XIII.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN NATURAL Y FORZADA

pfernandezdiez.es

La complejidad de la mayoría de los casos en los que interviene la transferencia de calor por convección, hace imposible un análisis exacto, teniéndose que recurrir a correlaciones de datos experimentales; para una situación particular pueden existir diversas correlaciones procedentes de distintos grupos de investigación; además, con el paso del tiempo, determinadas correlaciones antiguas se pueden sustituir por otras más modernas y exactas, de forma que al final, los coeficientes de transferencia de calor calculados a partir de correlaciones distintas no son iguales, y pueden diferir, en general, en más de un 20%, aunque en circunstancias complicadas las discrepancias pueden ser mayores. En la convección natural, el fluido próximo a la pared se mueve bajo la influencia de fuerzas de empuje originadas por la acción conjunta de los cambios en su densidad y el campo gravitatorio terrestre.

XIII.1.- CORRELACIONES ANALÍTICAS PARA LA CONVECCIÓN NATURAL EN PLACA PLANA VERTICAL

Uno de los problemas más simples y comunes de convección natural acontece cuando una superficie vertical se somete a un enfriamiento o a un calentamiento mediante un fluido.

Por comodidad supondremos que las capas límite térmica e hidrodinámica coinciden Pr = 1; en principio, la capa límite es laminar, pero a una cierta distancia del borde, y dependiendo de las propiedades del fluido y del gradiente térmico, puede suceder la transición a régimen turbulento, lo cual sucede cuando $(Gr\ Pr) > 10^9$, Fig XIII.1; el número de Grashoff es de la forma:

$$Gr = \frac{g\ \beta\ \Delta T\ L^3}{\nu^2} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{v_F}\ \frac{v - v_F}{T - T_F} \quad ; \quad \text{Para un gas ideal: } \beta = \frac{1}{T\ ^o(K)}$$

Dado que la convección natural es consecuencia de una variación de la densidad, el flujo correspondiente es un flujo compresible; pero, como la diferencia de temperaturas entre la pared y el fluido es pequeña, se puede hacer un análisis, tanto de las componentes de la velocidad *u(x,y), v(x,y)* como de la temperatura *T(x,y)*, considerando a la densidad constante, excepto en el término *(ρ g)* en el que ρ se debe considerar como función de la temperatura, ya que la variación de ρ en este término es el causante de la fuerza ascensional.

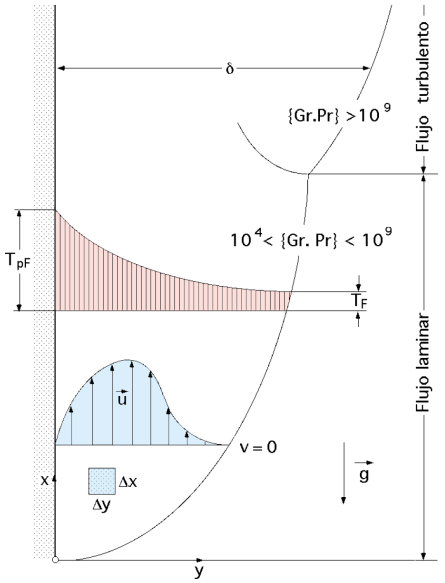


Fig XIII.1.- Convección natural en placa vertical

La tercera ecuación de Navier-Stokes proporciona:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{dp}{dx} = -\,g\ -\ \frac{du}{dt} + \nu\ \Delta u$$

$$\rho\ (u\ \frac{\partial u}{\partial x} + v\ \frac{\partial u}{\partial y}) = -\ \frac{\partial p}{\partial x}\ -\ \rho\ g + \eta\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Gradiente de presiones a lo largo de la placa vertical:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\ \rho_F\ g\ \ ;\ \ \ \frac{1}{\rho}\ (-\ \rho_F\ g) = -\ g\ -\ \frac{du}{dt} + \nu\ \Delta u$$

siendo ρ_F la densidad del fluido fuera de la capa límite.

Como el fluido al calentarse o enfriarse modifica su densidad, en el intervalo de temperaturas T_F y T, se tiene:

$$g\ (\rho_F - \rho) = \rho\ g\ (\frac{\rho_F}{\rho}\ -\ 1)$$

siendo ρ_F la densidad del fluido a la temperatura T_F y ρ la densidad del fluido del interior de la capa límite a la temperatura *T*; como el volumen específico del fluido es:

$$v = v_F\ \{1 + \beta\ (T - T_F)\}\ \ ;\ \ \frac{\rho_F}{\rho} = 1 + \beta\ (T - T_F)\ \ \Rightarrow\ \ \frac{\rho_F}{\rho}\ -\ 1 = \beta\ (T - T_F)$$

$$\rho\ g\ (\frac{\rho_F}{\rho}\ -\ 1) = \rho\ g\ \beta\ (T - T_F) = \rho\ g\ \beta\ \Delta T$$

Teniendo en cuenta ecuaciones anteriores, la tercera ecuación de Navier-Stokes, (ecuación del momento), la ecuación de la energía y la ecuación de continuidad, quedan en la forma:

Ecuación del momento: $u\ \frac{\partial u}{\partial x} + v\ \frac{\partial u}{\partial y} = g\ \beta\ (T - T_F) + \nu\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Ecuación de la energía: $u\ \frac{\partial T}{\partial x} + v\ \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

Ecuación de continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Las condiciones de contorno para una placa vertical isoterma son:

$$Para: \begin{cases} y = 0 \;\; ; \;\; u = 0 \;\; ; \;\; v = 0 \;\; ; \;\; T = T_{pF} \\ y = \infty \;\; ; \;\; u = 0 \;\; ; \;\; T = T_F \;\; ; \;\; \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \;\; ; \;\; \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Solución integral en pared isoterma.- La ecuación integral del momento de la cantidad de movimiento de la capa límite es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^d u^2 \, dy = \int_0^d g \, \beta \, (T - T_F) \, dy + \nu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle_{y=0}$$

en la que se ha supuesto que los espesores de las capas límite térmica e hidrodinámica son iguales.

La ecuación integral de la energía de la capa límite es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^d (T_F - T) \, u \, dy = \alpha \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{y=0}$$

y los perfiles de velocidades y temperaturas: $\begin{cases} \dfrac{u}{V} = \dfrac{y}{\delta} \left(1 - \dfrac{y}{\delta} \right)^2 \\ \Phi = \dfrac{T - T_F}{T_{pF} - T_F} = \left(1 - \dfrac{y}{\delta} \right)^2 \end{cases}$, en la que V es una velocidad ficticia, función de x.

Las expresiones de V y δ se pueden poner en la forma: $\begin{cases} V = C_1 \sqrt{x} \\ \delta = C_2 \sqrt[4]{x} \end{cases}$

Integrando las ecuaciones del momento y de la energía, resultan:

Ecuación del momento: $\dfrac{1}{105} \dfrac{\partial}{\partial x} (V^2 \delta) = \dfrac{1}{3} g \, \beta \, (T_{pF} - T_F) \, \delta - \nu \dfrac{V}{g}$

Ecuación de la energía: $2 \, \alpha \dfrac{T_{pF} - T_F}{\delta} = \dfrac{1}{30} (T_{pF} - T_F) \dfrac{\partial}{\partial x} (V \delta)$

y teniendo en cuenta que: $\begin{cases} V = C_1 \sqrt{x} \\ \delta = C_2 \sqrt[4]{x} \end{cases}$, resulta:

$$\frac{\delta}{x} = 3{,}93 \sqrt[4]{\frac{0{,}952 + Pr}{Gr_x \, Pr^2}}$$

$$V = 5{,}17 \, \frac{\nu}{x} \sqrt{\frac{Gr_x}{0{,}952 + Pr}}$$

$$\frac{Q}{A} = - k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{y=0} = h_{cF} \, (T_{pF} - T_F) = \frac{2 \, k}{\delta} (T_{pF} - T_F) \;\; ; \;\; h_{cF} = \frac{2 \, k}{\delta}$$

$$Nu_x = 0{,}508 \sqrt[4]{\frac{Gr_x \, Pr^2}{0{,}952 + Pr}} \;\; ; \;\; Nu = \frac{4 \, Nu_x}{3} \;\; ; \;\; Gr.Pr < 10^9$$

Si, Ra > 10^9, el flujo comienza a ser turbulento, y suponiendo un perfil de velocidades (m = 7)

se encuentra:

$$Nu_x = 0{,}0295 \left(\frac{Gr_x \; Pr^{7/6}}{1 + 0{,}494 \; Pr^{2/3}} \right)^{2/5}$$

$$Nu = 0{,}021 \; Ra_L^{2/5}$$

viniendo expresado h_C en, Kcal/hora m^2°C, la conductividad térmica k_F del fluido en, Kcal/m°C y la velocidad másica G en, kg/m^2 hora.

Placa isotérmica.- Pohlhausen considera que los perfiles de velocidad y temperatura en convección natural presentan propiedades similares, en forma análoga a las observadas por Blasius para la convección forzada, de forma que:

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt[4]{\frac{Gr_x}{4}} \quad ; \quad \Phi = \frac{T - T_F}{T_{pF} - T_F} = \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2$$

La distribución de temperaturas permite determinar el flujo de calor local, de la forma:

$$\frac{Q}{A} = - k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{y=0} = - \frac{k}{x} (T_{pF} - T_F) \sqrt[4]{\frac{Gr_x}{4}} \left. \frac{d\Phi}{d\eta} \right\rangle_{\eta=0} = h_{cF} \; (T_{pF} - T_F)$$

obteniéndose el número de Nu local:

$$Nu_x = f(Pr) \sqrt[4]{\frac{Gr_x}{4}}$$

viniendo los valores de f(Pr) en la Tabla XIII.1.

Tabla XIII.1

Pr	*0,01*	*0,72*	*0,733*	*1*	*2*	*10*	*100*	*1000*
f(Pr)	*0,0812*	*0,5046*	*0,508*	*0,5671*	*0,7165*	*1,1694*	*2,191*	*3,966*

El número de Nu medio, $Nu = \frac{4}{3} f(Pr) \sqrt[4]{\frac{Gr_L}{4}}$, es un resultado válido para convección forzada en régimen laminar, en el intervalo, $10^4 < (Gr \; Pr) < 10^9$, con propiedades del fluido constantes, excepto la densidad; las propiedades se evalúan a la siguiente temperatura de referencia:

$$T_{ref} = T_{pF} + 0{,}38 \, (T_F - T_{pF})$$

Placa con flujo de calor constante.- Las ecuaciones del momento, energía y continuidad anteriores, son válidas para un flujo de calor uniforme $\frac{Q}{A} = Cte$ a lo largo de la placa; con esta condición se tiene:

$$Nu = F(Pr) \sqrt[4]{\frac{Gr_L}{4}} \; , \; siendo: \; 0{,}95 \; F(Pr) = \frac{4}{3} f(Pr)$$

Los valores de F(Pr) vienen dados en la Tabla XIII.2.

Tabla XIII.2

Pr	*0,01*	*1*	*10*	*100*
F(Pr)	*0,335*	*0,811*	*1,656*	*3,083*

XIII.2.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN NATURAL EN PLACAS

Para la determinación de los coeficientes de transmisión de calor por convección natural, con *superficie isoterma* a T_p, en los casos de $\begin{cases} \text{- Pared vertical de altura L, (no se define la anchura)} \\ \text{- Tubo vertical con } \dfrac{d}{L} > \dfrac{35}{\sqrt[4]{Gr_L}} \\ \text{- Tubo horizontal de diámetro d} \end{cases}$, se utiliza una ecuación general de la forma:

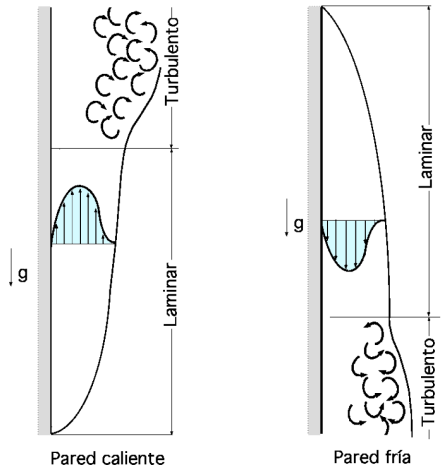


Fig XIII.2.- Capas límite laminar y turbulenta en la convección natural sobre paredes verticales

$$Nu_L = C\,(Ra_L)^n$$

que depende de los números de Grashoff, $Gr = \dfrac{g\,\beta}{\nu^2}\,\Delta T\,L^3$, y Rayleigh, $Ra = Gr\,Pr$

Las propiedades térmicas del fluido se toman a la temperatura media de la película, a excepción del coeficiente de dilatación térmica β que se evalúa a la temperatura del fluido T_F.

Para el caso de un gas ideal, el valor de β *se puede aproximar por* $\beta \simeq \dfrac{1}{T_F\,(^oK)}$

ΔT es la diferencia entre la temperatura de la pared y del fluido

L es una longitud característica y los valores de C y n vienen dados en las Tablas XIII.3.

Estas ecuaciones se pueden aplicar a la convección libre laminar desde placas verticales isotermas o superficies con flujo térmico uniforme, tomando la temperatura de la superficie en el punto medio de la placa.

