m \text{ y } \varepsilon_c \text{ , lo son del flujo}\end{cases}$; a partir de ellas se deducen las analogías entre la transferencia de calor y la cantidad de movimiento.

XII.2.- ANALOGÍA DE REYNOLDS

Esta analogía es de aplicación al *flujo de fluidos por tubos rectos de sección circular*; se puede estudiar en su forma más general, teniendo en cuenta que la relación entre las difusividades moleculares α y ν es igual a la relación entre las difusividades ε_m y ε_c.

Como el número de Prandtl es una relación entre difusividades, se puede poner:

$$\frac{\nu}{\alpha} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} = Pr \quad ; \quad \nu = \alpha\, Pr \quad ; \quad \varepsilon_m = \varepsilon_c\, Pr$$

$$\frac{\tau}{q^*} = \frac{\tau_0}{q_0^*} = -\frac{\nu + \varepsilon_m}{c_F\,(\alpha + \varepsilon_c)}\frac{du}{dT} = \frac{-(\alpha\ Pr + \varepsilon_m\ Pr)}{c_F\,(\alpha + \varepsilon_c)}\frac{du}{dT} = \frac{-Pr}{c_F}\frac{du}{dT}$$

$$\int_0^{u_F} du = -\frac{c_F\ t_0}{Pr\, q_0^*}\int_{T_{pF}}^{T_F} dT \quad \Rightarrow \quad u_F = \frac{c_F\ t_0}{Pr\, q_0^*}(T_{pF} - T_F)$$

en la que τ_0 y q_0^* se toman en la superficie.

Al ser:

$$\begin{cases}\pi\ d\, L\, \tau_0 = P\,\dfrac{\pi\ d^2}{4} \\ q_0^* = h_C\ (T_{pF} - T_F)\end{cases} \Rightarrow \quad P = \frac{4\, L\, \tau_0}{d} = \lambda\ \frac{L\ \rho\ u_F^2}{2\, d} \quad ; \quad \tau_0 = \frac{\lambda\ \rho\ u_F^2}{8} = \left| C_w = \frac{\lambda}{4} \right| = \frac{C_w\ \rho\, u_F^2}{2}$$

resulta: $\begin{cases} u_F = \dfrac{C_w\ \lambda\ \rho\ u_F^2}{8\ \ Pr\ h_C\ (T_{pF} - T_F)}(T_{pF} - T_F) = \dfrac{C_w\ \lambda\, \rho\, u_F^2}{8\ \ Pr\ h_C} \quad \Rightarrow \quad h_C = \dfrac{C_w\ \lambda\, \rho\, u_F}{8\, Pr} \\ St = \dfrac{Nu}{Re\ \ Pr} = \dfrac{h_C}{c_{pF}\ \rho\ u_F} = \dfrac{\lambda}{8\ \ Pr} = \dfrac{C_w}{2\ \ Pr}\end{cases}$

que concuerda bastante bien con: $C_w = 2\ St_x\ Pr^{2/3}$, para números de Pr próximos a la unidad.

Si los valores de λ *se toman de la ecuación:* $\lambda = 0{,}184\, Re_d^{-0{,}2}$ *, en el campo:* $\begin{cases}10^4 < Re < 10^5 \\ \dfrac{L}{d} = 0{,}623\ \sqrt[4]{Re_d}\end{cases}$*, siendo L la distancia necesaria para que en el flujo turbulento el factor de fricción* λ *llegue a ser constante, se tiene:*

$$Nu = St\, Re_d\, Pr = \frac{\lambda}{8\ \sqrt[3]{Pr}}\, Re_d\, Pr = \frac{0{,}184}{8}\, Re_d^{0,8}\ \sqrt[3]{Pr} = 0{,}023\, Re_d^{0,8}\ \sqrt[3]{Pr}$$

$$10^4 < Re < 10^5 \ \ ; \ \ 0{,}5 < Pr < 100 \ \ ; \ \ \frac{L}{d} > 60$$

Reynolds propuso que todo el flujo está formado por una región altamente turbulenta, es decir, no considera la presencia de la subcapa viscosa, ni la subcapa de transición, por lo que las difusividades moleculares del momento ν y del calor α son despreciables en comparación con las difusividades turbulentas $\begin{cases} \nu << \tau_m \\ \alpha << \tau_c \end{cases}$, por lo que no intervienen en el proceso.

Si se considera Pr = 1, resulta, $\varepsilon_m = \varepsilon_c$ *, por lo que:*

$$\frac{\tau}{q^*} = \frac{\tau_0}{q_0^*} = -\ \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c}\ \frac{du}{c_F\ dT} = -\ \frac{du}{c_F\ dT}$$

ecuación que se puede integrar entre las condiciones de la pared, $\begin{cases} T = T_{pF} \\ u = u_F \end{cases}$ y las condiciones medias del flujo principal, $\begin{cases} T = T_F \\ u = u_F \end{cases}$, obteniéndose:

$$\int_{T_{pF}}^{T_F} dT = -\frac{q^*}{\tau\ c_F} \int_0^{u_F} du \ \Rightarrow\ T_{pF} - T_F = \frac{q^*\, u_F}{\tau\ c_F} = \frac{q_0^*\ u_F}{\tau_0\ c_F} \quad \Rightarrow \quad q_0^* = h_C\,(T_{pF} - T_F\,) = h_C\ \frac{q_0^*\ u_F}{\tau_0\ c_F}$$

deduciéndose:

$$h_C = \frac{\tau_0\ c_F}{u_F} = \left| \tau_0 = \lambda\ \frac{u_F^2}{8}\ \rho \right| = \frac{\lambda\ \rho\ u_F\ c_F}{8}$$

El número de Stanton es: $St = \dfrac{Nu}{Re\, Pr} = \dfrac{h_C}{\rho\ u_F\ c_F} = \dfrac{\lambda}{8} = \dfrac{C_w}{2}$

XII.3.- ANALOGÍA DE PRANDTL

Prandtl considera al flujo dividido en dos zonas, viscosa y turbulenta:

- En la zona viscosa supone predominan las difusividades moleculares

- En la zona turbulenta supone predominan las difusividades turbulentas

Para la subcapa viscosa se tiene que $\begin{cases} \varepsilon_m << \nu \\ \varepsilon_c << \alpha \end{cases}$

$$\frac{\tau}{q^*} = \frac{\tau_0}{q_0^*} = -\ \frac{\nu}{\alpha}\ \frac{du}{c_F\ dT} = -\ \frac{Pr}{c_F}\ \frac{du}{dT} \quad \Rightarrow \quad dT = -\ Pr\ \frac{q^*}{\tau\ c_{pF}}\ du$$

que integrada entre las condiciones de la pared $\begin{cases} T = T_{pF} \\ u = 0 \end{cases}$ y las del borde de la subcapa viscosa $\begin{cases} T = T_i \\ u = u_i \end{cases}$ proporciona:

$$T_{pF} - T_F = -\ Pr\ \frac{q_0^*}{\tau_0\ c_{pF}}\ u_1$$

Para la subcapa turbulenta se supone que $\begin{cases} \nu << \varepsilon_m \\ \alpha << \varepsilon_c \end{cases}$ *, y si* ε_m *y* ε_c *son del mismo orden:* $\varepsilon_m = \varepsilon_c = \varepsilon$, *se obtiene:*

$$\frac{\tau}{q^*} = \frac{\tau_0}{q_0^*} = - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} \frac{du}{c_F \; dT} = - \frac{du}{c_F \; dT} \quad \Rightarrow \quad dT = - \frac{q_0^*}{\tau_0 \; c_F} \, du$$

que integrada entre los límites $\begin{cases} u = u_1 \, ; \; T = T_1 \\ u = u_F \, ; \; T = T_F \end{cases}$ proporciona la diferencia de temperaturas entre el borde de la capa límite y el borde de la subcapa turbulenta:

$$T_1 - T_F = \frac{q_0^*}{\tau_0 \; c_{pF}} \, (u_F - u_1)$$

y sumada a la obtenida anteriormente $T_{pF} - T_1$ resulta:

$$T_{pF} - T_F = \frac{q_0^*}{\tau_0 \; c_{pF}} \, Pr \, u_1 + \frac{q_0^*}{\tau_0 \; c_{pF}} \, (u_F - u_1) = \frac{q_0^* \; u_F}{\tau_0 \; c_{pF}} \, \{1 + \frac{u_1}{u_F} \, (Pr - 1)\}$$