Tablas XIII.3.- Valores de las constantes de la ecuación de Nusselt para convección natural

Planos verticales y cilindros verticales

	$1700 < Ra < 10^6$	$10^8 < Ra < 10^{10}$	$10^{10} < Ra < 10^{13}$
C	*0,59*	*0,13*	*0,021*
n	*0,25*	*0,33*	*0,4*

Planos horizontales y cilindros horizontales

	$10^4 < Ra < 10^9$	$10^9 < Ra < 10^{12}$
C	*0,53*	*0,13*
n	*0,25*	*0,33*

Superficie superior de placas calientes o superficie inferior de una placa fría

	$2.10^4 < Ra < 8.10^6$	$8.10^6 < Ra < 10^{11}$
C	*0,54*	*0,15*
n	*0,25*	*0,33*

Superficie inferior de placas calientes o superficie superior de placas frías

$10^5 < Ra < 10^{11}$	$C = 0,58$	$n = 0,20$

Para el estudio de la convección libre alrededor de placas planas rectangulares horizontales, se toma como longitud característica la media aritmética de sus dos dimensiones, o bien el 90% de su diámetro en el caso de discos circulares horizontales.

Convección natural sobre placa vertical.- El espesor de la capa límite viene dado por la expresión:

$$\frac{\delta}{x} = 3,93 \sqrt[4]{\frac{0,952 + Pr}{Gr_x \; Pr^2}}$$

y el número de Nu_x por:
$$\begin{cases} Nu_x = 0,508 \sqrt[4]{\dfrac{Gr_x \; Pr^2}{0,952 + Pr}} \;\; ; \;\; Nu = \dfrac{4\, Nu_x}{3} \;\; ; \;\; Gr\, Pr < 10^9 \\ Nu_x = 0,0295 \left(\dfrac{Gr_x \; Pr^{7/6}}{1 + 0,494\, Pr^{2/3}} \right)^{2/5} \;\; ; \;\; Ra > 10^9 \end{cases}$$

El nº de Nusselt medio: $Nu_L = 0,021\, Ra_L^{2/5} \;\; ; \;\; Ra > 10^9$

Convección natural sobre placa vertical a temperatura uniforme.- Para determinar el coeficiente de convección natural en *flujo laminar* ($Ra_L < 10^8$) con temperatura de pared vertical uniforme, se pueden utilizar los valores de la Tabla XIII.1:

$$Nu_L = C\, (Ra_L)^n = \left| \begin{matrix} n = 0,25 \\ C = 0,59 \end{matrix} \right| = 0,59\, Ra_L^{0,25} \;\; , \; para: \; \begin{cases} 1700 < Ra_L < 10^8 \\ 1 < Pr < 10 \end{cases}$$

o también: $Nu_L = 0,68 + \dfrac{0,67\, Ra_L^{0,25}}{\{1 + (\dfrac{0,492}{Pr})^{9/16}\}^{4/9}} \;\; , \; para: \; \begin{cases} Ra_L < 10^9 \\ 1 < Pr < 10 \end{cases}$

Para el *flujo de transición laminar-turbulento* ($10^8 < Ra_L < 10^{10}$)

$$Nu_L = C\, (Ra_L)^n = \left| \begin{matrix} n = 0,33 \\ C = 0,13 \end{matrix} \right| = 0,13\, Ra_L^{0,33} \;\; , \; para: \; \begin{cases} 10^8 < Ra_L < 10^{10} \\ 1 < Pr < 10 \end{cases}$$

Para flujos con turbulencia muy desarrollada ($10^9 < Ra_L < 10^{12}$) :

$$Nu_L = C\, (Ra_L)^n = \left| \begin{matrix} n = 0,40 \\ C = 0,021 \end{matrix} \right| = 0,021\, Ra_L^{0,4} \;, \; para: \; \begin{cases} 10^{10} < Ra_L < 10^{13} \\ 1 < Pr < 10 \end{cases}$$

$$Nu_L = 0,68 + \frac{0,67\, Ra_L^{0,25}}{\{1 + (\dfrac{0,492}{Pr})^{9/16}\}^{4/9}} \{1 + 1,6.10^{-8}\, Ra_L \; \psi\}^{1/12} \;, \; para: \; \begin{cases} 10^9 < Ra_L < 10^{12} \\ 1 < Pr < 10 \end{cases}$$

en la que:

$$\psi = \{ 1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16} \}^{-16/9} \quad ; \quad Nu_y = 0,059 \frac{Pr^{1/3}\ Ra_y^{2/5}}{\{1 + 0,494\ Pr^{2/3}\}^{2/5}} \quad ;$$

En la gráfica de la Fig XIII.3 se exponen las correlaciones anteriores en régimen laminar y turbulento, hacia o desde una placa plana vertical de altura L, considerando en el eje de ordenadas Nu_L y en el eje de abscisas $(Gr_L\ Pr)$, que se pueden aplicar también al caso de cilindros verticales.

Una expresión general que las engloba, válida tanto para régimen laminar como turbulento es:

$$\sqrt{Nu} = 0,825 + \frac{0,387\ Ra_L^{1/6}}{\{1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16} \}^{8/27}} \quad , \ para:\ 10^{-1} < Ra_L < 10^{12}$$

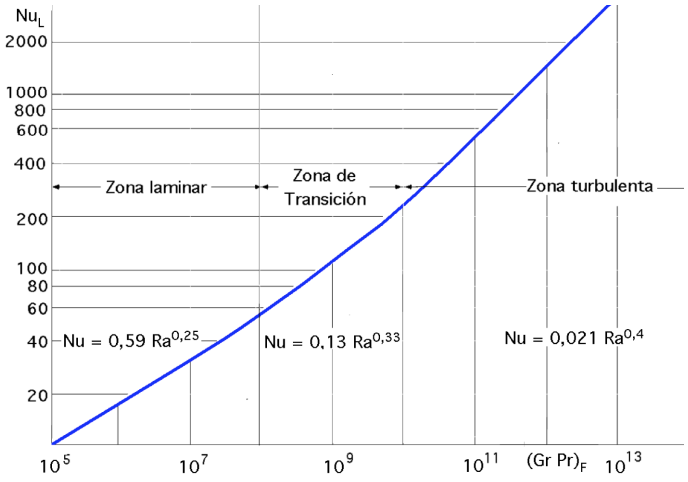


Fig XIII.3.- Correlación para la convección natural en placas y tubos verticales

En la formulación propuesta, si una de las caras de la pared está aislada térmicamente, los valores del número de Nusselt serían la mitad de lo indicado en las fórmulas.

Para el caso particular del aire, a temperaturas normales, el coeficiente de transferencia de calor local para una placa vertical isotérmica se puede aproximar por las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que para el aire la transición de régimen laminar a turbulento es $Gr_x \approx 10^9$:

Flujo laminar: $h_{c(x)} = 1,07 \sqrt[4]{\frac{\Delta T}{x}} \quad \frac{W}{m^2\ ^oK}$

Flujo turbulento: $h_{c(x)} = 1,3 \sqrt[3]{\Delta T} \quad \frac{W}{m^2\ ^oK}$

observándose que el coeficiente de convección local es independiente de x en régimen turbulento.

El coeficiente de convección medio para toda la placa vertical es:

$$h_c = \frac{1}{L} \int_0^L h_{c(x)}\, dx = \frac{1}{L} \{ \int_0^{x_{crit}} 1,07 \sqrt[4]{\frac{\Delta T}{x}}\ dx + \int_{x_{crnt}}^L 1,3 \sqrt[3]{\Delta T}\ dx \} \frac{W}{m^2\ ^oK}$$

Convección natural sobre placa vertical con flujo de calor uniforme.- En esta situación se utiliza un número de Grashoff modificado Gr_x^*, de la forma:

$$Gr_r^* = Gr_x\ Nu_x = \frac{g\ \beta\ q_p x^4}{k\ \nu^2}$$

siendo q_p el flujo de calor en la pared y: $Nu_x = \frac{h_{cF_{(x)}}\ x}{k}$

Régimen laminar: $Nu = 1{,}25\ (Nu_x)_{x=L}$; $Nu_x = 0{,}60\ (Gr_x^*\ Pr)^{1/5}$; $10^5 < Gr_x^*\ Pr < 10^{11}$

Otra expresión para convección natural laminar, con flujo de calor uniforme es:

$$Nu\ (Nu - 0{,}68) = \frac{0{,}67\ (Gr_L^*\ Pr)^{1/4}}{\{1 + (\frac{0{,}492}{Pr})^{9/16}\}^{4/9}} \quad ; \quad 10^5 < Gr_L^*\ Pr < 10^{11}$$

Régimen turbulento: $Nu = 1{,}136\ (Nu_x)_{x=L}$; $Nu_x = 0{,}568\ (Gr_x^*\ Pr)^{0{,}22}$; $10^{13} < Gr_x^* Pr < 10^{16}$

Convección natural sobre una placa inclinada un ángulo θ**.-** Si la placa caliente se inclina un pequeño ángulo θ respecto a la vertical, se puede tomar un número de Grashoff igual al número de Grashoff calculado para placa vertical multiplicado por cos θ, es decir:

$$Gr = Gr_{placa\ vertical}\ \cos\theta$$

Si la superficie caliente mira hacia arriba: $Nu = 0{,}56\ \sqrt[4]{Gr_L Pr \cos\theta}$, *para:* $\begin{cases}\theta < 88^o \\ 10^5 < Ra_L < 10^{11}\end{cases}$

Si la superficie caliente mira hacia abajo:

$$Nu = 0{,}145\ (Gr_L Pr)^{0{,}33} - (Gr_c Pr)^{0{,}33} + 0{,}56\ (Gr_c Pr \cos\theta)^{0{,}25}$$

$$Gr_L\ Pr < 10^{11} \quad ; \quad Gr_L > Gr_c \quad ; \quad \begin{cases}\theta = 15^o \Rightarrow\ Gr_c = 5.10^9 \ ; \ \theta = 30^o \Rightarrow\ Gr_c = 10^9 \\ \theta = 60^o \Rightarrow\ Gr_c = 10^8 \ ; \ \theta = 75^o \Rightarrow\ Gr_c = 10^6\end{cases}$$

En esta ecuación, las propiedades físicas del fluido y de β se evalúan, respectivamente, a las temperaturas: $\begin{cases}Fluido:\ T = T_{pF} - 0{,}25\ (T_{pF} - T_F) \\ \beta \rightarrow\ T = T_F + 0{,}25\ (T_{pF} - T_F)\end{cases}$

Convección natural sobre placa horizontal.- El número de Nusselt viene dado por la expresión:

$$Nu = C\ (Ra_L)^n$$

Placa horizontal, a temperatura uniforme:

- Superficie caliente hacia arriba o fría hacia abajo: $\begin{cases}C = 0{,}54 \\ n = 0{,}25\end{cases}$; $10^5 < Ra_L < 10^7$

- Superficie caliente hacia abajo o fría hacia arriba: $\begin{cases}C = 0{,}13 \\ n = 0{,}33\end{cases}$; $10^7 < Ra_L < 10^{10}$

Placa horizontal, con flujo de calor uniforme:

- Superficie caliente mirando hacia arriba: $\begin{cases}Nu = 0{,}13\ Ra_L^{1/3} \ ; \quad Ra_L < 2.10^8 \\ Nu = 0{,}16\ Ra_L^{1/3} \ ; \ 5.10^8 < Ra_L < 10^{11}\end{cases}$

en las que L es la longitud de $\begin{cases}- \text{ los lados en el caso de placa cuadrada} \\ - \text{ el lado más corto en el caso de placa rectangular}\end{cases}$

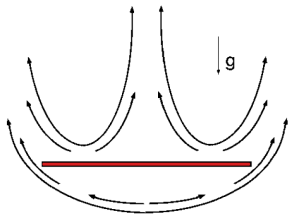


Fig XIII.4.- Convección natural laminar alrededor de una placa horizontal caliente

Cuando $Ra_L = 10^7$ se originan unas corrientes térmicas turbulentas irregulares sobre la placa dando como resultado un nº de Nu medio que no depende del tamaño ni de la forma de la placa

- *Superficie caliente mirando hacia abajo:*

$$Nu = 0{,}58\, Ra_L^{0,2} \quad ; \quad 10^6 < Ra_L < 10^{11}$$

en la que las propiedades del fluido se toman a la temperatura: $T = T_{pF} - 0{,}25\,(T_{pF} - T_F)$ y las de β a la temperatura media de película.

El número de Nusselt medio es: $Nu = \dfrac{h_{cF}\ L}{k} = \dfrac{q_p\ L}{(T_{pF} - T_F)\,k}$

Existe una correlación general para placa horizontal que se calienta hacia abajo, con extensiones adiabáticas desarrollada por Hatfield y Edwards, como se muestra en la Fig XIV 5, de la forma:

$$Nu_A = 6{,}5\,(1 + 0{,}38\,\frac{A}{L})\,\{(1 + X)^{0,39} - X^{0,39}\}\,Ra_A^{0,13}\ ,\ para:\ \begin{cases} 10^6 < Ra < 10^{10} \\ 0{,}7 < Pr < 4800 \\ 0 < a/A < 0{,}2 \end{cases}$$

$$con:\ X = 13{,}5\, Ra_A^{-0,16} + 2{,}2\,(\frac{a}{A})^{0,7}$$

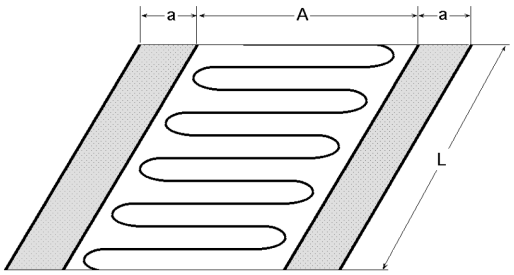


Fig XIII.5.- Esquema de una placa horizontal que se calienta hacia abajo en la que las extensiones adiabáticas están sombreadas

Convección natural entre placas horizontales.- Este caso se presenta cuando un fluido circula entre dos placas, como paredes con cámara de aire, o ventanas de doble vidrio, o paneles solares, etc. La longitud característica que se utiliza normalmente para determinar el nº de *Nu* es la distancia *d* entre las dos placas.