Como el coeficiente de transmisión de calor h_C y el factor de fricción λ para el flujo por el interior del tubo, son de la forma:

$$q_0^* = h_C \, (T_{pF} - T_F) \quad ; \quad \tau_0 = \lambda \, \frac{\rho \; u_F^2}{8}$$

sustituidos en la ecuación anterior, se obtiene:

$$h_C = \frac{\lambda}{8} \, \frac{\rho \; c_F \; u_F}{1 + \frac{u_1}{u_F} \, (Pr - 1)} \quad ; \quad St = \frac{h_C}{\rho \; c_F \; u_F} = \frac{\lambda}{8 \, \{1 + \frac{u_1}{u_F} \, (Pr - 1)\}}$$

La velocidad u_1 del borde de la subcapa viscosa, se determina con ayuda de la ley de distribución de velocidades para flujos turbulentos, por ejemplo, mediante la siguiente ecuación empírica:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = (\frac{u_1}{5})^2 = \frac{\lambda \; u_F^2}{8} \; ; \; \frac{u_1}{u_F} = 5 \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

y el número de $St = \frac{\lambda}{8} \, \frac{1}{1 + 5 \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \, (Pr - 1)}$ se reduce a la analogía de Reynolds haciendo Pr = 1.

XII.4.- ANALOGÍA DE VON KÀRMÀN

Von Kàrmàn amplió la analogía de Prandtl, dividiendo el campo de flujo en *tres subcapas diferentes, viscosa, de transición y turbulenta*. Hizo suposiciones similares a las de Prandtl sobre las magnitudes relativas de las difusividades moleculares y turbulentas del calor, y de las variaciones de la cantidad de movimiento en la subcapa viscosa y en la zona turbulenta, incorporando además los efectos de la subcapa de transición, considerando que las difusividades molecular ν y turbulenta

ε_m de esta subcapa, eran del mismo orden de magnitud.

La analogía de Kàrmàn entre la transferencia de calor y la cantidad de movimiento en un flujo turbulento, dentro de un tubo circular, se expresa por la siguiente ecuación:

$$St = \frac{Nu}{Re\ Pr} = \frac{h_C}{\rho\ c_F\ u_F} = \frac{\lambda}{8}\ \frac{1}{1+5\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\ \{(Pr-1)+ln\ \frac{5\ Pr+1}{6}\}} = \left|\ \lambda = 4\ C_w\right| = \frac{C_w/2}{1+5\sqrt{\frac{C_w}{2}}\ \{(Pr-1)+ln\ \frac{5\ Pr+1}{6}\}}$$

$$Si:\ C_w = \frac{0{,}0576}{\sqrt[5]{Re_x}}\ ,\ resulta:\ Nu_x = \frac{0{,}0288\ Re_x^{0,8}\ Pr}{1+0{,}849\ Re_x^{-0,1}\ \{(Pr-1)+ln\ \frac{5\ Pr+1}{6}\}}$$

Para un flujo totalmente desarrollado hidrodinámicamente el valor del coeficiente de rozamiento λ se obtiene del diagrama de Moody, Fig X.2, o de las ecuaciones que lo definen, de la forma:

$$Para\ tuberas\ lisas:\ \frac{\varepsilon}{d} = 0\ \Rightarrow\ \begin{cases} \lambda = 0{,}3164\ Re^{-0,25}\ \ ;\ \ 2000 < Re < 10^5\ \ Blasius \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ log_{10}\left(\dfrac{Re\sqrt{\lambda}}{2{,}51}\right)\ \ ;\ \ Re > 10^5\ \ 1^a\ Ec.\ de\ Kàrmàn\text{-}Prandtl \end{cases}$$

$$Para\ tuberías\ rugosas\ \Rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ log_{10}\left(\dfrac{\varepsilon/d}{3{,}71} + \dfrac{2{,}51}{Re\ \sqrt{\lambda}}\right)\ \ ;\ \ \lambda = f(Re,\ \frac{\varepsilon}{d})\ \ Colebrook\text{-}White \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ log_{10}\dfrac{d}{2\ \varepsilon} + 1{,}74\ \ ;\ \ \lambda = f(\frac{\varepsilon}{d})\ \ 2^a\ Ec.\ de\ Kàrmàn\text{-}Prandtl \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ log_{10}\dfrac{d}{\varepsilon} + 1{,}14\ \ ;\ \ \lambda = f(\frac{\varepsilon}{d})\ \ Nikuradse \end{cases}$$