Si el flujo se efectúa entre planos de superficie A, separados una distancia *d*, con temperaturas de placa T_h y T_c siendo k_F la conductividad térmica efectiva del fluido confinado se tiene:

$$\frac{Q}{A} = \frac{k_F\ (T_h - T_c)}{d}$$

Si la diferencia de temperaturas $(T_h - T_c)$ es menor que el valor requerido para que el fluido se

vuelva inestable, el calor se transmite a través de la capa sólo por conducción, $h_C = \frac{k}{d}$; $Nu_d = 1$, por lo que las correlaciones del número de Nusselt tienen siempre un límite inferior $(Nu_d = 1)$ que corresponde a la conducción pura.

Una capa horizontal calentada por la parte inferior se vuelve inestable para un determinado valor de $(T_h - T_c)$ apareciendo celdas de convección para un valor de Ra_d de la forma:

$$Ra_d = \frac{g\,\beta\,(T_h - T_c)\,d^3}{\nu\,\alpha} = 1708$$

y si la temperatura sigue aumentando, se van creando situaciones de flujo cada vez más complejas hasta que, finalmente, el flujo en el centro se vuelve turbulento.

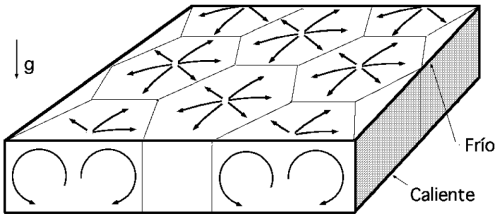


Fig XIII.6.- Convección natural celular en una capa horizontal de fluido confinado entre dos placas paralelas

Si se toma el aire como fluido, y considerando la placa inferior como la más caliente, Fig XIII.6, se tiene:

$Nu = 0{,}195\ Gr^{0,25}$, *para:* $10^4 < Gr < 4.10^5$

$Nu = 0{,}068\ Gr^{0,33}$, *para:* $4.10^5 < Gr < 10^7$

Tomando como fluido un líquido de nº de Pr moderado, (como el agua), y considerando la placa inferior como la más caliente, se tiene:

$$Nu_d = 0{,}069\ Gr_d^{0,33}\ Pr^{0,407}\ ,\ \text{para: } 3.10^5 < Ra_d < 7.10^9$$

Convección natural entre placas verticales.- Para espacios confinados, en los que el fluido sometido a convección circula entre placas verticales de altura L, el efecto térmico se puede expresar como un simple cambio en la conductividad térmica del fluido; la circulación se da para cualquier valor de $Ra_d > 0$.

- Cuando $Ra_d < 10^3$ se efectúa la transferencia de calor por conducción pura; al aumentar Ra_d el flujo se desarrolla y se forman celdas de convección

- Cuando $Ra_d = 10^4$ el flujo pasa a ser tipo capa límite, con capas que fluyen hacia arriba sobre la pared caliente y hacia abajo sobre la pared fría, mientras que en la región central el flujo permanece prácticamente estacionario.

- Cuando $Ra_d = 10^5$ se desarrollan hileras verticales de vórtices horizontales en el centro del flujo

- Cuando $Ra_d = 10^6$ el flujo en el centro se vuelve turbulento

Valores de Nu para el aire con $\frac{L}{d} > 3$, son:

$$\begin{cases} Nu = 1\ ,\ \text{para: } Gr < 2.000 \\ Nu_L = 0{,}18\ Gr^{0,25}\ (\frac{d}{L})^{0,11}\ ,\ \text{para: } 2.10^3 < Gr < 2.10^4 \\ Nu_L = 0{,}065\ Gr^{0,33}\ (\frac{d}{L})^{0,11}\ ,\ \text{para: } 2.10^4 < Gr < 10^7 \end{cases}$$

Convección natural entre placas inclinadas.- Para la transferencia de calor a través de capas delgadas de aire de longitud L, se pueden presentar los siguientes casos, según sea la inclinación θ de la capa respecto a la horizontal:

a) $0 < \theta < 60^o \;\; ; \;\; 0 < Ra_d < 10^5$

$$Nu_L = 1 + 1{,}44\,(1 - \frac{1708}{Ra_d\ \cos\theta})\,\{1 - \frac{1708\,(sen\ 1{,}8\,\theta)^{1{,}6}}{Ra_d\ \cos\theta}\} + \{(\frac{Ra_d\ \cos\theta}{5830})^{1/3} - 1\}$$

en la que los términos entre corchetes deben hacerse c < q < 90ºero si salen negativos.

b) $\theta = 60^o \;\; ; \;\; 0 < Ra_d < 10^7$ *; el valor de* Nu_d *se tomará el máximo de entre los siguientes:*

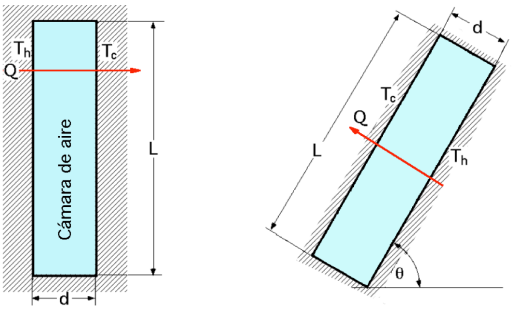


Fig XIII.7.- Recinto vertical e inclinado

$$Nu_d = (0{,}104 + \frac{0{,}175\ d}{L})\ Ra_d^{0{,}283}$$

$$Nu_d^7 = 1 + (\frac{0{,}0936\ Ra_d^{0{,}314}}{1 + \frac{0{,}5}{\{1 + (\frac{Ra_d}{3160})^{20{,}6}\}^{0{,}1}}})^7$$

c) $60^o < \theta < 90^o \;\; ; \;\; Nu_d = \frac{90 - \theta}{30}\ Nu_{d(60^o)} + \frac{\theta - 60}{30}\ Nu_{d(90^o)}$

d) $\theta = 90^o \;\; ; \;\; 10^3 < Ra_d < 10^7$ *; el valor de* Nu_d *se tomará el máximo de entre los siguientes:*

$$Nu_d = 0{,}0605\ \sqrt[3]{Ra_d}$$

$$Nu_d = \sqrt[3]{1 + (\frac{0{,}104\ Ra_d^{0{,}293}}{1 + (\frac{6310}{Ra_d})^{1{,}36}})^3}$$

$$Nu_d = 0{,}242\,(\frac{Ra_d\ d}{L})^{0{,}272} \;\; , \; para: \begin{cases} Ra_d < 10^3 \\ Nu_{d(90^o)} = 1 \end{cases}$$

XIII.3.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN NATURAL EN TUBOS

Convección natural sobre un tubo o un cilindro horizontal

a) El número de Nusselt medio para la convección natural hacia y desde cilindros horizontales, se puede calcular a partir de la ecuación: $Nu = C\,(Ra)^n$ en la que los valores de las constantes se pueden tomar de la Tabla correspondiente, o a partir de la gráfica de la Fig XIII.8.

Unas expresiones más exactas son:

$$Para\ flujo\ laminar:\ Nu_d = 0{,}36 + \frac{0{,}518\ Ra_d^{1/4}}{\{1 + (\frac{0{,}56}{Pr})^{9/16}\}^{4/9}} \;\; , \;\; con: \begin{cases} 10^{-6} < Ra_d < 10^9 \\ Pr > 0{,}5 \end{cases}$$

Para flujo turbulento: $\sqrt{Nu_d} = 0{,}60 + 0{,}387 \sqrt[6]{\dfrac{Ra_d}{\{1 + (\dfrac{0{,}56}{Pr})^{9/16}\}^{16/9}}}$, *con:* $\begin{cases} Ra_d > 10^9 \\ Pr > 0{,}5 \end{cases}$

expresiones que no coinciden para $Ra_d = 10^9$.

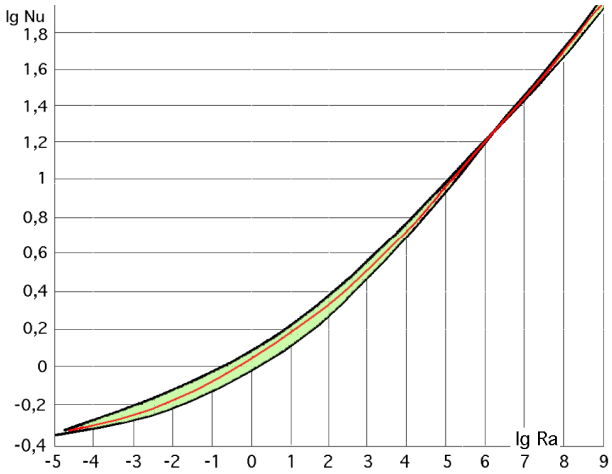


Fig XIII.8.- Correlación para la convección natural hacia y desde cilindros horizontales

b) Para la transferencia de calor desde cilindros en posición horizontal hacia metales líquidos, se puede utilizar:

$Nu = 0{,}53 \sqrt[4]{Gr\, Pr^2}$

o también la ecuación de Baher: $Nu = 0{,}445 \sqrt[4]{Ra} + 0{,}1183 \sqrt[8]{Ra} + 0{,}41 \quad ; \quad 10^{-5} < Ra < 10^4$

c) En convección natural para el caso particular del aire y gases, para tubos horizontales y verticales calientes, se puede aplicar la formulación:

$$\begin{cases} \text{Flujo laminar: } h_C = 1{,}18 \sqrt[4]{\dfrac{\Delta T}{d}} \ \dfrac{W}{m^2\, ^oK} \\ \text{Flujo turbulento: } h_c = 1{,}65 \sqrt[3]{\Delta T} \ \dfrac{W}{m^2\, ^oK} \end{cases} \text{ , con } \Delta T \text{ en } ^oC \text{ y } d \text{ en metros}$$

Convección natural entre cilindros concéntricos.- El cilindro interior es el caliente y el cilindro exterior el frío; las correlaciones recomendadas para la convección natural se expresan en función de una conductividad térmica efectiva k_{efc} que se sustituye en la ecuación de conducción correspondiente:

$$Q = \frac{2\,\pi\, k_{efec}\, d\,(T_1 - T_2)}{ln\,(r_2 / r_1)} \ , \ con: \ \frac{k_{efec}}{k} = 0{,}386 \sqrt[4]{\frac{Pr\, Ra_{cil}}{0{,}861 + Pr}}$$

$$10^2 < Ra_{cil} < 10^7 \ ; \ \frac{k_{efec}}{k} > 1 \ ; \ Ra_{cil} = \frac{(ln\, \dfrac{D_2}{D_1})^4}{d^3\,(D_1^{-3/5} + D_2^{-3/5})^5}\, Ra_d \ ; \ d = \frac{D_2 - D_1}{2}$$

XIII.4.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN NATURAL EN ESFERAS

Esfera isoterma

a) La transferencia de calor hacia y desde una esfera isoterma de diámetro d, en gases, viene dada por:

$$Nu_d = 2 + 0{,}43\ \sqrt[4]{Ra_d} \quad \begin{cases} 1 < Ra_d < 10^{11} \\ Pr \approx 1 \end{cases}$$

b) Para el caso particular de convección de una esfera isoterma en agua:

$$Nu_d = 2 + 0{,}5\ \sqrt[4]{Ra_d} \quad \begin{cases} 3.10^5 < Ra_d < 8.10^8 \\ 10 < Nu_d < 90 \end{cases}$$

c) Cuando, $Ra_d = 0 \Rightarrow Nu = 2$, que se corresponde con el valor límite de la conducción de calor de una esfera isotérmica en un medio infinito

d) Churchill propone una expresión general:

$$Nu_d = 2 + \frac{0{,}589\ \sqrt[4]{Ra_d}}{\{1 + (\frac{0{,}469}{Pr})^{9/16}\}^{4/9}} \quad \begin{cases} Ra_d < 10^{11} \\ Pr > 0{,}5 \end{cases}$$

Convección natural entre esferas concéntricas.- La esfera interior es la caliente a T_1 y la esfera exterior la fría a T_2; las correlaciones recomendadas para la convección natural se expresan en función de una conductividad térmica efectiva k_{efc}, que se sustituye en la ecuación de conducción correspondiente:

$$Q = \frac{4\ \pi\ k_{efec}\ (T_1 - T_2)}{\frac{r_2 - r_1}{r_1\ r_2}}, \text{ evaluándose las propiedades a: } T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\frac{k_{efec}}{k} = 0{,}74\ \sqrt[4]{\frac{Pr\ Ra_{esf}}{0{,}861 + Pr}} \quad ; \quad 10^2 < Ra_{esf} < 10^4 \quad ; \quad \frac{k_{efec}}{k} > 1$$

$$Ra_{esf} = \frac{d}{(\frac{D_2}{D_1})^4\ (D_1^{-7/5} + D_2^{-7/5})^5}\ Ra_d$$

XIII.5.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA EN PLACAS

Flujo laminar sobre placa plana horizontal

a) El número de Nusselt local en un flujo laminar sobre placa plana se verifica para valores del número de $Re < 5.10^5$ y viene dado por la ecuación de Pohlhausen:

$$Nu_x = 0{,}332\ \sqrt{Re_x}\ Pr^{1/3} = \frac{h_{Cx}\ x}{k} \quad ; \quad 0{,}1 < Pr < 10^3$$

Una expresión exacta para el número de Nusselt medio, longitud L y flujo laminar es:

$$Nu = \frac{h_C\ L}{k} = 0{,}664\ \sqrt{Re_L}\ Pr^{1/3}\ ,\ para:\ \begin{cases} 10^3 < Re_L < 5.10^5 \\ Pr > 0{,}5 \end{cases}$$

b) Una correlación exacta para metales líquidos es:

$$Nu = 1{,}128\ \sqrt{Re_L}\ Pr^{1/3}$$

Flujo laminar totalmente desarrollado entre placas planas paralelas

Coeficiente de rozamiento $\lambda = \frac{96}{Re_{d_h}}$; $Re_{d_h} < 2800$; $d_h = 2$ x *separación entre placas*

El número de Nu medio para el flujo entre dos placas isotérmicas paralelas de longitud L es:

$$Nu_{d_h} = 7{,}54 + \frac{0{,}03\ \frac{d_h}{L}\ Re_{d_h} Pr}{1 + 0{,}016\ (\frac{d_h}{L}\ Re_{d_h} Pr)^{2/3}} \quad ;\quad Re_{d_h} < 2800$$

Flujo turbulento sobre placa plana horizontal lisa

a) En el flujo turbulento sobre placa plana horizontal con valores del número de $Re > 5.10^5$ existe una porción de la placa cercana al borde de ataque en la que el flujo es laminar, pasando a flujo turbulento a continuación.