XII.5.- ANALOGÍA DE COLBURN

Colburn modifica la ecuación de la analogía de Reynolds, por otra de la forma:

$$St = \frac{l}{2\ Pr^{2/3}}\ ,\ \begin{cases} para\ tubos\ ;\ \ 0{,}7 < Pr < 160\ \ ;\ \ Re > 10.000 \\ para\ placas\ ;\ \ 0{,}7 < Pr < 160\ \ ;\ \ Re > 3{,}5.10^5 \end{cases}$$

Como la mayor resistencia a la transmisión de calor procede de la capa de fluido que se mueve en régimen turbulento, las propiedades del fluido se toman a la temperatura media de película, que representa fielmente las propiedades físicas de esta capa.

Para tubos lisos, los números de Stanton y Nuselt son de la forma:

$$St = \frac{\lambda}{2\ Pr^{2/3}} = \left|\ \lambda = 0{,}046\ Re^{-0,2}\ \right| = \frac{0{,}023\ Re^{-0,2}}{Pr^{2/3}} = \frac{h_C}{\rho\ c_F u_F} = \frac{Nu}{Re\ Pr}$$

$$Nu = 0{,}023\ Re^{0,8}\ \ Pr^{1/3}$$

ecuación que es casi idéntica a la de Dittus-Boelter, diferenciándose en que no especifica si se trata de un calentamiento o un enfriamiento.