Las correlaciones para el cálculo del número de Stanton local se pueden obtener a partir de:

$$St_x\ Pr^{2/3} = \frac{C_x}{2}\ ,\ para:\ \begin{cases} 5.10^5 < Re < 10^7 \ ;\ St_x\ Pr^{2/3} = 0{,}0296\ Re_x^{-0{,}2} \\ 10^7 < Re < 10^9 \ ;\ St_x\ Pr^{2/3} = 0{,}185\ (lg\ Re_x)^{-2{,}584} \end{cases}$$

evaluándose las propiedades del fluido a la temperatura media de película.

b) El número de Nu local para $Re_x > Re_C$ viene dado por la expresión de Whitaker:

$$Nu_x = 0{,}029\ Re_x^{0{,}8}\ Pr^{0{,}43}\ ,\ para:\ \begin{cases} 5.10^5 < Re_x < 3.10^7 \\ 0{,}7 < Pr < 400 \end{cases}$$

El nº de Nu medio viene dado por:

$$Nu_L = 0{,}036\ \{Re_L^{0{,}8} - 9200\}\ Pr^{0{,}43}\ (\frac{\eta_F}{\eta_{pF}})^{0{,}25}\ ,\ para:\ \begin{cases} 2.10^5 < Re_L < 5{,}5.10^6 \\ 0{,}7 < Pr < 380 \\ 0{,}26 < (\eta_F / \eta_{pF}) < 3{,}5 \end{cases}$$

siempre que la turbulencia sea pequeña; las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media T_F excepto η_{pF} que lo es a la temperatura de la pared.

Para los gases las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película. Si la turbulencia es elevada se puede eliminar el sumando 9200 obteniéndose resultados bastante razonables.

c) Otra expresión del número de Nusselt medio para la longitud L viene dada por:

$$Nu_L = 0{,}664\ \sqrt{Re_C}\ Pr^{1/3} + 0{,}036\ Re_L^{0,8}\ Pr^{0,43}\ \{1 - (\frac{Re_C}{Re_L})^{0,8}\},\quad para:\ \begin{cases} 5.10^5 < Re_x < 3.10^7 \\ 0{,}7 < Pr < 400 \end{cases}$$

El coeficiente de arrastre viene dado por la expresión:

$$C = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_{crít}}}\ \frac{Re_{crít}}{Re_L} + \frac{0{,}523}{ln^2\,(0{,}06\ Re_L)} - \frac{Re_{crít}}{Re_L}\ \frac{0{,}523}{ln^2\,(0{,}06\ Re_{crít})}\quad ;\quad Re_{crít} < Re_L < 10^9$$

Capa límite turbulenta sobre una placa plana totalmente rugosa.- Se define un tamaño adimensional ε^* del grano de arena en función de la rugosidad absoluta ε en la forma:

$$\varepsilon^* = \frac{\frac{G}{\rho}\ \varepsilon}{\nu}\ \sqrt{\frac{C_x}{2}}\ ,\ para:\ \begin{cases} C_x = (3{,}476 + 0{,}707\ ln\ \frac{x}{\varepsilon})^{-2{,}46}\ ;\ 150 < \frac{x}{\varepsilon} < 1{,}5.10^7\ ;\ \varepsilon^* > 60 \\ C_L = (2{,}635 + 0{,}618\ ln\ \frac{L}{\varepsilon})^{-2{,}57}\ ;\ 150 < \frac{L}{\varepsilon} < 1{,}5.10^7\ ;\ \varepsilon^* > 60 \end{cases}$$

en la que G es el gasto másico y C_x el coeficiente de arrastre.

El criterio para determinar el tipo de régimen del flujo es: $\begin{cases} 0 < \varepsilon^* < 5\ ,\ liso \\ 5 < \varepsilon^* < 60\ ,\ transición\ ) \\ \varepsilon^* > 60\ ,\ rugoso \end{cases}$

El número de Stanton local es: $St_x = \frac{1}{2}\ \frac{C_x}{0{,}9 + \sqrt{\frac{C_x}{2}}\ \{f(\varepsilon^*, Pr) - 7{,}65\}}$

en la que la función $f(\varepsilon^*, Pr)$ depende de la rugosidad, presentando diversas formas, como se indica a continuación:

Granos de arena: $\begin{cases} f(\varepsilon^*, Pr) = 4{,}8\ \varepsilon^{*0{,}2}\ Pr^{0{,}44}\quad ;\quad 1 < Pr < 6 \\ f(\varepsilon^*, Pr) = 4{,}8\ \varepsilon^{*0{,}28}\ Pr^{0{,}57}\quad ;\ 0{,}7 < Pr < 40 \end{cases}$

General: $f(\varepsilon^*, Pr) = 0{,}55\ \sqrt{\varepsilon^*}\ (Pr^{2/3} - 1) + 9{,}5\quad ;\quad Pr > 0{,}5$

Número de Stanton medio: $St = \frac{1}{L}\ \int_0^L St_x\ dx = \frac{h_C}{r\ c_p u}$

XIII.6.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS

FLUJO LAMINAR POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS.- Para el flujo de fluidos en tuberías en régimen laminar se cumple Re < 2.100.

Flujos desarrollados.- *Para flujos completamente desarrollados en un tubo circular* $(L \to \infty)$ con *flujo de calor q/A constante desde la pared, Nu = 4,3636*

Para flujos completamente desarrollados en un tubo circular $(L \to \infty)$ *con temperatura de pared constante, Nu = 3,656*

Flujos no desarrollados.- El *efecto de entrada* del fluido en tuberías se manifiesta cuando:

- Las longitudes turbulentas iniciales sean mucho más cortas que en condiciones de régimen laminar

- El intercambio térmico comienza a efectuarse desde la entrada de la tubería y, por lo tanto, la capa límite térmica no está todavía desarrollada.

a) Una ecuación que tiene en cuenta las longitudes térmica e hidrodinámica, Sieder y Tate, *con temperatura de pared constante* es:

$$Nu = 1{,}86\ \sqrt[3]{Gz}\ \left(\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}\right)^{0{,}14},\ con:\ Gz = \left(\frac{d}{L}\ Re_d Pr\right)\ y\ \begin{cases} Gz > 10 \\ Pr > 0{,}5 \end{cases};\quad \sqrt[3]{Gz}\ \eta_c > 2$$

siendo L la longitud del tubo y d el diámetro; las propiedades del fluido que conducen al cálculo de Re y Pr se calculan a la temperatura T_F

b) Otra expresión para el flujo a la entrada en un tubo circular en régimen laminar, con *temperatura de pared constante* (Hausen):

$$Nu = 3{,}66 + \frac{0{,}0668\ Gz}{1 + 0{,}04\ Gz^{2/3}}\ \eta_c$$

y para el flujo a la entrada en un tubo circular en régimen laminar, con *flujo de calor constante*:

$$Nu = 4{,}36 + \frac{0{,}023\ Gz}{1 + 0{,}0012\ Gz}\ \eta_c$$

en la que las propiedades del fluido para calcular Re y Pr se toman a la temperatura T_F.

c) Si el flujo turbulento está hidrodinámicamente desarrollado:

El coeficiente de rozamiento viene dado por: $\lambda = \frac{64}{Re_d}\quad ;\quad Re_d < 2300$

Tabla XIII.4.- Números de Nu y factor de fricción para flujos completamente desarrollados, térmica e hidrodinámicamente, en conductos de sección transversal circular y no circular

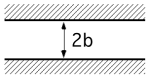
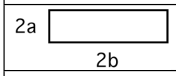
$L/d_h > 100$	Nu_T	Nu_{H_1}	Nu_{H_2}	$\lambda\, Re$	$L/d_h > 100$	b/a	Nu_T	Nu_{H_1}	Nu_{H_2}	$\lambda\, Re$
○	3,657	4,364	4,364	64		0,5	3,391	4,125	3,017	62,2
⬡	3,34	4,002	3,862	60,22	b □ a	0,25	3,66	5,099	4,35	74,8
60º △	2,47	3,111	1,892	53,33		0,125	5,597	6,49	2,904	82,34
□	2,976	3,608	3,091	56,91	b ↕ a	0	7,541	8,235	8,235	96
					Aislamiento	0,5	4,861	5,385	-----	96

Nu_T es el número de Nu para paredes con temperatura uniforme

Nu_{H_1} es el número de Nu con flujo de calor uniforme en la superficie en la dirección del flujo, mientras que la temperatura permanece uniforme en la periferia

Nu_{H_2} es el número de Nu con flujo de calor uniforme en la superficie, en la dirección del flujo y en la periferia

Tabla XIII.5.- Longitud de entrada térmica L_t e hidrodinámica L_h para flujo laminar por el interior de conductos de sección transversal circular y no circular, con flujo de calor constante

	$(L_h/d_h)/Re$	$(L_t/d_h)/Re$	
	0,056	0,033	0,043
	0,011	0,008	0,012
			
a / b = 0,25	0,075	0,054	0,042
a / b = 0,50	0,085	0,049	0,057
a / b = 1,00	0,09	0,041	0,066

y el número de Nusselt por: $Nu_d = 3{,}66 + \dfrac{0{,}065\,\dfrac{d}{L}\,Re_d\,Pr}{1 + 0{,}04\,(\dfrac{d}{L}\,Re_d\,Pr)^{2/3}}$; $Re_d < 2300$

FLUJO TURBULENTO DESARROLLADO POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS

a) Los datos experimentales correspondientes a los estudios realizados sobre el movimiento en tubos de un gran número de líquidos, gases y vapores, se pueden expresar por las siguientes ecuaciones:

En *tubos lisos* se aplica la ecuación de ***Dittus-Boelter***:

$$Nu = 0{,}023\,Re^{0,8}\,Pr^{a}\ ,\ para:\ \frac{L}{d} > 60,\ y\ \begin{cases} 0,7 < Pr < 160 \\ Re > 10.000 \end{cases}$$

en la que se considera a = 0,4 para calentamientos y a = 0,3 para enfriamientos.

b) Una correlación que permite una precisión aún mayor que la de Dittus-Boelter, es la de ***Polley***, de la forma:

$$St = exp\,[-3{,}796 - 0{,}205\,ln\,(Re) - 0{,}505\,ln\,(Pr) - 0{,}0255\,\{ln\,(Pr)\}^2\,]\ ,\ para,\ 0{,}5 < Pr < 3000$$

c) Ecuación de ***Sieder y Tate***.- Es de la forma:

$$Nu = 0{,}027\,Re^{0,8}\,Pr^{1/3}\,(\frac{\eta_F}{\eta_{pF}})^{0,14},\ con:\ \begin{cases} Re > 10.000\ \ ;\ \ \dfrac{L}{d} > 60 \\ 0,7 < Pr < 16.500 \end{cases}$$

recomendándose para aquellos casos de transmisión de calor en los que la viscosidad de los fluidos cambie marcadamente con la temperatura.

Para determinar Nu, Re, Pr y η_F hay que conocer las propiedades del fluido a su temperatura media T_F, mientras que η_{pF} se calcula a la temperatura de la pared T_{pF}.

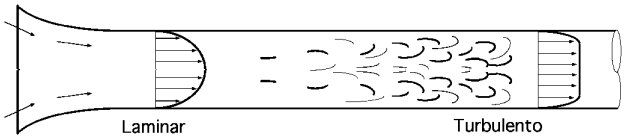


Fig XIII.9.- Flujo forzado por una tubería con Re_d = 50.000; en la sección inicial el flujo es laminar debido a la entrada en forma de bocina, pero se vuelve turbulento aguas abajo

d) Ecuación de ***Notter y Sleicher.***- Es de la forma:

$$Nu = 5 + 0{,}016\, Re^a\, Pr^b \text{ , con: } \begin{cases} a = 0{,}88 - \dfrac{0{,}24}{4 + Pr} \;\; ; \;\; b = 0{,}33 + 0{,}5\, e^{-0{,}6\, Pr} \\ \dfrac{L}{d} > 25 \; ; \; 10^4 < Re < 10^6 \;\; ; \;\; 0{,}1 < Pr < 10^4 \end{cases}$$

que concuerda muy bien con los mejores datos experimentales para el aire y en un 10% con los mejores datos para números de Prandtl del orden de 10^3.

e) En *tubos rugosos* se puede utilizar la analogía de ***Kàrmàn*** del capítulo anterior de la forma:

$$St = \frac{\lambda}{8} \; \frac{1}{1 + 5 \sqrt{\dfrac{\lambda}{8}} \; \{(Pr - 1) + ln \; \dfrac{5\, Pr + 1}{6}\}} \quad ; \quad Pr < 30$$

f) En *tubos rugosos* también se puede utilizar la ecuación de ***Petukhov*** de la forma:

$$Nu_d = \frac{Re_d \; Pr}{X} \; \frac{\lambda}{8} \; (\frac{\eta_F}{\eta_{pF}})^n \quad ; \quad X = 1{,}07 + 12{,}7\, (Pr^{2/3} - 1) \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

$$\text{cuyo campo de validez es: } \begin{cases} 10^4 < Re < 5.10^6 \;\; ; \;\; 0{,}5 < Pr < 200 \;\; ; \;\; error < 5\% \\ 10^4 < Re < 5.10^6 \;\; ; \;\; 0{,}5 < Pr < 2000 \;\; ; \;\; error \approx 10\% \\ 0 < \eta_F / \eta_{pF} < 40 \end{cases}$$

n = 0,11 para calentamiento con T_{pF} uniforme

n = 0,20 para enfriamiento con T_{pF} uniforme

n = 0 para flujo de calor uniforme o gases

El valor del coeficiente de rozamiento viene dado para Pr > 0,5 por:

$\lambda = (0{,}79 \ln Re_d - 1{,}64)^{-2} \quad ; \quad 10^4 < Re_d < 5.10^6$

$\lambda = 0{,}184\, Re_d^{-0{,}2} \quad ; \quad 2.10^4 < Re_d < 3.10^5$, *menos precisa que la anterior*

tomándose las propiedades del fluido a la temperatura media T_F excepto η_{pF} que lo es a la temperatura de la pared T_{pF}.

El parámetro η_c se utiliza para expresar el efecto de la diferencia de temperaturas del fluido T_F y de la pared T_{pF} sobre las propiedades del fluido. Se aplica en aquellos casos en que la viscosi-

dad del fluido cambie marcadamente con la temperatura, $\eta=\eta(T)$; en muchos casos η_c se considera la unidad, siendo de interés en fluidos muy viscosos.

g) Otra ecuación para *tubos rugosos* es la de ***Gnielinski*** para flujo turbulento, térmica e hidrodinámicamente desarrollado, siendo el número de Nusselt:

$$Nu = \frac{\frac{\lambda}{8}\,(Re_d - 1000)\,Pr}{1 + 12{,}7\,\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\;(Pr^{2/3} - 1)}\;,\;\; con:\;\; \begin{cases} 3000 < Re_d < 10^6 \\ Pr > 0{,}5 \end{cases}$$

y el coeficiente de rozamiento:

$$\lambda = (0{,}79\,\ln Re_d - 1{,}64)^{-2} \quad ; \quad 10^4 < Re_d < 5.10^6$$

h) Para una tubería muy rugosa se puede definir un tamaño adimensional ε^* del grano de arena, al igual que para placa plana, en función de la rugosidad absoluta ε en la forma:

$$\varepsilon^* = \frac{G\;\varepsilon / \rho}{\nu}\;\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

en la que G es el gasto másico y λ el coeficiente de rozamiento que se obtiene del diagrama de Moody o para este caso de la ecuación:

$$\lambda = \frac{1}{-\,2\,lg\,\{\frac{\varepsilon/R}{7{,}4} - \frac{5{,}02}{Re_d}\,lg\,(\frac{\varepsilon/R}{7{,}4} + \frac{13}{Re_d})\}}$$

El criterio para determinar el tipo de régimen del flujo es: $\begin{cases} 0 < \varepsilon^* < 5\,, \;\; liso \\ 5 < \varepsilon^* < 60\,, \;\; transición \\ \varepsilon^* > 60\,, \;\; rugoso \end{cases}$

El número de Stanton local es: $St = \frac{\lambda}{8}\;\frac{1}{0{,}9 + \sqrt{\frac{\lambda}{8}}\;\{f(\varepsilon^*, Pr) - 7{,}65\}}$

en la que la función $f(\varepsilon^*, Pr)$ depende de la rugosidad, presentando diversas formas, como se indica a continuación: $\begin{cases} Granos\ de\ arena: \begin{cases} f(\varepsilon^*, Pr) = 4{,}8\;\varepsilon^{*0{,}2}\,Pr^{0{,}44} \quad ; \quad 1 < Pr < 6 \\ f(\varepsilon^*, Pr) = 4{,}8\;\varepsilon^{*0{,}28}\,Pr^{0{,}57} \quad ; \quad 0{,}7 < Pr < 40 \end{cases} \\ General:\; f(\varepsilon^*, Pr) = 0{,}55\;\sqrt{\varepsilon^*}\;(Pr^{2/3} - 1) + 9{,}5 \quad ; \quad Pr > 0{,}5 \end{cases}$

El número de Stanton medio es: $St = \frac{1}{L}\int_0^L St_x\,dx = \frac{h_C}{\rho\;c_p u}$

Flujo turbulento no desarrollado por el interior de tuberías

Longitud de entrada hidrodinámica: $L_H = 0{,}056\,Re_d\,d$

Longitud térmica de entrada: $L_T = 0{,}017\ Re_d\ Pr\ d$

Nusselt estudió datos experimentales en el campo $(\ 10 < \frac{L}{d} < 100\ )$, y predijo que h_C tenía que ser proporcional a $(\frac{d}{L})^{1/8}$; para tener en cuenta el efecto de entrada propuso la ecuación:

$$Nu = 0{,}036\ Re^{0,8}\ \ Pr^{1/3}\ \ (\frac{d}{L})^{0,055}$$

en la que L es la longitud del tubo medida desde la entrada, viniendo determinadas las propiedades del fluido respecto a T_F.

Otras ecuaciones válidas en este campo son:

$$Nu = 0{,}024\ Re^{0,786}\ Pr^{0,42}\ \ \{1 + (\frac{d}{L})^{0,66}\ \}\ \eta_C\ ,\ para:\ \begin{cases} 2300 < Re < 10^6 \\ 0{,}7 < Pr < 10 \\ L/d < 40 \end{cases}$$

$$Nu = 0{,}036\ Re^{0,8}\ Pr^{0,333}\ \ (\frac{d}{L})^{1/18}\ ,\ para:\ \begin{cases} 2300 < Re < 10^6 \\ 0{,}7 < Pr < 10 \\ 10 < L/d < 400 \end{cases}$$

en las que L es la longitud del tubo medida desde la entrada, correspondiente a la zona que se está estudiando, calculándose las propiedades físicas del fluido a la temperatura media de éste T_F.

Si el flujo a la entrada está desarrollado hidrodinámicamente, pero no térmicamente, con temperatura de pared uniforme, se puede utilizar:

$$Nu_d = 3{,}66 + \frac{0{,}065\ \frac{d}{L}\ Re_d\ \ Pr}{1 + 0{,}04\ (\frac{d}{L}\ Re_d\ \ Pr)^{2/3}}\ \ ;\ \ Re_d = 2300$$

Flujo turbulento de metales líquidos por el interior de tuberías

Flujo completamente desarrollado con flujo de calor uniforme desde la pared

$$Nu = 0{,}625\ Pe^{0,4}\ ,\ con:\ \ 10^2 < Pe < 10^4\ \ ;\ \ \frac{L}{d} > 60$$

$$Nu = 4{,}82 + 0{,}0185\ Pe^{0,827}\ ,\ con:\ 10^2 < Pe < 10^4\ \ ;\ 3{,}6.10^3 < Re < 9.10^5\ \ ;\ \ \frac{L}{d} > 60$$

$$Nu_d = 6{,}3 + 0{,}0167\ Re_d^{0,85}\ Pr^{0,93}\ ,\ con:\ 10^4 < Re_d < 10^6$$

Flujo completamente desarrollado con temperatura de pared uniforme

$$Nu_d = 6{,}3 + 0{,}0167\ Re_d^{0,85}\ Pr^{0,93}\ ,\ con:\ 10^4 < Re_d < 10^6$$

$$Nu = 4{,}8 + 0{,}015\ Pe^{0,91}\ Pr^{0,3}\ ,\ con:\ Pr < 0{,}05\ \ ;\ \ \frac{L}{d} > 60$$

$$Nu = 5 + 0{,}05\, Pe^{0,77}\, Pr^{0,25}\ ,\ con:\ Pr < 0{,}1\ ;\ Pe > 15.000\ ;\ \frac{L}{d} > 60$$

$$Nu = 4{,}8 + 0{,}0156\, Pe^{0,85}\, Pr^{0,08}\ ,\ con:\ 0{,}004 < Pr < 0{,}1\ ;\ Re < 500.000\ ;\ \frac{L}{d} > 60$$

$$Flujo\ no\ desarrollado\ para:\ \begin{cases} - \text{ flujo de calor uniforme: } Nu = 6{,}3 + 0{,}0167\, Pe^{0,85}\, Pr^{0,08} \\ - \text{ temperatura de pared uniforme: } Nu = 4{,}8 + 0{,}0156\, Pe^{0,85}\, Pr^{0,08} \end{cases}$$

Flujo turbulento por un serpentín tubular.- La presión que se ejerce sobre la sección transversal de paso de un serpentín tubular no es constante debido a la acción de las fuerzas de inercia, que en las zonas periféricas son, relativamente, poco importantes pues el medio que desliza se adhiere más o menos a la pared del tubo. Las partículas en movimiento en esta zona están sometidas a las fuerzas del campo de presión en la sección perpendicular a la dirección del flujo principal, que origina la formación de un desplazamiento secundario, en el serpentín.

Como consecuencia de este movimiento secundario, la transmisión de calor en un serpentín tubular mejora, siendo el coeficiente de transmisión de calor por convección de la forma:

$$h_{C(serpentín)} = h_C\,(1 + 3{,}54\ \frac{d}{D})$$

en la que h_C es el coeficiente de transmisión de calor por convección para tubería recta de las mismas características.

Para calcular la caída de presión de un flujo que circula en un serpentín, a la pérdida de presión correspondiente al tramo recto de la tubería que tuviese la longitud de la del serpentín, habría que añadir un coeficiente que depende del régimen del flujo (laminar o turbulento) y del radio del serpentín.

Por medio de las curvas Fig XIII.10, y la formulación que se indica a continuación, se pueden determinar el tipo de flujo y los coeficientes para flujo laminar o turbulento.

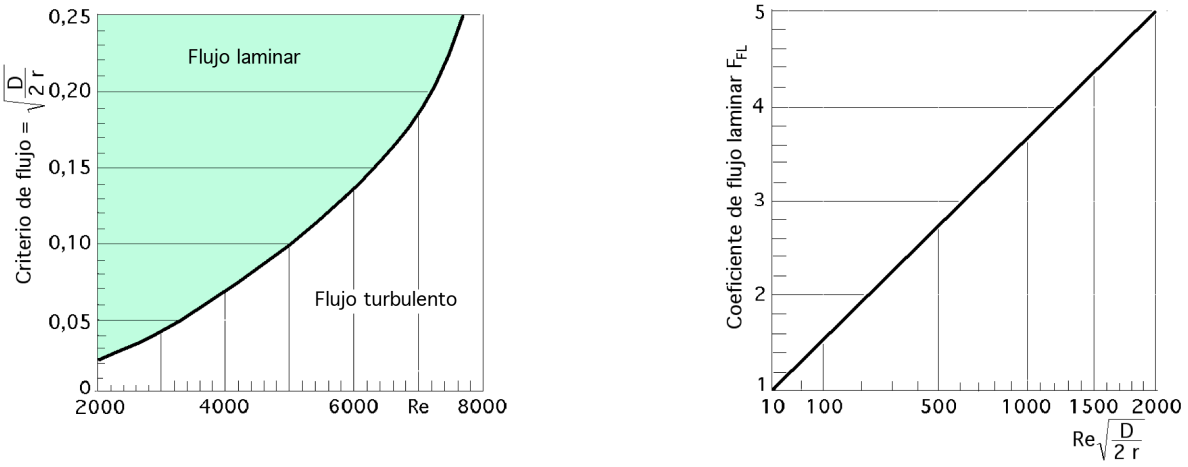


Fig XIII.10.- Caída de presión en serpentines

$$\begin{cases} Laminar:\ \Delta p = F_{FL}\ \Delta p_{long} \\ Turbulento:\ \Delta p = \{Re\,(\frac{d}{2\,r})^2\}^{0,05}\ \Delta p_{long} \end{cases} \quad con: \quad \begin{cases} \Delta p,\ caída\ de\ presión\ para\ una\ espira,\ (psi) \\ \Delta p_{long},\ caída\ de\ presión\ en\ la\ longitud\ de\ la\ espira,\ (psi) \\ d,\ diámetro\ interior\ del\ tubo \\ r,\ radio\ medio\ de\ la\ espira,\ (in) \end{cases}$$

El régimen empieza a hacerse turbulento para valores de Re más elevados que en los tubos rectos

XIII.7.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA POR EL EXTERIOR DE TUBERÍAS

Flujo turbulento paralelo por el exterior de un tubo.- Un gran número de estudios y experiencias en gases, vapores y líquidos moviéndose por el exterior de un tubo simple, paralelamente, vienen correlacionados por la expresión:

$$Nu = 0{,}26\ Re^{0,6}\ Pr^{0,3}\ \eta_c \quad ; \quad 10^3 < Re < 10^5$$

$$Nu = 0{,}86\ Re^{0,43}\ Pr^{0,3}\ \eta_c \quad ; \quad 0{,}2 < Re < 200 \ \ y\ sólo\ para\ líquidos\ normales$$

Flujo turbulento paralelo por el exterior de tubos en batería.- La transferencia de calor en la circulación de un fluido sobre una batería de tubos, es muy importante por su aplicación al diseño y proyecto de algunos tipos de intercambiadores de calor en contracorriente y en equicorriente.