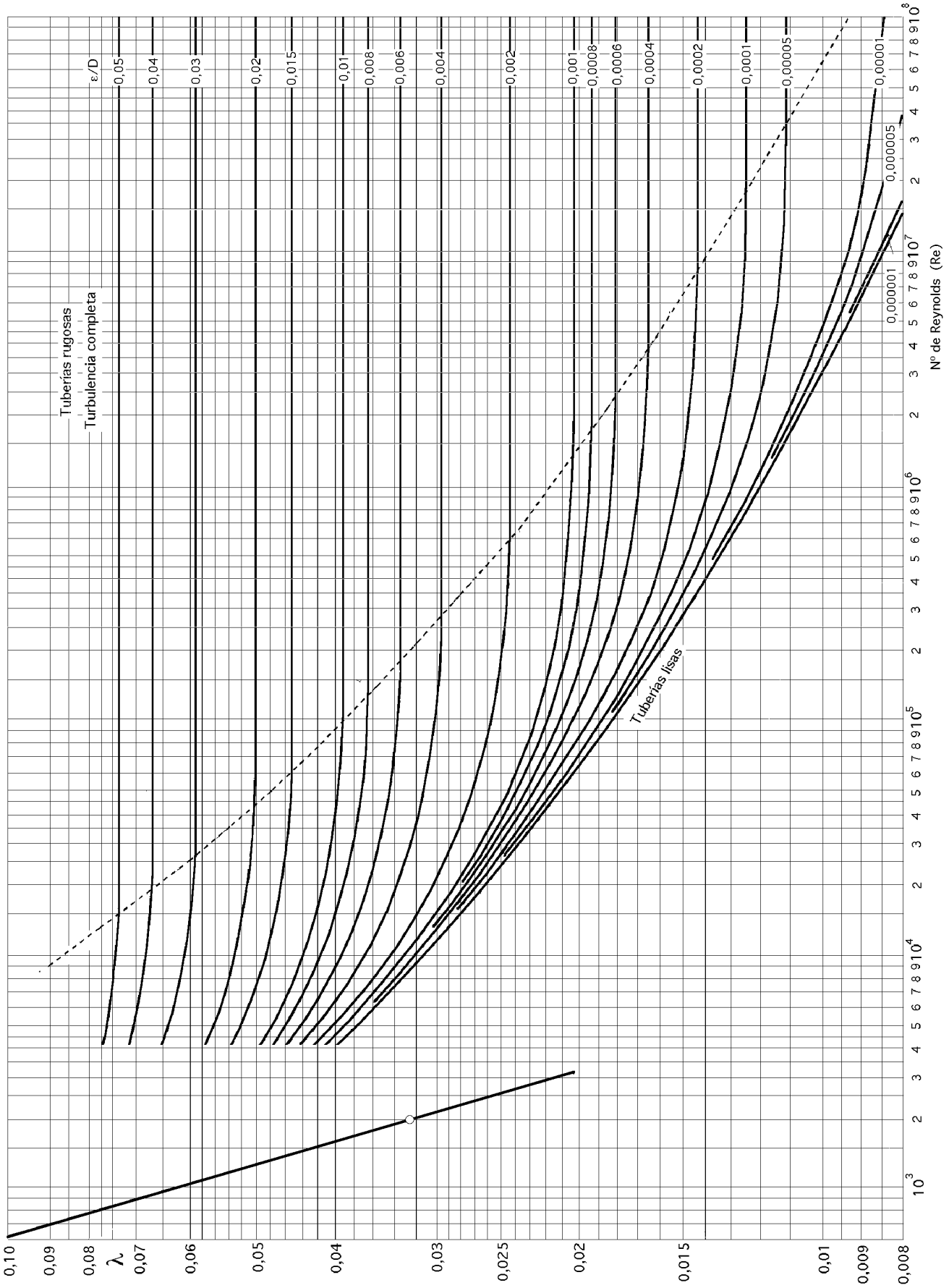

Fig XII.2.- Diagrama de Moody

Para Re > 10000, la relación $\frac{L}{d}$ *no influye en los fluidos que se calientan*

Para tener en cuenta el efecto de las variaciones radiales de la viscosidad debidas al gradiente de temperatura (pared calefactora-fluido), se introduce el factor adimensional $(\frac{\eta_F}{\eta_{pF}})^{0,14}$ que se utiliza únicamente cuando la viscosidad varía marcadamente con la temperatura, tomando la ecuación que determina el valor de h_C la forma:

$$h_C = 0,023 \frac{k_F}{d} Re^{0,8} Pr^{1/3} (\frac{\eta_F}{\eta_{pF}})^{0,14}$$

La analogía de Colburn define un factor adimensional Ψ, función del nº de Reynolds, de la forma:

$$\Psi = \frac{h_C}{c_F G} (\frac{c_F \eta}{k})^{2/3} = 0,023 (\frac{d_i G}{\mu})^{-0,2}$$

que se utiliza en gran número de ecuaciones empíricas; con carácter aproximado: $\Psi = \frac{\lambda}{8}$

XII.6.- ANÁLISIS DIMENSIONAL

TEOREMA DE BUCKINGHAN.- El Teorema establece que en un problema físico en el que intervienen *n* variables linealmente independientes, que incluyen *m* dimensiones, las variables se pueden agrupar en *(n-m)* parámetros π adimensionales, linealmente independientes.

Algunas de las variables que pueden intervenir en un determinado fenómeno son:

F, fuerza ; L, longitud ; u, velocidad ; ρ *, densidad ;* η *, viscosidad dinámica ; g, gravedad ;* c_s *, velocidad del sonido;* σ *, tensión superficial;* k_F*, conductividad térmica del fluido;* c_F*, calor específico a presión constante;* h_C *, coeficiente de convección.*

Las *dimensiones* son: *Longitud L, masa M, tiempo t y temperatura T*

Las *fuerzas F* que pueden intervenir en un fenómeno son:

$F_{inercia}$ *(debida a un gradiente de presiones)*

$F_{elástica}$

$F_{gravedad}$

$F_{viscosidad}$ *(rozamiento)*

$F_{capilaridad}$ *(tensión superficial)*

Si A_1, A_2,..., A_n son las variables consideradas, como presión, velocidad, viscosidad, etc., que se supone son esenciales a la hora de resolver un problema, podemos suponer vienen relacionadas me-

diante una expresión funcional de la forma:

$F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = 0$

y si, π_1, π_2, ..., π_{n-m}, representan los parámetros adimensionales que agrupan a las variables, A_1, A_2, ..., A_n, que incluyen, entre todas ellas, las *m* dimensiones, el Teorema de Buckinghan establece la existencia de una ecuación, función de estos parámetros, de la forma:

$f(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-m}) = 0$

El método que permite obtener los parámetros π consiste en seleccionar *m* de las *n* variables A_i, las cuales pueden tener diferentes dimensiones, pero deben ser linealmente independientes, de forma que contengan entre todas ellas las *m* dimensiones, pudiéndose emplear como variables repetitivas al combinarlas con las variables A restantes, formándose así cada parámetro adimensional π. Por ejemplo se puede suponer que A_1, A_2 y A_3 contienen las dimensiones (M, L, t), masa, longitud y tiempo, no necesariamente en cada una de ellas, pero sí en forma colectiva.