Se pueden considerar dos situaciones:

a) Si se obliga al fluido a circular paralelo y pegado a la pared de las tuberías mediante pantallas, se considera como flujo por el exterior de tubos, y se utilizan para determinar el número de Nu las ecuaciones para un tubo único.

b) Si no existen pantallas y los tubos están contenidos en una carcasa, se considera como flujo por el interior de un tubo, (la carcasa), introduciendo el concepto de diámetro hidráulico en el número de Re de la formulación correspondiente que interviene en el cálculo del número de Nu; en esta situación, los números de Reynolds y Nusselt se calculan en función del diámetro hidráulico, en la forma:

$$Re = \frac{u_F\ d_h}{\nu} \quad ; \quad Nu = \frac{h_{CF}\ d_h}{k_F}$$

Diámetro hidráulico: $d_h = 4\ \dfrac{Sección\ transersal\ mojada}{Perímetro\ mojado}$

Para una conducción formada por dos tubos concéntricos, Fig XIII.11.a:

$$d_h = 4\ \frac{\pi\ \frac{d_1^2 - d_2^2}{4}}{\pi\ (d_1 + d_2)} = \frac{(d_1 + d_2)\,(d_1 - d_2)}{d_1 + d_2} = d_1 - d_2$$

Para un conducto tipo intercambiador, formada por varios tubos rodeados por una carcasa exterior, Fig XIII.11.b:

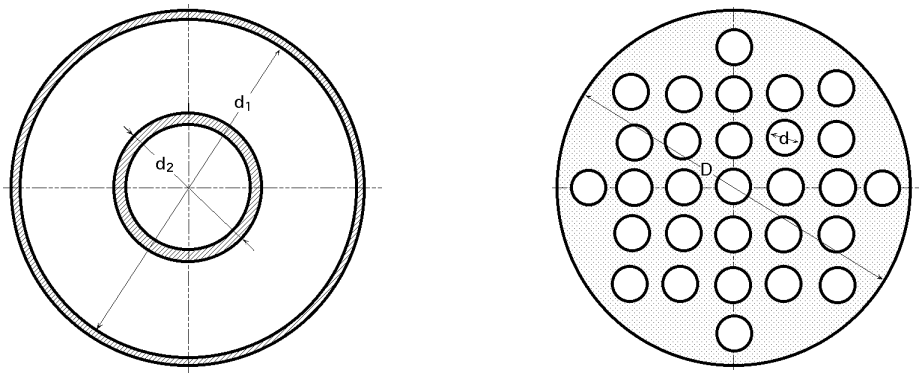


Fig XIII.11.- Disposiciones de dos tubos concéntricos (a) y tipo intercambiador (b)

$$d_h = 4\,\frac{\pi\,\dfrac{D^2 - n\,d^2}{4}}{\pi\,(D + n\,d)} = \frac{D^2 - n\,d^2}{D + n\,d}$$

Para conductos anulares (dos tubos concéntricos) se puede obtener una mayor precisión si se multiplica el nº de Nu obtenido por cualquiera de las ecuaciones correspondientes al flujo por el interior de tuberías, por un factor de corrección:

- Si la pared exterior está aislada térmicamente y la transferencia de calor se realiza únicamente a través de la pared del tubo interior, el factor de corrección del nº de Nu, es: $0,86\,(\dfrac{d_{interior}}{d_{exterior}})^{-0,16}$

- Si la pared interior está aislada térmicamente y la transferencia de calor se realiza únicamente a través de la pared del tubo exterior, el factor de corrección del nº de Nu, es: $1 - 0,14\,(\dfrac{d_{interior}}{d_{exterior}})^{0,6}$

en las que el área de transferencia térmica a considerar es únicamente el de la pared calentada.

XIII.8.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA EN ESFERAS

a) Para el flujo de fluidos sobre esferas con superficie isotérmica, se pueden utilizar los siguientes coeficientes de arrastre C_w referidos al diámetro d:

$$C_{w_d} = \frac{24}{Re_d} \quad ; \quad Re_d < 0,5$$

$$C_{w_d} = \frac{24}{Re_d}\,(1 + \frac{Re_d^{2/3}}{6}) \quad ; \quad 2 < Re_d < 500$$

$$C_{w_d} = 0,44 \quad ; \quad 500 < Re_d < 2.10^5$$

Whitaker propone una correlación general para el nº de Nusselt de la forma:

$$Nu_d = 2 + (0,4\,\sqrt{Re_d} + 0,06\,\sqrt[3]{Re_d^2})\,Pr^{0,4}\,\sqrt[4]{\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}} \quad ; \quad \begin{cases} 3,5 < Re_d < 8.10^4 \quad ; \quad 0,7 < Pr < 380 \\ 1 < \dfrac{\eta_F}{\eta_{pF}} < 3,2 \end{cases}$$

calculándose las propiedades a la temperatura del fluido T_F excepto η_{pF} que se evalúa a la temperatura de la pared; para gases, el factor de corrección de la viscosidad es despreciable.

En la ecuación anterior se puede observar la existencia de un límite inferior de $(Nu_d = 2)$ que corresponde a la conducción de calor de una esfera a un medio exterior infinito estacionario.

El flujo de calor a través de una superficie esférica es:

$$Q = \frac{4\,\pi\,k\,(T_1 - T_2)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \left| Si\ , \begin{cases} d = 2\,r_1 \\ y \\ r_2 \to \infty \end{cases} \right| = \frac{2\,k}{d}\ \pi\ d^2\,(T_1 - T_2) = h_{cF}\ A\,(T_1 - T_2)$$

por lo que:

$$h_{cF} = \frac{2\,k}{d}\ ;\ Nu_d = 2$$

b) Para el caso particular de un *flujo de gases sobre una esfera*, ***Mc Adams*** recomienda la correlación:

$$Nu = 0{,}37\ Re^{0,6}\quad ;\quad 17 < Re < 70000$$

en la que las propiedades del fluido se calculan a la temperatura media de película, al igual que en los casos (c y d) siguientes

c) Para el caso particular del *flujo de líquidos sobre una esfera*, se recomienda la correlación:

$$Nu_d = (1{,}2 + 0{,}53\ Re_d^{0,54})\ Pr^{0,3}\ \sqrt[4]{\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}}\quad ;\quad 1 < Re_d < 200.000$$

d) Para el *flujo de un metal líquido sobre una esfera*, el coeficiente de transmisión de calor es:

$$Nu_d = 2 + 0{,}386\ \sqrt{Re\ Pr}\quad ;\quad 3.10^4 < Re_d < 1{,}5.10^5$$

XIII.9.- CONVECCIÓN NATURAL Y FORZADA COMBINADAS

En algunos casos reales pueden coexistir la convección natural y la forzada; para sistemas en los que el flujo forzado tiene velocidades bajas, menores de 0,3 m/seg, ambas formas de convección pueden tener una importancia semejante.

Sin embargo, y ante la duda de qué tipo de fenómeno prevalece, un criterio normalmente aplicado es que predomina la convección natural cuando se cumpla que $(Gr/Re^2 > 1)$.

Para convección combinada en tubos horizontales se pueden utilizar las expresiones:

$$Nu = 1{,}75\ \eta_C\ \sqrt[3]{Gz + 0{,}0083\ \sqrt[4]{(Gr\ Pr)^3}}\ ,\ para:\ \begin{cases} Re < 500\quad ;\quad 10^{-2} < Pr\ \dfrac{d}{L} < 1 \\ Gz = Re\ Pr\ \dfrac{d}{L} \end{cases}$$

$$Nu = 4{,}69\, Re^{0,27}\, Pr^{0,21} Gr^{0,07} \left(\frac{d}{L}\right)^{0,36} \text{, para: } Re > 500 \;\; ; \;\; 10^{-2} < Pr\,\frac{d}{L} < 1$$

Para la convección laminar combinada del agua que circula por un tubo horizontal con temperatura de pared constante, sus resultados vienen correlacionados a través de la expresión:

$$Nu_d = 1{,}75 \sqrt[3]{Gz + 0{,}012 \sqrt[3]{(Gz\, Gr_d^{0,33})^4}}\; \left(\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}\right)^{0,14}$$

Todas las propiedades del fluido se calculan a la temperatura media T_F del fluido; esta ecuación da buenos resultados, siempre con un error menor del 8%. En la Fig XIII.12 se han representado los regímenes de convección libre, forzada y mixta en el caso de flujo por tubos horizontales.

Hausen propone, para convección forzada y flujo no desarrollado:

$$Nu = 0{,}116\,(Re^{2/3} - 125)\, Pr^{1/3} \left\{1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right\} \left(\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}\right)^{0,14} \text{, para: } \begin{cases} 0{,}6 < Pr < 500 \;\; ; \;\; \dfrac{L}{d} < 60 \\ 2100 < Re < 10^6 \end{cases}$$

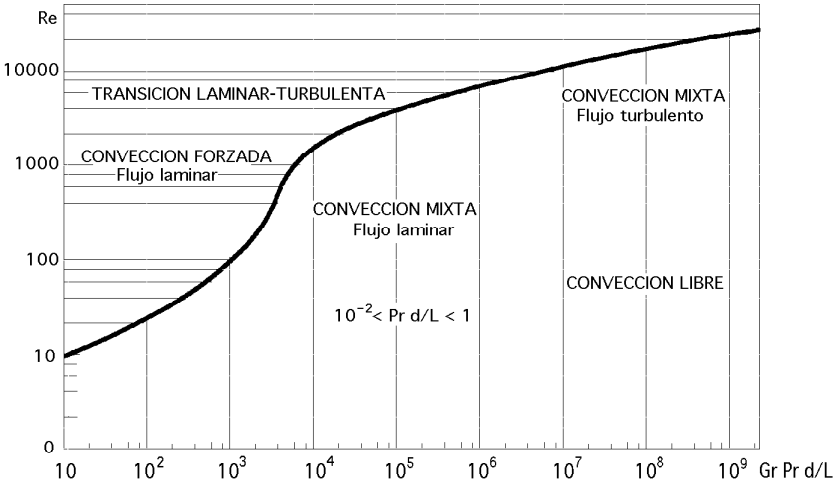


Fig XIII.12.- Convección libre, forzada y mixta, por tubos horizontales

XIII.10.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN EN FLUJOS CRUZADOS

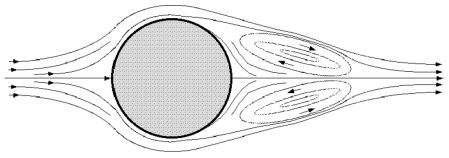


Fig XIII.13.- Flujo laminar forzado alrededor de un cilindro, $Re_d = 25$

FLUJO CRUZADO EN TUBO ÚNICO LISO.- Cuando se trata de un tubo único, para la circulación de gases y líquidos ordinarios, el coeficiente de transferencia térmica medio correspondiente al flujo cruzado, se puede calcular mediante las relaciones siguientes:

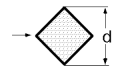
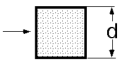
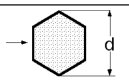
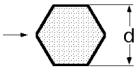
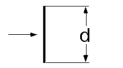
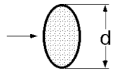
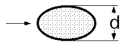
$Nu = C\, Re^n\, Pr^{1/3}$, *(en la que los valores de n y C se obtienen de la Tabla XIII.6)*

Las propiedades del fluido se calculan a una temperatura media, entre la del fluido T_F y la de la pared exterior T_{pF}. Para geometrías no circulares se puede utilizar la Tabla XIII.7.

Tabla XIII.6.- Valores de n y C para tuberías cilíndricas en función del número de Re

Re (Para el diámetro d)	*C*	*n*
0,4 a 4	*0,989*	*0,330*
4 a 40	*0,911*	*0,385*
40 a 4.000	*0,683*	*0,466*
4.000 a 40.000	*0,193*	*0,618*
40.000 a 400.000	*0,0266*	*0,805*

Tabla XIII.7- Valores de n y C, función de la geometría del conducto

Configuración	*Re (d)*	*C*	*n*
	*2.500 a 7.500*	*0,261*	*0,624*
	5.000 a 100.000	*0,222*	*0,588*
	*2.500 a 8.000*	*0,16*	*0,699*
	5.000 a 100.000	*0,092*	*0,675*
	*5.000 a 19.500*	*0,144*	*0,638*
	19.500 a 100.000	*0,035*	*0,782*
	*5.000 a 100.000*	*0,138*	*0,638*
	*4.000 a 15.000*	*0,205*	*0,731*
	*3.000 a 15.000*	*0,085*	*0,804*
	*2.500 a 15.000*	*0,224*	*0,612*

a) ***Whitaker*** propone una correlación parecida a la del flujo sobre esferas, en la forma:

$$Nu = (0{,}4\ \sqrt{Re}\ + 0{,}06\ Re^{2/3}\ )\ Pr^{0{,}4}\ \sqrt[4]{\frac{\eta_F}{\eta_{pF}}}\ \text{, para: } \begin{cases} 0{,}67 < Pr < 300 \ \ ; \ \ 40 < Re < 10^5 \\ 0{,}25 < \dfrac{\eta_F}{\eta_{pF}} < 5{,}2 \end{cases}$$

en la que las propiedades del fluido se toman a T_F; para los gases, el factor de corrección de la viscosidad es despreciable.

b) Unas correlaciones muy elaboradas debidas a ***Churchill*** y ***Bernstein*** para $Pr > 0{,}5$ en las que las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura del fluido T_F, son:

$$Nu_d = 0{,}3 + \frac{0{,}62\ \sqrt{Re_d}\ \ Pr^{1/3}}{\sqrt[4]{1 + (\frac{0{,}4}{Pr})^{2/3}}} \quad ; \quad Re_d < 10^4$$

$$Nu_d = 0{,}3 + \frac{0{,}62\ \sqrt{Re_d}\ \ Pr^{1/3}}{\sqrt[4]{1 + (\frac{0{,}4}{Pr})^{2/3}}}\ \{1 + \sqrt{\frac{Re_d}{282.000}}\} \quad ; \quad 2.10^4 < Re_d < 4.10^5$$

$$Nu_d = 0{,}3 + \frac{0{,}62\ \sqrt{Re_d}\ \ Pr^{1/3}}{\sqrt[4]{1 + (\frac{0{,}4}{Pr})^{2/3}}}\ \{1 + (\frac{Re_d}{282.000})^{5/8}\}^{4/5} \quad ; \quad 4.10^5 < Re_d < 5.10^6$$

Coeficiente de arrastre: $C_d = 1 + \dfrac{10}{Re_d^{2/3}}$; $1 < Re_d < 10^4$

c) Para valores muy bajos del nº de Reynolds, en la que las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura del fluido T_F es:

$$Nu_d = \frac{1}{0{,}8237 - \ln\sqrt{Re_d\,Pr}} \quad ; \quad Re_d\,Pr < 0{,}2$$

en la que las propiedades se evalúan a la temperatura del fluido T_F.

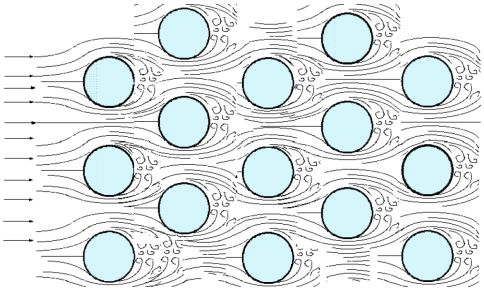


Fig XIII.14.- Flujo forzado a través de un haz de tubos

FLUJO CRUZADO EN TUBOS EN BATERÍA.- La transferencia de calor en la circulación de un fluido sobre una batería de tubos, en flujo cruzado, es muy importante por su aplicación al diseño y proyecto de la inmensa mayoría de los intercambiadores de calor. En la Fig XIII.13 se representan las líneas de corriente de un flujo laminar forzado alrededor de un cilindro, y en la Fig XIII.14, el flujo forzado a través de un haz de tubos en batería.

Primer método.- Se utiliza una ecuación parecida a la de un solo tubo, en la que los valores de C y n dependen de las distancias entre tubos adyacentes. Estos parámetros varían si los tubos están alineados (disposición regular), o están al tresbolillo o en quincunce, ambas disposiciones triangulares.

Para el caso de un flujo turbulento sobre baterías de 10 ó más tubos en la dirección del flujo, se utiliza la ecuación:

$$Nu_d = C\,Re_{máx}^{n}\,Pr^{1/3}\ ,\ con:\ 2000 < Re_{máx} < 40000\ ;\ Pr > 0{,}7$$

viniendo dados en la Tabla XIII.8 los valores de las constantes C y n.

En el caso en que el número de tubos en la dirección del flujo sea menor de 10, en la Tabla XIII.9 se indica un factor de corrección ψ de la forma:

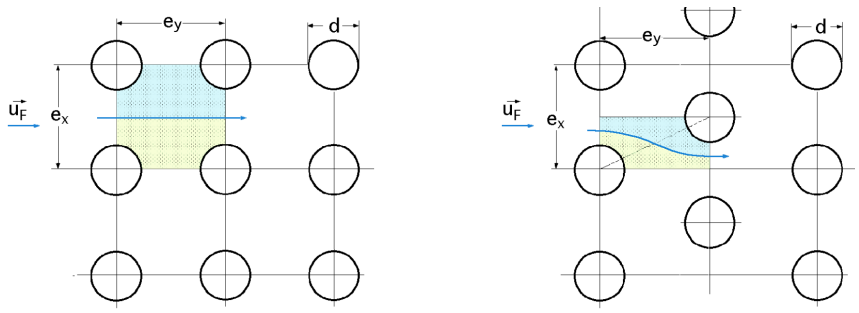


Fig XIII.15.- Flujos cruzados en baterías de tubos en línea y al tresbolillo

$h_{C(N)} = \psi \; h_{C(1\ tubo)}$

Para un flujo no distorsionado, (flujo en línea recta y sin perturbación alguna, al menos desde 1,2 m antes de llegar al banco de tubos), que se aproxime a un haz tubular de menos de 10 filas, el coeficiente de convección se multiplica por el factor de corrección ψ, que es igual a la unidad cuando el banco tubular está precedido por un codo, por una pantalla distribuidora o por un cortatiros.

Las ecuaciones que se han establecido para el flujo por el interior de tubos se pueden asumir también para flujos paralelos por el exterior de tubos introduciendo un diámetro hidráulico para el flujo paralelo a un banco de tubos circulares dispuestos en un espaciado rectangular, de la forma:

$$d_H = \frac{4\ (\varepsilon_x \varepsilon_y - 0{,}785\, d_{ext}^2\ )}{\pi\ d_{ext}}$$

El valor de $Re_{máx}$ se corresponde con la velocidad máxima, y ésta con la sección mínima de paso; de acuerdo con la Fig XIII.15 se tiene:

Disposición regular: $\text{Paso mínimo} = (e_x - d) \quad \Rightarrow \quad u_{máx} = \dfrac{u_F\ e_x}{e_x - d}$

Disposición triangular: Se toma el menor de los pasos $\begin{cases} \dfrac{e_x - d}{2} \\ \sqrt{(\dfrac{e_x}{2})^2 + e_y^2} - d \end{cases} \Rightarrow \quad u_{máx} = \dfrac{\dfrac{u_F\ e_x}{2}}{\text{Paso mínimo}}$

Tabla XIII.8.- Valores de C y n para baterías de 10 ó más tubos

EN LÍNEA	$\varepsilon_x / d = 1{,}25$		$\varepsilon_x / d = 1{,}5$		$\varepsilon_x / d = 2$		$\varepsilon_x / d = 3$	
ε_y / d	*C*	*n*	*C*	*n*	*C*	*n*	*C*	*n*
1,25	*0,386*	*0,592*	*0,303*	*0,608*	*0,111*	*0,704*	*0,0703*	*0,752*
1,5	*0,407*	*0,586*	*0,278*	*0,620*	*0,112*	*0,702*	*0,0753*	*0,744*
2	*0,464*	*0,570*	*0,332*	*0,602*	*0,254*	*0,632*	*0,220*	*0,648*
3	*0,322*	*0,601*	*0,396*	*0,584*	*0,415*	*0,581*	*0,317*	*0,608*
AL TRESBOLILLO	$\varepsilon_x / d = 1{,}25$		$\varepsilon_x / d = 1{,}5$		$\varepsilon_x / d = 2$		$\varepsilon_x / d = 3$	
ε_y / d	*C*	*n*	*C*	*n*	*C*	*n*	*C*	*n*
0,6	---	---	---	---	---	---	*0,236*	*0,636*
0,9	---	---	---	---	*0,495*	*0,571*	*0,445*	*0,581*
1	---	---	*0,552*	*0,558*	---	---	---	---
1,125	---	---	---	---	*0,531*	*0,565*	*0,575*	*0,560*
1,25	*0,575*	*0,556*	*0,561*	*0,554*	*0,576*	*0,556*	*0,579*	*0,562*
1,5	*0,501*	*0,568*	*0,511*	*0,562*	*0,502*	*0,568*	*0,542*	*0,568*

Tabla XIII.9.- Factor de corrección y del valor de h_C para N< 10 tubos por fila

N	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Tubos al tresbolillo	*0,68*	*0,75*	*0,83*	*0,89*	*0,92*	*0,95*	*0,97*	*0,98*	*0,99*	*1*
Tubos alineados	*0,64*	*0,80*	*0,87*	*0,90*	*0,92*	*0,94*	*0,96*	*0,98*	*0,99*	*1*

Segundo método.- Cuando el número N de tubos por fila sea superior a 20, se recomienda utilizar la ecuación de ***Zukauskas***, más moderna que la anterior, de la forma:

$$\text{Para gases: } Nu_d = C^* \, Re_{máx}^m \, Pr^{0,36} \, \frac{Pr_{T_F}}{Pr_{T_{pF}}}$$

$$\text{Para líquidos: } Nu_d = C^* \, Re_{máx}^m \, Pr^{0,36} \, \sqrt[4]{\frac{Pr_{T_F}}{Pr_{T_{pF}}}} \quad ; \quad \begin{cases} 0,7 < Pr < 500 \;\; ; \;\; 10 < Re_{med} < 10^6 \\ C^* \text{ y } m \text{ están tabulados, Tabla XIV.10} \end{cases}$$

Para ***líquidos***, las propiedades se toman a T_F excepto los números de Pr de la raíz, que lo son a las temperaturas respectivas.

Para ***gases***, las propiedades se toman a la temperatura de película; el término de la raíz que relaciona los números de Pr es aproximadamente la unidad.

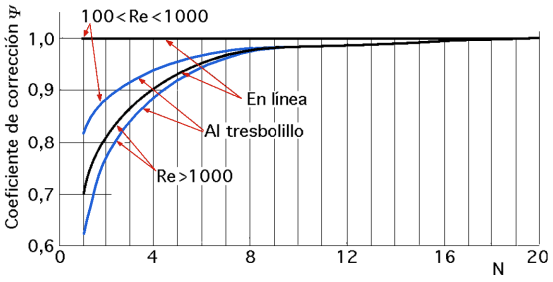


Fig XIII.16.- Factor de corrección Ψ de la ecuación de Zukauskas

Para haces con menos de 20 tubos por fila, el número de Nu_d obtenido con la ecuación de Zukauskas se corrige mediante un factor de corrección Ψ que se determina a partir de la Fig XIII.16 en la forma:

$$Nu_{(N)} = \Psi \; Nu_{N>20}$$

La velocidad que interviene en el cálculo del número de Re es la correspondiente a la sección entre los tubos, que depende de la geometría de la batería y de la disposición espacial de los mismos.

Tabla XIII.10.- Valores de C y m para baterías de 20 ó más tubos por fila, ecuación de Zukauskas*

Geometría	*Re*	*C**	*m*
EN LINEA	*10 a 100*	*0,8*	
	100 a 1.000	*Se considera como tubo simple*	
	1.000 a 200.000	*0,27*	*0,63*
	200.000 a 1.000.000	*0,21*	*0,84*

Geometría	*Re*	*C**	*m*	*Observaciones*
AL TRESBOLILLO	*10 a 100*	*0,9*	*0,4*	
	100 a 1.000	*20% más que para tubo simple*		
	1.000 a 200.000	$0,35\,(\varepsilon_x/\varepsilon_y)^{0,2}$	*0,6*	$(\varepsilon_x/\varepsilon_y) < 0,2$
	1.000 a 200.000	*0,4*	*0,6*	$(\varepsilon_x/\varepsilon_y) > 0,2$
	200.000 a 1.000.000	*0,022*	*0,84*	

Tercer método.- Como en un haz de tubos el coeficiente de transferencia de calor aumenta desde la primera fila hasta casi la quinta; el nº de $Nu_{d(N)}$ promedio en un haz de tubos de 10 o más filas se puede calcular también a partir de la expresión:

$$Nu_{d\,(N)} = \Phi \; Nu_{d_{(\,1ª\,Fila\,)}}$$

en la que $Nu_{d\,(1ª\,Fila)}$ es el número de Nusselt de la primera fila y Φ un factor de corrección, que se puede hallar mediante las ecuaciones que se proponen a continuación o en las Fig XIII.17 y 18:

$$\Phi_{dispos.\ regular} = 1 + \frac{0,7}{\theta^{1,5}} \frac{\frac{e_x}{e_y} - 0,3}{(\frac{e_x}{e_y} + 0,7)^2}\ , con\ \theta\ igual\ a:\ \begin{cases} \frac{\varepsilon_y}{d} \geq 1 \Rightarrow \theta = 1 + \frac{\pi\ d}{4\ \varepsilon_y} \\ \frac{\varepsilon_y}{d} < 1 \Rightarrow \theta = 1 - \frac{\pi\ d^2}{4\ \varepsilon_x \varepsilon_y} \end{cases}$$

$$\Phi_{dispos.\ al\ tresbolillo} = 1 + \frac{2\ d}{3\ \varepsilon_x}$$

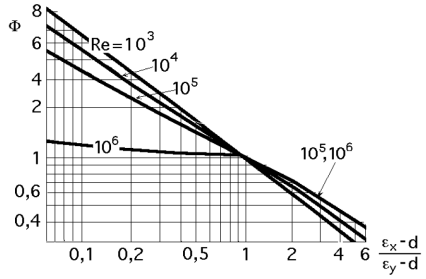


Fig XIII.17.- Factor de corrección Φ para un haz de tubos en batería en disposición regular

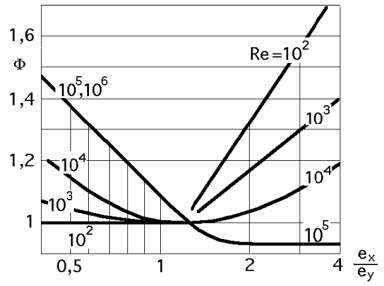


Fig XIII.18.- Factor de corrección Φ para un haz de tubos en batería en disposición al tresbolillo