El primer parámetro π adimensional es: $\pi_1 = A_1^{x_1} \; A_2^{x_2} \; A_3^{x_3} \; A_4$

El segundo parámetro π adimensional es: $\pi_2 = A_1^{y_1} \; A_2^{y_2} \; A_3^{y_3} \; A_5$

y así sucesivamente hasta el parámetro: $\pi_{n-m} = A_1^{z_1} \; A_2^{z_2} \; A_3^{z_3} \; A_n$

Los exponentes de estas ecuaciones se tienen que examinar de tal manera que cada parámetro π resulte adimensional; se sustituyen las dimensiones de las variables A_i y los exponentes de M, L, t,... se igualan a cero por separado, formándose un sistema de ecuaciones (tres para el ejemplo propuesto), con tres incógnitas para cada parámetro π, pudiéndose determinar los exponentes *x, y, z,* y por lo tanto, los parámetros π correspondientes.

Ecuación general de resistencia.- Las variables que intervienen en el movimiento de un solido inmerso en una corriente fluida se relacionan mediante la ecuación $\frac{F}{A_L} = f(V_0, L, \rho, \eta)$, siendo la matriz correspondiente de la forma

	F/A_L	V_0	L	ρ	η
M	1	0	0	1	1
L	-1	1	1	-3	-1
t	-2	-1	0	0	-1

Si por ejemplo se eligen como variables linealmente independientes V_0, L, ρ, resulta $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ y como el número de variables *n* que intervienen en el fenómeno es 5 y el número de dimensiones *m* es 3, el número de parámetros π adimensionales que se pueden formar son 2, π_1 y π_2, de la forma:

$\pi_1 = (V_0)^{x_1} (L)^{x_2} (\rho)^{x_3} \eta = (L\, t^{-1})^{x_1} \; (L)^{x_2} \; (M\, L^{-3})^{x_3} \; (M\, L^{-1} \; t^{-1}) =$

$$= (L\ )^{x_1+x_2-3x_3-1}\ (M\ )^{x_3+1}\ (t\ )^{-x_1-1} = (L\ )^0\ (M\ )^0\ (t\ )^0$$

$$\pi_2 = (V_0\ )^{y_1}\ (L)^{y_2}\ (\rho\ )^{y_3}\ \frac{F}{A_L} = (L\ t^{-1}\ )^{y_1}\ (L)^{y_2}\ (M\ L^{-3}\ )^{y_3}\ (M\ L^{1}\ t^{-2}\ ) =$$

$$= (L\ )^{y_1+y_2-3y_3-1}\ (M\ )^{y_3+1}\ (t\ )^{-y_1-2} = (L\ )^0\ (M\ )^0\ (t\ )^0$$

Los parámetros π_1 y π_2 son:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 + 1 = 0 \\ x_1 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3\ x_3 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = -1 \ ; \ x_2 = -1 \ ; \ x_3 = -1 \ ; \ \pi_1 = V_0^{-1}\ L^{-1}\ \rho^{-1}\ \eta = Re^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_3 + 1 = 0 \\ y_1 + y_2 - 3\ y_3 - 1 = 0 \\ y_1 + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_1 = -2 \ ; \ y_2 = 0 \ ; \ y_3 = -1 \ ; \ \pi_2 = V_0^{-2}\ \rho^{-1}\ \frac{F}{A_L}$$

$$\frac{F}{A_L} = \pi_2\ \rho\ V_0^2 = \frac{1}{2}\ (2\ \pi_2\ )\ \rho\ V_0^2 = \frac{1}{2}\ C_w\ \rho\ V_0^2$$

que es la forma que toma la ecuación de resistencia, ya demostrada anteriormente.

Ecuación general de la pérdida de carga en una conducción cilíndrica.- En un conducto de sección circular la pérdida de presión debida a la fricción se conoce como pérdida de carga P, que multiplicada por la sección transversal A_T tiene que ser igual a la pérdida por fricción $\vec{F}$, o fuerza de arrastre, en la forma:

$$F = P\ \frac{\pi\ d^2}{4} = \frac{1}{2}\ (2\ \pi_2\ )\ \rho\ V_0^2\ A_L = \frac{1}{2}\ C_w\ \rho\ V_0^2\ \pi\ d\ L$$

$$P = \frac{1}{2\ d}\ (8\ \pi_2\ )\ \rho\ V_0^2\ L = \frac{\lambda\ \rho\ V_0^2\ L}{2\ d} = \frac{8\ \rho\ C_w\ V_0^2\ L}{2\ d}$$

en la que el valor de λ se determina mediante formulación empírica o ábacos y diagramas, de entre los que destaca el diagrama de Moody.

MÉTODO BÁSICO DE ANÁLISIS DIMENSIONAL.- Consiste en reducir al mínimo el número de variables que pueden intervenir en un problema, formando con las mismas una serie de grupos adimensionales independientes. En este método todas las ecuaciones racionales se pueden hacer adimensionales con un cierto número de términos independientes; las variables se acomodan en una ecuación dimensional única, de forma que la combinación de variables para formar grupos o términos adimensionales, proporciona un número de grupos independientes siempre menor que el de variables originales.

El proceso se puede iniciar identificando sólo aquellas variables que son significativas del problema; después se agrupan en una ecuación funcional y se determinan sus dimensiones.

Como aplicación directa del método, vamos a hacer un estudio inicial de la transmisión de ca-

lor desde un tubo cilíndrico a un fluido que circula por su interior en régimen turbulento.

Si se considera un flujo en convección forzada, y que el tubo está limpio y sin incrustaciones, los coeficientes de película h_C se determinan experimentalmente como función de un cierto número de factores que representan las características dinámicas del flujo y las propiedades físicas del fluido.

El rozamiento del fluido supone un intercambio de energía entre él y la superficie interna del tubo, mientras que la transmisión de calor por convección forzada supone un intercambio de energía térmica entre la superficie del tubo y el fluido; ambos fenómenos dependen del grado de turbulencia del fluido.

En general, el rozamiento de un fluido en circulación forzada depende de los siguientes factores:

- *Diámetro interior del tubo* d_i
- *Longitud del tubo* L
- *Velocidad media del fluido* u_F *en el intervalo correspondiente a la longitud* L
- *Densidad del fluido* ρ
- *Viscosidad dinámica del fluido* η
- *Rugosidad relativa del tubo* ε / d_i

La transmisión de calor depende de la conductividad k_F del fluido y de su calor específico a presión constante c_F; la determinación del coeficiente h_C de la transmisión de calor por convección forzada, se puede iniciar a partir de la ecuación:

$$\frac{Q}{A_L \Delta T} = h_C = \phi\,(d_i, u_F, \rho, \eta, L, k_F, c_F, \frac{\varepsilon}{d_i}) \quad \text{ó} \quad F\,(d_i, u_F, \rho, \eta, L, k_F, c_F, \frac{\varepsilon}{d_i}) = 0$$

y que adimensionalmente se puede expresar mediante la siguiente matriz:

	d_i	u_F	L	ρ	η	k_F	c_F	h_C
M	0	0	0	1	1	1	0	1
L	1	1	1	-3	-1	1	2	0
t	0	-1	0	0	-1	-3	-2	-3
T	0	0	0	0	0	-1	-1	-1

de 7 variables y cuyo discriminante es de razón 4, por lo que habrá que especificar de antemano el valor de 3 variables cualesquiera.

El valor de h_C se puede expresar en la forma adimensional siguiente:

$$h_c = d_i^a \; u_F^b \; \rho^c \; \eta^d \; L^e \; k_F^f \; c_F^i$$

$$(M\,t^{-3}\;T^{-1}) = (L)^a\;(L\,t^{-1})^b\;(M\,L^{-3})^c\;(M\,L^{-1}\;t^{-1})^d\;(L)^e\;(M\,L\,t^{-3}\;T^{-1})^f\;(L^2\;t^{-2}\;T^{-1})^i =$$

$$= M^{c+d+f}\;L^{a+b-3c-d+e+f+2i}\;t^{-b-d-3f-2i}\;T^{-f-i}$$

Identificando coeficientes se obtiene el sistema de 4 ecuaciones: $\begin{cases} c + d + f = 1 \\ a + b - 3\,c - d + e + f + 2 = 0 \\ b + d + 3\,f + 2\,i = 3 \\ f + i = 1 \end{cases}$

linealmente independientes, con 7 incógnitas, pudiéndose fijar 3 incógnitas, por ejemplo (i, b, e) y poner las 4 restantes en función de ellas, quedando:

$$\left.\begin{array}{l} f = 1 - i \\ d = 1 - c - f = i - c = 3 - b - 3\,f - 2\,i = 3 - b - 3 + 3\,i - 2\,i = -b + i \\ c = b \\ a = -b + 3\,c + d - e - f - 2\,i = -1 + b - e \end{array}\right\}$$

por lo que:

$$h_c = d_i^{-1+b-e}\ u_F^b\ \rho^b\ \eta^{-b+i}\ L^e\ k_F^{1-i}\ c_F^i = \left(\frac{d_i}{k_F}\right)^{-1}\left(\frac{d_i u_F \rho}{\eta}\right)^b\left(\frac{d_i}{L}\right)^{-e}\left(\frac{h\,c_F}{k_F}\right)^i$$

que a su vez se puede poner en la forma:

$$\frac{h_C\ d_i}{k_F} = \varphi\left(\frac{d_i\ u_F\ \rho}{\eta},\ \frac{d_i}{L},\ \frac{h\,c_F}{k_F}\right)$$

y que para la transmisión de calor por convección forzada, indica que si se efectúan una serie de pruebas que difieran solamente en el valor de la velocidad u_F, con los valores que así se obtengan, junto con los de h_C medidos experimentalmente, se pueden determinar la función o funciones que ligan a los grupos adimensionales

$$Re = \frac{d_i\,u_F\,\rho}{\eta} = \frac{d_i\,u_F}{\nu} \quad ; \quad Nu = \frac{h_C\,d_i}{k_F} \quad ; \quad Pr = \frac{c_F\,\eta}{k_F}$$

que sólo serán válidas para valores particulares de los demás grupos adimensionales; por lo tanto:

$$Nu = \varphi\left(Re,\ Pr,\ \frac{d_i}{L}\right)$$

modelo que no admite cambios de estado en el fluido que circula; la formulación desarrollada es muy adecuada para estudiar la influencia de la velocidad u_F sobre el coeficiente de transmisión de calor por convección forzada h_C de un sistema cualquiera, pues estas dos variables aparecen una sola vez.

El procedimiento normal para determinar los exponentes *(b, e, i)* a partir de datos experimentales consiste en igualar el calor transmitido al fluido por convección, con la variación de entalpía que experimenta por esta causa.

Calor transmitido al fluido por convección:

$$Q = h_C\ A_L\ (T_{pF} - T_F)$$

Variación de la entalpía del fluido:

$$Q = m\ c_F\ (T_{sal} - T_{ent}) = A_T\ u_F\ \rho\ c_F\ (T_{sal} - T_{ent}) = G\ A_T\ c_F\ (T_{sal} - T_{ent}) = G\ A_T\ (i_{sal} - i_{ent})$$

en la que: $\begin{cases} G \text{ es la velocidad másica} = 3600\ u_F \rho, kg/m^2 hora, \text{ viniendo } u_F \text{ en } m/seg \\ A_T \text{ es el área de la sección transversal del tubo correspondiente al diámetro interior} \\ A_L \text{ es el área de la superficie de la pared en contacto con el fluido} \end{cases}$

Igualándolas se obtiene:

$$\frac{h_C}{c_F G} = \frac{A_T\ (T_{sal} - T_{ent})}{A_L\ (T_{pF} - T_F)} = St = \frac{Nu}{Re\ \ Pr}$$

El número de Stanton *St* se calcula a partir de datos de Laboratorio.

Para *fluidos que se calientan en el interior de tubos,* se aplica satisfactoriamente la ecuación de Dittus-Boelter, función de los números de Nusselt, Reynolds y Prandtl, de la forma:

$Nu = 0{,}023\ Re^{0,8}\ Pr^{0,4}$, siendo: $\begin{cases} Pr = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{c_F \eta}{k_F} \\ Nu = \dfrac{h_C \Delta T}{k_F \Delta T} L = \dfrac{h_C L}{k_F} \end{cases}$

en la que: $\begin{cases} \text{- El coeficiente de convección } h_c \text{ (} Kcal/hora\ m^2\ °C) \\ \text{- La conductividad térmica } k_F \text{ del fluido (} Kcal/m°C) \\ \text{- La velocidad másica } G \text{ (} kg/m^2 \text{ hora)} \end{cases}$

El número de Nusselt es la relación entre el calor transmitido por convección y el calor transmitido por conducción, siendo L la longitud característica.