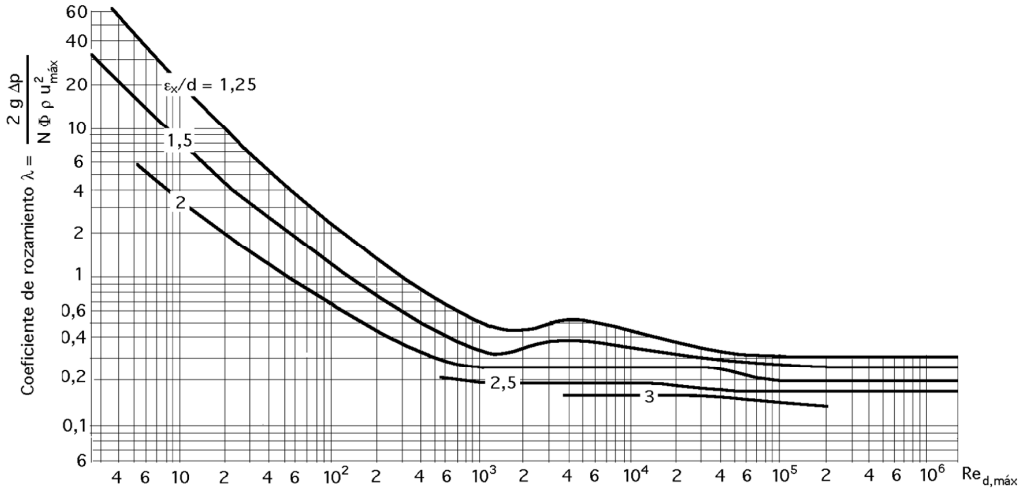


Fig XIII.19.- Coeficiente de rozamiento λ para hallar la pérdida de carga en tubos en batería en disposición regular

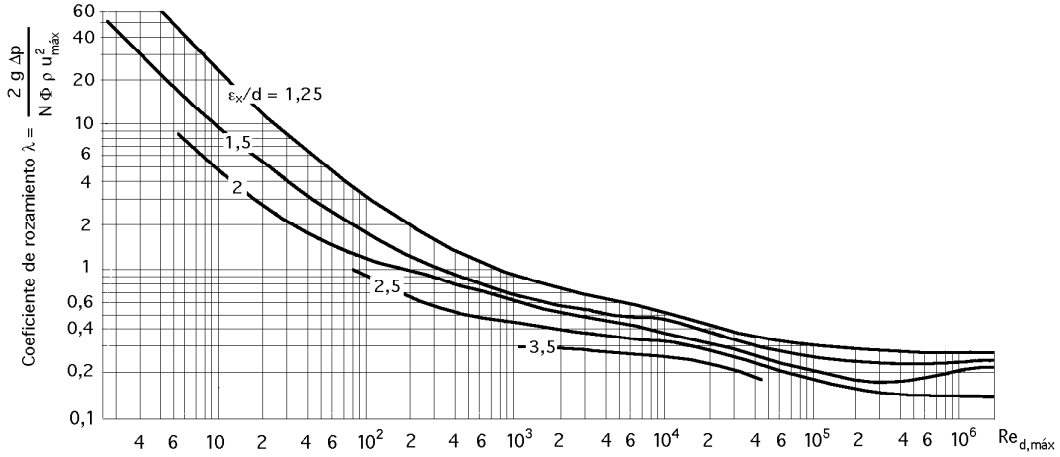


Fig XIII.20.- Coeficiente de rozamiento λ para hallar la pérdida de carga en tubos en batería en disposición al tresbolillo

Si el haz tiene menos de 10 tubos por fila se aplica la ecuación:

$$Nu_{d_{(N<10)}} = \frac{1 + (N - 1)\,\Phi}{N}\, Nu_{d(1)}$$

En los gases, las propiedades se evalúan a la temperatura media de película.

En los líquidos, las propiedades se evalúan a la temperatura media del fluido T_F y después se aplica un factor de corrección al exponente del número de Prandtl $\begin{cases} - \text{ 0,25 para calentamiento} \\ - \text{ 0,11 para enfriamiento} \end{cases}$

HUMOS.- En las Fig XIII.21, 22, 23, y 24 se presentan unas gráficas que permiten determinar el coeficiente de convección h_C para diversas situaciones prácticas y en primera aproximación, ya que en ninguna de ellas se matizan las distancias entre tubos.

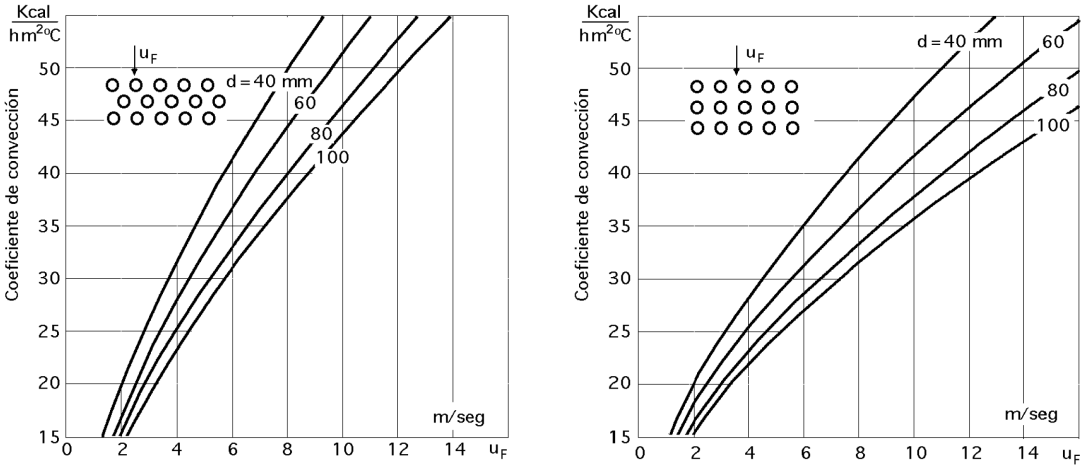


Fig XIII.21.- Coeficiente de convección aproximado en flujo cruzado de humos

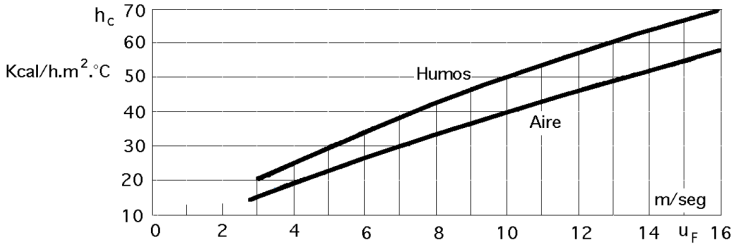


Fig XIII.22.- Calentadores de chapa para gases de combustión

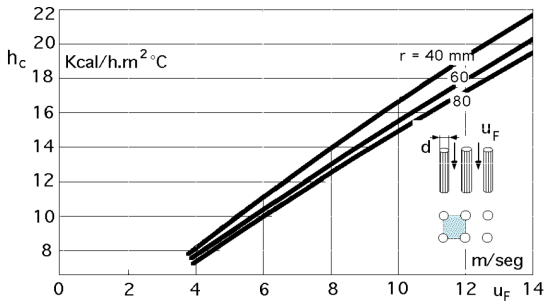


Fig XIII.23.- Tubos con corriente de humos paralela a los mismos

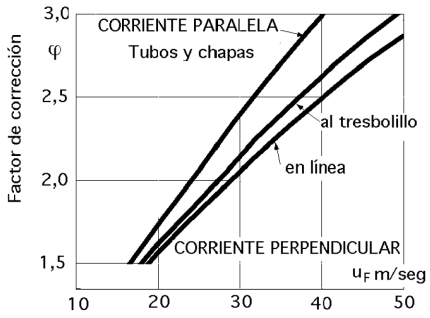


Fig XIII.24.- Factores de corrección de las gráficas anteriores para grandes valores de la velocidad

METALES LÍQUIDOS.- Para el caso de metales líquidos, el cálculo del coeficiente de transferencia de calor correspondiente al flujo sobre baterías de tubos, está basado en la relación siguiente:

$$Nu = 4{,}03 + 0{,}228\,(Re_{máx}\,Pr)^{0{,}67} \;\; ; \;\; 2.10^4 < Re < 8.10^4$$

que para el caso particular del mercurio $Pr = 0{,}022$, es de gran precisión para una batería de 10 filas de tubos de media pulgada, al tresbolillo.

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media de película.

XIII.11.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN DE UN FLUJO A TRAVÉS DE UN LECHO COMPACTO

Los lechos compactos de partículas sólidas se utilizan como intercambiadores de calor o como sistemas de almacenamiento de energía. Consisten en un contenedor de bolas que se calientan haciendo pasar un fluido caliente a través del lecho, y la energía almacenada se transmite posteriormente a un fluido frío; el lecho es, por lo tanto, un transmisor de calor de una corriente fluida a otra, denominándose en estas circunstancias *lecho regenerativo*.

También pueden servir para almacenar energía térmica durante un cierto tiempo o utilizarse como intercambiadores de masa con partículas de muchas formas.

El *volumen del lecho disponible* para el flujo ε_v se conoce como *fracción de vacío* del lecho compacto, y se define en la forma:

$$\varepsilon_v = \frac{Volumen\ del\ lecho - Volumen\ total\ de\ las\ partículas}{Volumen\ del\ lecho} = \frac{V_{lecho} - V_{part}}{V_{lecho}} \;\; , \;\; con: \;\; 0{,}3 < \varepsilon_v < 0{,}5$$

La *superficie específica* de un lecho compacto a es el área mojada o superficie de transferencia térmica por unidad de volumen del lecho:

$$a = \frac{Superficie\ total\ de\ las\ partículas}{Volumen\ del\ lecho} = \frac{A_{part}}{V_{lecho}} = \left| \begin{array}{l} \varepsilon_v = 1 - \dfrac{V_{part}}{V_{lecho}} \\ \\ V_{lecho} = \dfrac{V_{part}}{1 - \varepsilon_v} \end{array} \right| = \frac{A_{part}}{V_{part}}\,(1 - \varepsilon_v)$$

El diámetro hidráulico de un lecho se define como:

$$d_h = \frac{\varepsilon_v}{a} = \frac{\varepsilon_v}{1 - \varepsilon_v}\,\frac{V_{part}}{A_{part}}$$

La longitud característica L y la velocidad característica $\vec{v}$ se definen en la forma:

$$L = \frac{\varepsilon_v}{1 - \varepsilon_v}\,d_{part} \quad ; \quad v = \frac{G}{\rho\ \varepsilon_v\ A_{trans.\ lecho}}$$

La caída de presión en el lecho compacto se obtiene a partir de:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{150\ \eta\ v}{L^2} + \frac{1{,}75\ \rho\ v^2}{L} \quad ; \quad Re = \frac{v\ L\ \rho}{\eta} \quad ; \quad 1 < Re < 10^4$$

Una correlación para la transferencia de calor de un gas que fluye a través de un lecho compacto, o de líquidos con número de Prandtl moderado, es:

$$Nu = (0{,}5\ \sqrt{Re} + 0{,}2\ Re^{2/3})\ Pr^{1/3}\ (\frac{\eta_F}{\eta_{pF}})^{0{,}14} \quad ; \quad \begin{cases} 20 < Re < 10^4 \\ 0{,}5 < Pr < 20 \end{cases}$$

XIII.12.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN EN SUPERFICIE GIRATORIAS

El diseño de sistemas de refrigeración para máquinas giratorias, turbinas, motores, rodamientos de gas de alta velocidad, etc, precisa de correlaciones convectivas para su cálculo.

DISCOS.- Si se supone un disco que gira en un fluido infinito en reposo, el flujo pasa de laminar a turbulento para un valor del número de Reynolds:

$$Re_x = \frac{w\ r_{crít}^2}{\nu} = 2{,}4.10^5$$

en la que w es la velocidad angular y $r_{crít}$ es el radio en el que ocurre la transición:

- *El régimen es laminar desde $r_{crít}$ hasta el eje de giro*
- *El régimen es turbulento (si le hay) desde $r_{crít}$ al exterior*

En la *región laminar*, el número de Nusselt local es:

$$Nu_r = \frac{0{,}585\ \sqrt{Re_r}}{\frac{0{,}6}{Pr} + \frac{0{,}95}{\sqrt[3]{Pr}}}\ , para\ \ Re_r > 2{,}4.10^5\ , y\ cualquier\ valor\ del\ n^o\ de\ Prandtl$$

En la *región turbulenta*, el número de Nusselt local es: $\begin{cases} Nu_r = 0{,}021\ \ Re_r^{0{,}8}\ Pr^{1/3} \\ Re_r > 2{,}4.10^5 \end{cases}$

CILINDROS.- Para un cilindro horizontal que gira en un fluido en reposo el nº de Nusselt local es complicado. El número de Nusselt medio viene dado por:

$$Nu_d = 0{,}133\ Re_d^{2/3}\ Pr^{1/3} \quad ; \quad \begin{cases} Re_d < 4{,}3.10^5 \\ 0{,}7 < Pr < 670 \end{cases} \quad ; \quad Re_d = \frac{w\ d^2}{\nu}$$

El límite inferior para Re_d debido a efectos de convección natural, es decir, para cuando los efectos para la convección natural y forzada combinadas comiencen a ser significativos es:

$$Re_d < 4{,}7\ (\frac{Gr_d^3}{Pr})^{0{,}137}$$

ESFERAS.- Para una esfera que gira en un fluido en reposo el nº de Nusselt local es compli-

cado; el número de Nusselt medio, viene dado por:

$$Nu_d = 0{,}43\ \sqrt{Re_d}\ Pr^{0{,}4} \quad ; \quad \begin{cases} 10^2 < Re_d < 5.10^5 \\ Pr > 0{,}7 \end{cases}$$

$$Nu_d = 0{,}066\ Re_d^{2/3}\ Pr^{0{,}4} \quad ; \quad \begin{cases} 5.10^5 < Re_d < 7.10^6 \\ Pr > 0{,}7 \end{cases}$$